Μάθημα 26 (9-12-20)

Δεν ξεχνάμε

(1) Τα Θεωρήματα Green αναφέρονται αποκλειστικά σε επιφάνειες του $\mathbb{R}^2$, που έχουν ως σύνορο καμπύλη (ή καμπύλες) C^1, λείες, απλές, κλειστές και $\vec{F}=(P,Q)$ πεδία C^1.

Θ. Green

$$\oint_{\partial D^+} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_\alpha^\beta \vec{F}(\vec{r}(t))\cdot\vec{r}\,'(t)\,dt \,, \quad \vec{r}(t)=(x(t),y(t)), \ \vec{r}\,'(t)=(x'(t),y'(t)), \quad t\in[\alpha,\beta]$$

$$\nabla\times\vec{F}(x,y)=\mathrm{curl}\,\vec{F}(x,y)\vec{k}=\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)(x,y)\,\vec{k} \ / \ \text{Στροβιλισμός}$$

Τότε $$\left\| \oint_{\partial D^+} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy \right\|$$

Θ. Απόκλισης (Green)

$$\int_\alpha^\beta \vec{F}(x(t),y(t))\cdot(+y'(t),-x'(t))\,dt = \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right)dx\,dy$$

$$\vec{r}(t)=(x(t),y(t)) \,, \quad \vec{r}\,'(t)=(x'(t),y'(t)) \quad t\in[\alpha,\beta]$$

$$\nabla\cdot\vec{F}(x,y)=\mathrm{div}\,\vec{F}(x,y)=\left.\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right|_{(x,y)} \ / \ \text{Απόκλιση.}$$

Η $\vec{r}:[\alpha,\beta]\to D$ είναι ΚΛΕΙΣΤΗ $(\vec{r}(\alpha)=\vec{r}(\beta))$

(2) Εμβαδόν του D : $$A(D)=\oint_{\partial D^+}(0,x)\cdot d\vec{r}=\oint_{\partial D^+}(-y,0)\cdot d\vec{r}= =\frac{1}{2}\oint_{\partial D^+}(-y,x)\cdot d\vec{r}.$$

(3) D έχει σύνορο ΜΙΑ καμπύλη Γ ή D κυρτό

$\|$ $\vec{F}$ Συντηρητικό/Πεδίο Κλίσεων $(\vec{F}=\nabla f)$ $\Leftrightarrow$

$\|$ $\vec{F}$ Αστρόβιλο $\left(\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y} \text{ στο } D\right)$

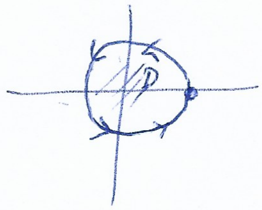
Ασκήσεις

1) Να επαληθευτεί ο Τύπος Green για

$$\vec{F}(x,y) = (x+y,\, y) \quad , \quad (x,y) \in D = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq 1\}$$

$$I_1 = \oint_{\partial D^+} \vec{F}\cdot d\vec{r}, \qquad I_2 = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy \ \text{όπου} \ \vec{F} = (P, Q)$$

$$\partial D^+ \ , \quad \vec{r}(t) = (\text{συν}\, t, \text{ημ}\, t), \quad t \in [0, 2\pi]$$
$$\vec{r}\,'(t) = (-\text{ημ}\, t, \text{συν}\, t)$$



- $$I_1 = \int_0^{2\pi} \vec{F}(\text{συν}\, t, \text{ημ}\, t)\cdot(-\text{ημ}\, t, \text{συν}\, t)\, dt =$$
$$= \int_0^{2\pi} (\text{συν}\, t + \text{ημ}\, t, \text{ημ}\, t)\cdot(-\text{ημ}\, t, \text{συν}\, t)\, dt =$$
$$= \int_0^{2\pi} (-\text{ημ}\, t\cdot\text{συν}\, t - \text{ημ}^2 t + \text{ημ}\, t\,\text{συν}\, t)\, dt = -\int_0^{2\pi} \text{ημ}^2 t\, dt = -\pi$$

- $$I_2 = \iint_D (0-1)\, dx\,dy = -\iint_D 1\, dx\,dy = -A(D) = -\pi$$

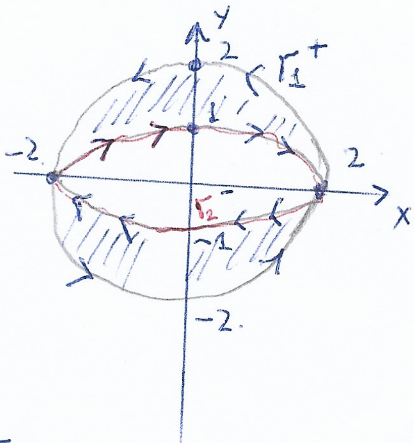
$$I_1 = I_2$$

2) Να επαληθευτεί ο Τύπος Green για

$$\vec{F} = (4x - 2y,\, 2x + 6y), \quad D = \left\{(x,y) : x^2+y^2 \leq 4, \ \left(\frac{x}{2}\right)^2 + y^2 \geq 1\right\}$$

$$\Gamma_1^+ \quad \vec{r}_1(t) = (2\,\text{συν}\, t, 2\,\text{ημ}\, t), \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$\Gamma_2^+ \quad \vec{r}_2(t) = (2\,\text{συν}\, t, \text{ημ}\, t), \quad t \in [0, 2\pi]$$



- $$I_1 = \oint_{\partial D^+} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \vec{F}(\vec{r}_1(t))\cdot\vec{r}_1\,'(t)\, dt -$$
$$- \int_0^{2\pi} \vec{F}(\vec{r}_2(t))\cdot\vec{r}_2\,'(t)\, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(4(2\sigma\upsilon\nu t) - 2\cdot(2\eta\mu t),\ 2(2\sigma\upsilon\nu t) + 6(2\eta\mu t)\right)\cdot(-2\eta\mu t, 2\sigma\upsilon\nu t)\,dt$$

$$- \int_0^{2\pi} \left(4\cdot(2\sigma\upsilon\nu t) - 2\eta\mu t,\ 2(2\sigma\upsilon\nu t) + 6\eta\mu t\right)\cdot(-2\eta\mu t, \sigma\upsilon\nu t)\,dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} (4 + 18\,\eta\mu t\,\sigma\upsilon\nu t)\,dt = 8\pi \quad / \quad \underline{I_1 = 8\pi}$$

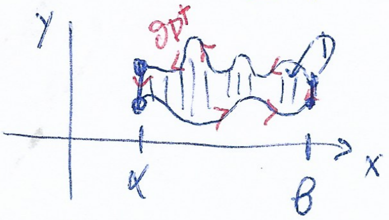
- $$I_2 = \iint_D \left(\frac{\partial(2x+6y)}{\partial x} - \frac{\partial(4x-2y)}{\partial y}\right) dx\,dy = 4\iint_D 1\,dx\,dy =$$

$$= 4\left(A(\{(x,y): x^2+y^2 \le 4\}) - A\left(\left\{(x,y): \left(\tfrac{x}{2}\right)^2 + y^2 \le 1\right\}\right)\right) = 4(\pi\cdot 2^2) - 4(\pi\cdot 2\cdot 1)$$

$$= 16\pi - 8\pi = 8\pi \quad / \quad I_2 = 8\pi \;//$$

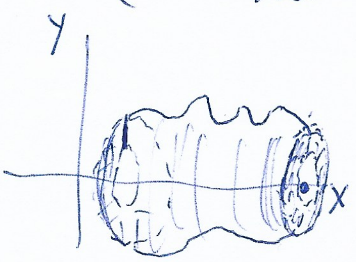
3) Να επαληθευτεί ο τύπος Green για $\vec{F} = (x, x+y)$, $D = \{(x,y): x^2+y^2 \le 1\}$ (Οκτ. 2020)

4) Έστω $D = \{(x,y): \alpha \le x \le \beta,\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\}$, $\varphi_1 \ge 0$ $(\varphi_1 \not\equiv \varphi_2)$



B το στερεό που δημιουργείται εκ περιστροφής του D, γύρω από τον άξονα των x

(Θ. Πάππου)



Να δειχθεί ότι $V(B) \overset{(1)}{=} 2\pi\bar{y}\cdot A(D) \overset{(2)}{=} \int_{\partial D^+} (-\pi y^2, 0)\,d\vec{r}$

- Γνωρίζουμε ότι (1) $V(B) = \pi\int_\alpha^\beta (\varphi_2^2(x) - \varphi_1^2(x))\,dx$

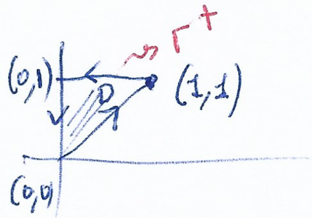
$$\bar{y}A(D) = \iint_D y\,dx\,dy = \int_\alpha^\beta \frac{y^2}{2}\Big|_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta (\varphi_2^2(x) - \varphi_1^2(x))\,dx$$

Άρα: $2\pi\bar{y}A(D) = V(B)$ (1)

- $$\int_{\partial D^+} (-\pi y^2, 0)\cdot d\vec{r} \underset{Green}{=} \iint_D 2\pi y\,dx\,dy = \pi\int_\alpha^\beta (\varphi_2^2(x) - \varphi_1^2(x))\,dx = V(B) \quad (2)$$

$(\bar{x}, \bar{y})$ το κέντρο βάρους του D

5) Να υπολογιστεί το $I=\oint_{\Gamma} \vec{F}\cdot d\vec{r}$ όπου Γ η περίμετρο τριγώνου με κορυφές τα σημεία $(0,0),(0,1),(1,1)$ και $\vec{F}(x,y)=(xy-x^2, x^2y)$



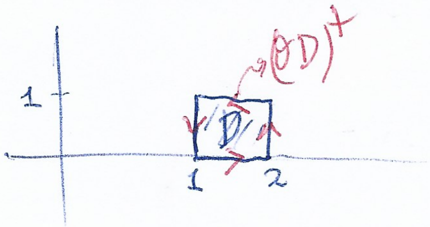
$$I=\oint_{\Gamma} \vec{F}\cdot d\vec{r}=\iint_D \left(\frac{\partial(x^2y)}{\partial x}-\frac{\partial(xy-x^2)}{\partial y}\right)dx\,dy$$

$D=\{(x,y):\ 0\le x\le 1,\ x\le y\le 1\}$

$$=\int_0^1\left(\int_x^1(2xy-x)\,dy\right)dx=$$

$$=\int_0^1-(x^3-x^2)\,dx=\frac{-1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{1}{12}$$

6) Εάν $\vec{F}(x,y)=(x-xy)\vec{i}+(y^3+1)\vec{j}$ και $D=[1,2]\times[0,1]$ να υπολογιστεί $\oint_{\partial D^+}\vec{F}\cdot d\vec{r}$



$$I=\int_{\partial D+}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\iint_D\left(\frac{\partial(y^3+1)}{\partial x}-\frac{\partial(x-xy)}{\partial y}\right)dx\,dy=$$

$$=\iint_D\left(0-(-x)\right)dx\,dy=\int_1^2\left(\int_0^1 x\,dy\right)dx=$$

$$=\int_1^2 x\,dx=\frac{3}{2}$$

7) Να υπολογιστεί $\int_{\Gamma}(x+e^y)dx+(x^2-y)dy$ όπου Γ το σύνορο του $D=[0,1]\times[0,1]$, θετικά προσανατολισμένο (Ιούνιος 2020)

8) Να υπολογιστεί το $I=\int_{(\partial D)+}\left(\sqrt{1+x^2}-ye^{xy}+3y\right)dx+$ $+\left(x^2-xe^{xy}+\ln(1+y^4)\right)dy$, όπου $D=\{(x,y):\ x^2+y^2\le \alpha^2\}$ $(\alpha>0)$

$$I=\iint_D \left[\frac{\partial(x^2-xe^{xy}+\ln(1+y^4))}{\partial x} - \frac{\partial(\sqrt{1+x^2}-ye^{xy}+3y)}{\partial y}\right]dx\,dy=$$

$$=\iint_D \left[(2x-e^{xy}-xye^{xy}+0)-(0-e^{xy}-xye^{xy}+3)\right]dx\,dy=$$

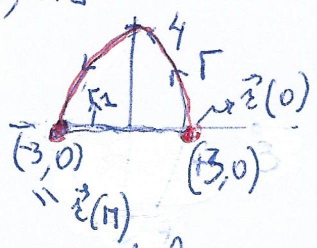
$$=\iint_D (2x+3)\,dx\,dy=2\iint_D x\,dx\,dy+3A(D)=2\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\alpha}(r\cos\theta)\cdot r\,dr\right)d\theta+3\pi a^2=$$

$$=2\left(\int_0^{2\pi}\cos\theta\,d\theta\right)\cdot\frac{\alpha^3}{3}+3\pi\alpha^2=3\pi\alpha^2 \;//$$

9) Να υπολογιστεί το $I=\int_\Gamma (y+ye^{xy}+\sin x,\ x+xe^{xy}+\cos y)\cdot d\vec{r}$ όπου Γ η περιφέρεια $x^2+y^2=1$.

10)* Να υπολογιστεί το $I=\int_\Gamma (e^x+y^2\cos x)\,dx+(e^{2y}+2y\sin x)\,dy$. όπου Γ $\vec{r}(t)=(3\cos t, 4\sin t)$, $t\in[0,\pi]$

$\vec{F}=(P,Q)=(e^x+y^2\cos x,\ e^{2y}+2y\sin x)$



$\frac{\partial Q}{\partial x}=2y\cos y=\frac{\partial P}{\partial y}$. Άρα το $\vec{F}$ είναι αστρόβιλο στον $\mathbb{R}^2$ άρα (Εφαρμογή Θ. Green) το $\vec{F}$ είναι συντηρητικό στο $\mathbb{R}^2$.

α τρόπος Βρίσκω $f(x,y)=e^x+y^2\sin x+\frac{1}{2}e^{2y}$ $(+c)$

$I=\int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}=f(\vec{r}(\pi))-f(\vec{r}(0))=(e^{-3}+\frac{1}{2})-(e^{3}+\frac{1}{2})=e^{-3}-e^{3}$ //

β τρόπος $I=\int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_{\Gamma_1}\vec{F}\cdot d\vec{r}$, Γ_1 $\vec{r}_1(t)=(t,0)$, $t\in[-3,+3]$

$I=-\int_{-3}^{+3}\vec{F}(t,0)\cdot(1,0)\,dt=-\int_{-3}^{+3}e^t\,dt=-e^3+e^{-3}$ // ($\vec{F}$ = Πεδίο Κλίσεων, Ανεξαρτησία Δρόμου)

11) Να υπολογιστεί το Εμβαδόν του $D=\{(x,y): x^{2/3}+y^{2/3}\le 1\}$
(βλ. Εικόνα)

Γνωρίζουμε ότι $A(D)=\iint_D 1\,dx\,dy = \oint_{\partial D^+} \frac{1}{2}(-y,x)\cdot d\vec{r}$ (Θ. Green Εφαρμογές)

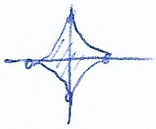
Το σύνορο είναι $x^{2/3}+y^{2/3}=1$, $\vec{r}(t)=(\cos^3 t, \sin^3 t)$, $t\in[0,2\pi]$

$\vec{r}\,'(t)=(-3\cos^2 t\sin t, 3\sin^2 t\cos t)$

$$\underline{A(D)}=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(-\sin^3 t, \cos^3 t)\cdot(-3\cos^2 t\sin t, 3\sin^2 t\cos t)\,dt=$$

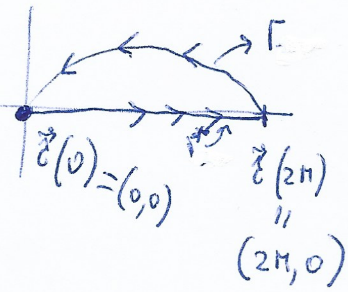
$$=\frac{3}{2}\int_0^{2\pi}(\cos^2 t\cdot\sin^4 t + \sin^2 t\cdot\cos^4 t)\,dt=\frac{3}{2}\int_0^{2\pi}\sin^2 t\cos^2 t\,dt=$$

$$=\frac{3\pi}{8}$$



12) Να υπολογιστεί το Εμβαδόν του D που έχει σύνορο την $\vec{r}(t)=\alpha(t-\sin t, 1-\cos t)$, $t\in[0,2\pi]$ $(\alpha>0)$ (βλ. Εικόνα) και την $y=0$

$$A(D)=\iint_D 1\,dx\,dy=\int_{\partial D+}(-y,0)\cdot d\vec{r}$$



Γ^- $\quad\vec{r}(t)=\alpha(t-\sin t, 1-\cos t)$, $t\in[0,2\pi]$

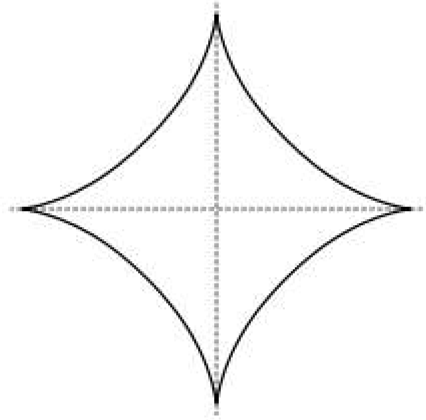
Γ^* $\quad\vec{r}_*(t)=(t,0)$, $t\in[0,2\pi]$

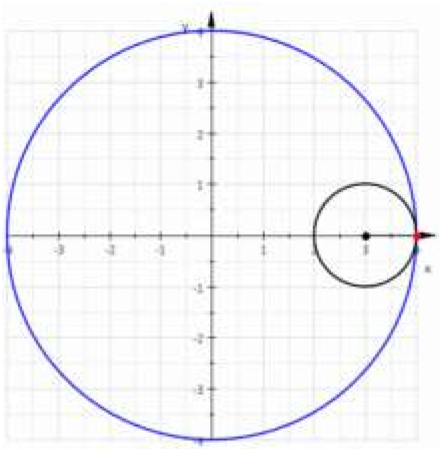
$$I_1=-\int_{\Gamma^-}(-y,0)\cdot d\vec{r}=\int_0^{2\pi}\big(-(-\alpha(1-\cos t),0)\cdot(\alpha(1-\cos t), \alpha\sin t)\big)dt=$$

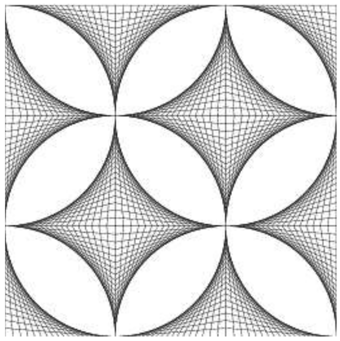
$$=\alpha^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2\,dt=3\pi\alpha^2$$

$$I_2=\int_{\Gamma^*}(-y,0)\cdot d\vec{r}=0$$

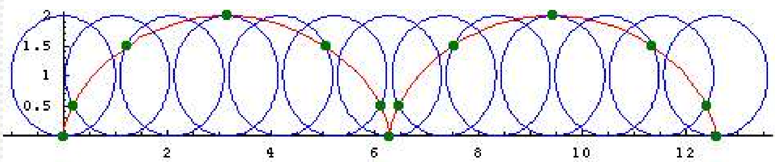
Άρα $A(D)=3\pi\alpha^2$

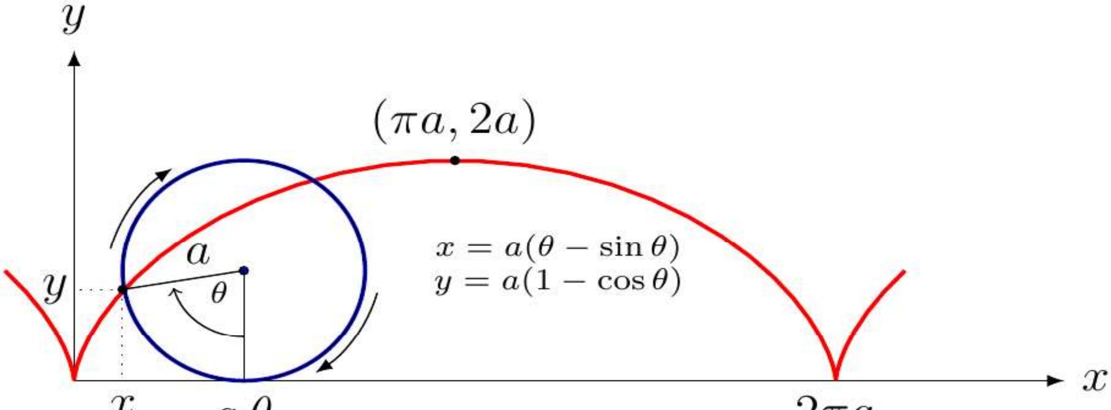






ΑΣΚΗΣΗ 5





ΑΣΚΗΣΗ 6

13) Ταυτότητες Green για δυο μεταβλητές

$f, g : D (\subseteq \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$, C^2, ∂D απλές κλειστές, C^1, λείες καμπύλες (Στ. σύνολο Green ή Σύνολο Green)

i) $\iint_D f \nabla^2 g + \iint_D \nabla f \cdot \nabla g = \oint_{\partial D^+} -f \frac{\partial g}{\partial y} dx + f \frac{\partial g}{\partial x} dy = \oint_{\partial D^+} (f \nabla g) \cdot \vec{N} ds$

(1η Ταυτότητα Green)

ii) $\iint_D f \nabla^2 f + \iint_D \|\nabla f\|^2 = \oint_{\partial D^+} (f \nabla f) \cdot \vec{N} ds$ $\left(\vec{N} = (y'(t), -x'(t)) / ((x')^2 + (y')^2)^{1/2} \right)$

(2η ταυτότητα Green)

* iii) Εάν η f είναι Αρμονική στο D και $f(x,y) = 0$ αν $(x,y) \in \partial D$, τότε $f(x,y) = 0$ για $(x,y) \in D$

$\left(\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right), \Delta = \nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right), f = \text{αρμονική} \Leftrightarrow \nabla^2 f = 0 \right)$

---

i) $\vec{F} = \left(-f \frac{\partial g}{\partial y}, f \frac{\partial g}{\partial x} \right)$ εφαρμόζουμε Θ. Green :

$$\oint_{(\partial D)^+} \left(-f \frac{\partial g}{\partial y}, f \frac{\partial g}{\partial x} \right) \cdot d\vec{r} = \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(f \frac{\partial g}{\partial x} \right) - \left(\frac{\partial}{\partial y}\left(-f \frac{\partial g}{\partial y} \right) \right) \right) =$$

$$= \iint_D \left(\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial g}{\partial x} + f \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial g}{\partial y} + f \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \Big) =$$

$$= \iint_D \nabla f \cdot \nabla g + \iint_D f \nabla^2 g \quad //$$

ii) $f = g$ στην i) παίρνουμε την ii)

iii) Από την ii) $\iint_D f\nabla^2 f + \iint_D \|\nabla f\|^2 = \oint_{\partial D^+} f\nabla f$ με $\nabla^2 f = 0$ (Αρμονική)

$f=0$ στο ∂D. Άρα, $\iint_D \|\nabla f\|^2 = 0$.

$\iint_D \|\nabla f\|^2 = 0$ με $\|\nabla f\|^2 \geq 0$. $\underset{(\nabla f = \text{συνεχής})}{\Rightarrow}$ $\|\nabla f\|^2 = 0$ στο $D \Rightarrow \nabla f(x,y) = (0,0)$, $(x,y)\in D$

Από ΘΜΤ ($f = C^1$) $f(x,y) = c$, $(x,y)\in D$.

Όμως, $f(x,y)=0$, $(x,y)\in\partial D$ $\underset{f=\text{συν.}}{\Rightarrow}$ $f(x,y)=0$, $(x,y)\in D$

Εφαρμογή Θ. Green σε Αστρόβιλο, Μη Συντηρητικό Δ.Π

*14) $\vec{F}(x,y) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. Ισχύουν τα εξής:

i) Το $\vec{F}$ είναι Αστρόβιλο Δ.Π.

ii) $\oint_{\Gamma^+} \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0$, Γ είναι Απλή, Κλειστή, Λεία, C^1 καμπύλη με $(0,0)\notin\Gamma$ και $(0,0)\notin$ εσΓ

iii) $\oint_{\Gamma^+} \vec{F}\cdot d\vec{r} = 2\pi$, Γ είναι Απλή, Κλειστή, Λεία, C^1 καμπύλη με $(0,0)\in$ εσΓ

iv) Το $\vec{F}$ δεν είναι Συντηρητικό Δ.Π.

---

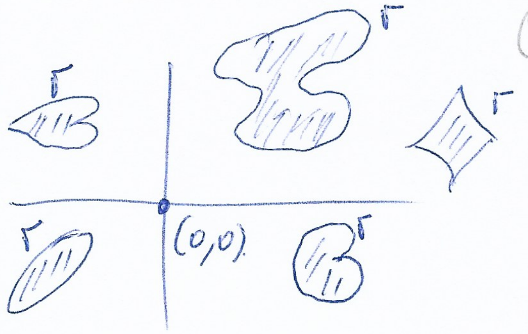
i) $P = -\frac{y}{x^2+y^2}$, $Q = \frac{x}{x^2+y^2}$.

$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{(x^2+y^2) - x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$

$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{(x^2+y^2) - y(2y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$

$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ στο $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. Άρα, το $\vec{F}$ είναι Αστρόβιλο

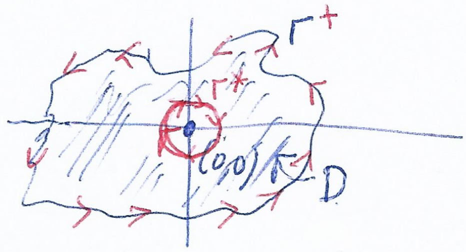
ii) Το $(0,0)\notin Γ$, $(0,0)\notin εσΓ$



Άρα, το $D=εσΓ\cup Γ$ είναι σύνολο Green $(Γ=\partial D)$

$$\oint_Γ \vec{F}\cdot d\vec{r}=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy \overset{i)}{=} \iint_D 0\,dx\,dy=0$$

iii) $(0,0)\in εσΓ$



Το $D=εσΓ\cup Γ$ έχει σύνορο $\partial D=Γ\cup\{(0,0)\}$,

άρα στο D δεν εφαρμόζεται το Θ. Green.

Θεωρούμε $Γ^*$ καμπύλη $\vec{r}(t)=(ε\cos t, ε\sin t)$, $t\in[0,2\pi]$

ώστε $εσΓ^*\subseteq εσΓ$ και $(0,0)\in εσΓ^*$.

Το σύνολο $D=\overline{εσΓ\cap(εξΓ^*)}$ είναι στοιχειώδες σύνολο Green, άρα, στο D εφαρμόζεται το Θ. Green.

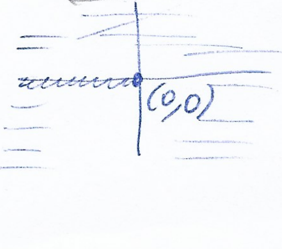
$$0=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy=\oint_{Γ^+}\vec{F}\cdot d\vec{r}+\oint_{(Γ^*)^-}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\oint_{Γ^+}\vec{F}\cdot d\vec{r}-\oint_{Γ^*}\vec{F}\cdot d\vec{r}$$

Άρα, $\oint_{Γ^+}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\oint_{Γ^*}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_0^{2\pi}\left(-\frac{ε\sin t}{ε^2},\frac{ε\cos t}{ε^2}\right)\cdot(-ε\sin t, ε\cos t)\,dt$

$$=\int_0^{2\pi}1\,dt=2\pi$$

iv) Από το iv) και το Θ. Συντηρ. ΔΠ. συμπεραίνουμε ότι το $\vec{F}$ δεν είναι συντηρητικό.

Σχόλιο: Αν πάρουμε $f(x,y)=\begin{cases}\frac{\pi}{2}-\text{τοξεφ}\frac{x}{y}, & y>0\\ 0, & y=0\\ -\frac{\pi}{2}-\text{τοξεφ}\frac{x}{y}, & y<0\end{cases}$ και $x>0$



Τότε $\vec{F}(x,y)=\left(-\frac{y}{x^2+y^2},\frac{x}{x^2+y^2}\right)=\nabla f(x,y)$, $x>0$

15) $\vec{F}(x,y)=\frac{x^2}{[x^2+(y-1)^2]^2}(y-1,-x)$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,1)\}$

i) Να αποδειχθεί ότι το $\vec{F}$ είναι Αστρόβιλο

ii) Να υπολογιστεί $\oint_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$, Γ $x^2+(y-1)^2=\alpha^2$ $(\alpha>0)$

iii) Να υπολογιστεί $\oint_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$, Γ $9x^2+4y^2=36$.

---

16) Για την $\vec{F}(x,y)=\left(\frac{-y}{x^2+y^2},\frac{x}{x^2+y^2}\right)$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$

να υπολογιστούν

i) $\int_{\Gamma_1}\vec{F}\cdot d\vec{r}$, όπου Γ_1 είναι το ευθ. τμήμα $[\vec{\alpha},\lambda\vec{\alpha}]$, $\vec{\alpha}\neq\vec{0}$, $\lambda>1$.

ii) $\int_{\Gamma_2}\vec{F}\cdot d\vec{r}$, όπου Γ_2 $\vec{r}_2(t)=(\alpha\cos t,\alpha\sin t)$, $t\in[\theta,\varphi]$

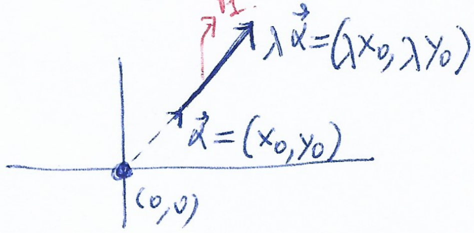
$0<\theta<\varphi<\frac{\pi}{2}$ $(\alpha>0)$

iii) $\int_{\Gamma_3}\vec{F}\cdot d\vec{r}$, όπου Γ_3 $\vec{r}_3(t)=(\alpha\cos t, b\sin t)$, $t\in[\theta,\varphi]$

$0<\theta<\varphi<\frac{\pi}{2}$ $(\alpha, b>0)$

---

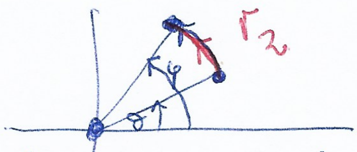
i) Γ_1, $\vec{r}_1(t)=\vec{\alpha}+t(\lambda\vec{\alpha}-\vec{\alpha})$, $t\in[0;1]$



$\vec{r}_1'(t)=(\lambda-1)(x_0,y_0)$ / $\vec{r}_1(t)=(x_0+\lambda t x_0-t x_0,\ y_0+\lambda t y_0-t y_0)$

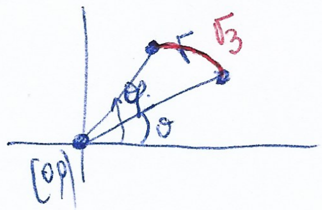
Τότε $\vec{F}(\vec{r}_1(t))\cdot(x_0,y_0)=0$.

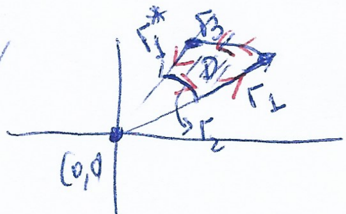
Άρα $\int_{\Gamma_1}\vec{F}\cdot d\vec{r}=0$.



ii) $\int_{\Gamma_2}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_\theta^\varphi\left(\frac{-\alpha\sin t}{\alpha^2},\frac{\alpha\cos t}{\alpha^2}\right)\cdot(-\alpha\sin t,\alpha\cos t)\,dt=\varphi-\theta$ (ανεξάρτητο του α)

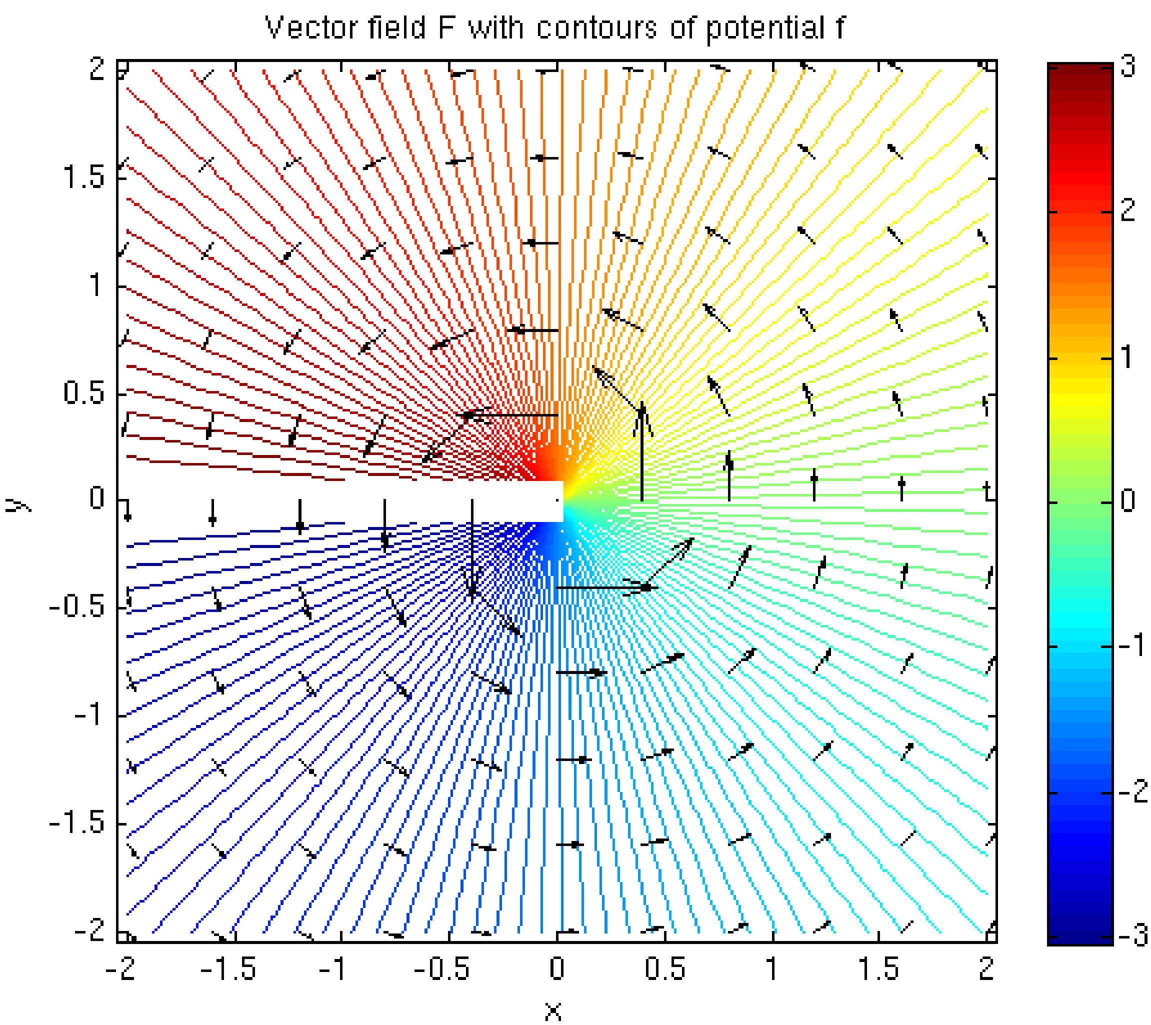
iii)





$0=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)$. Από i), ii), iii)

$\int_{\Gamma_3}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_{\Gamma_2}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\varphi-\theta$.



Vector field F with contours of potential f
y
x
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
-3
-2
-1
0
1
2
3