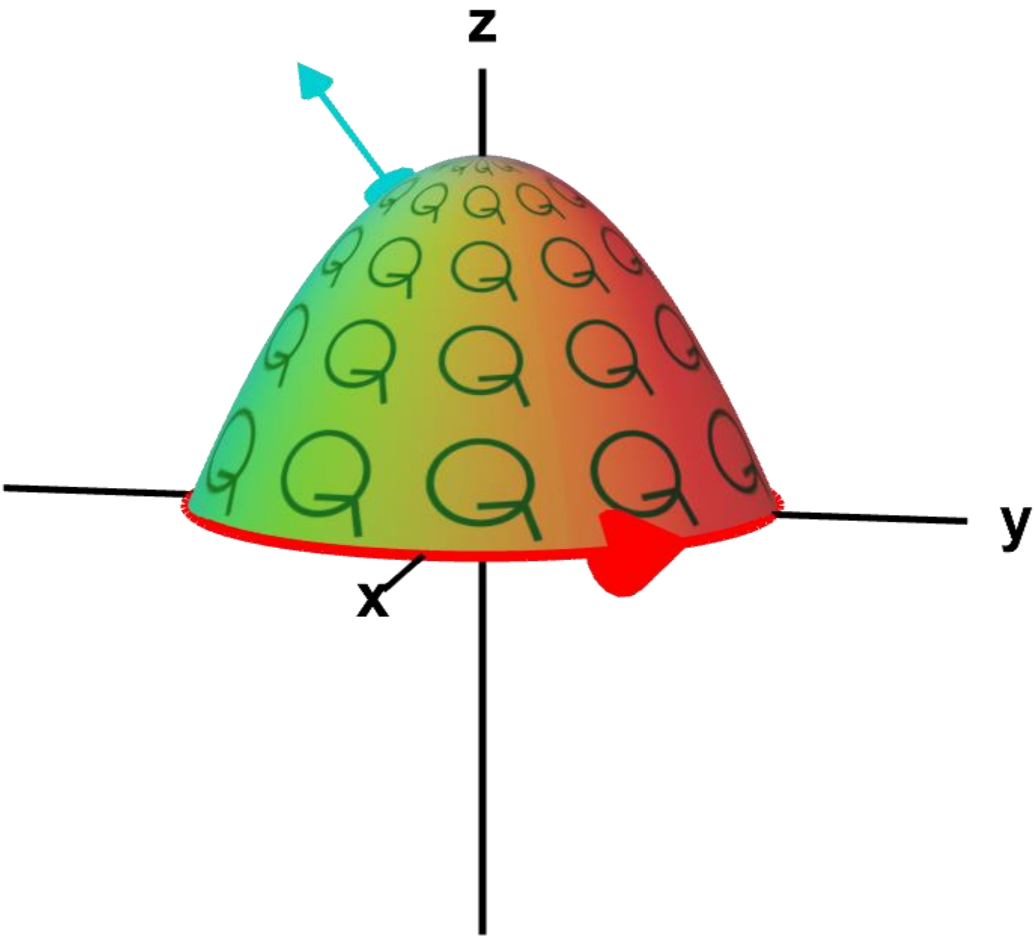
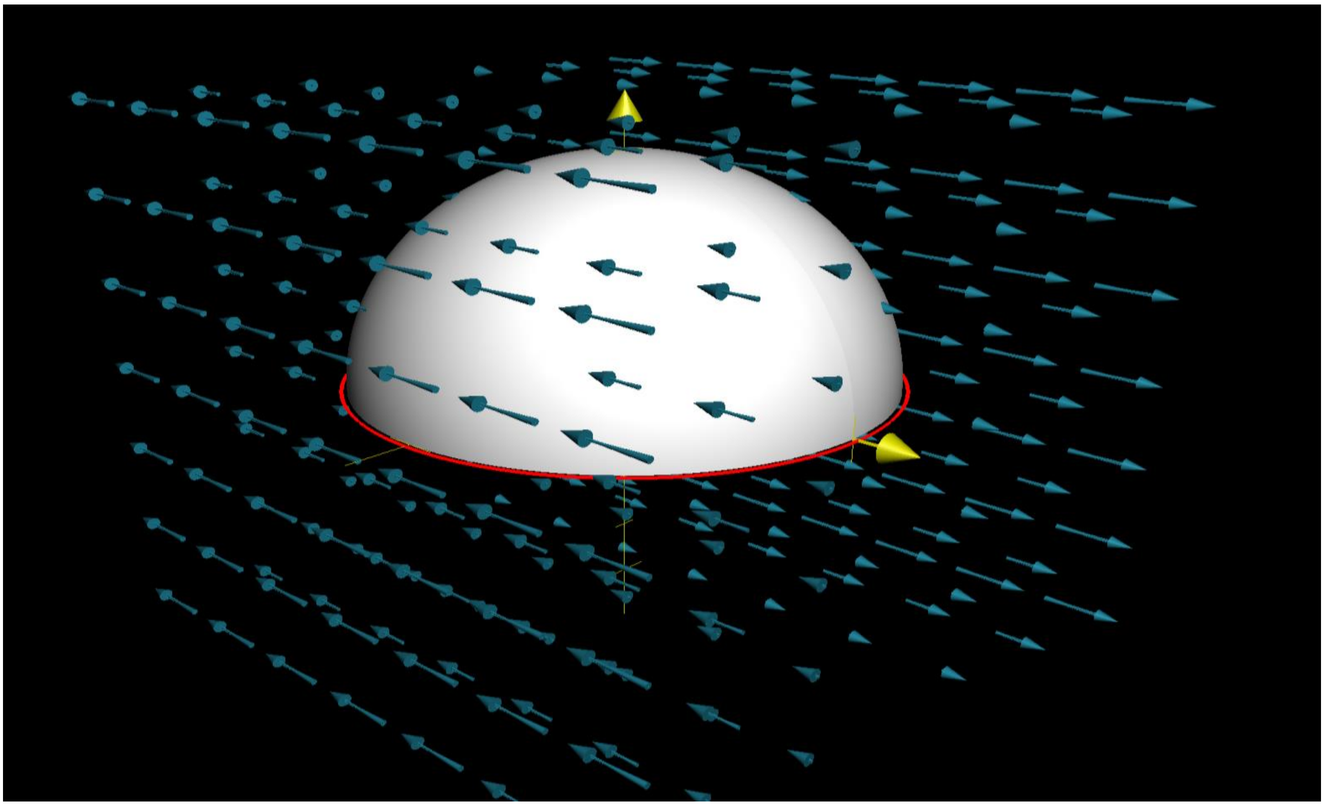
ΑΣΚΗΣΕΙΣ στον τύπο STOKES



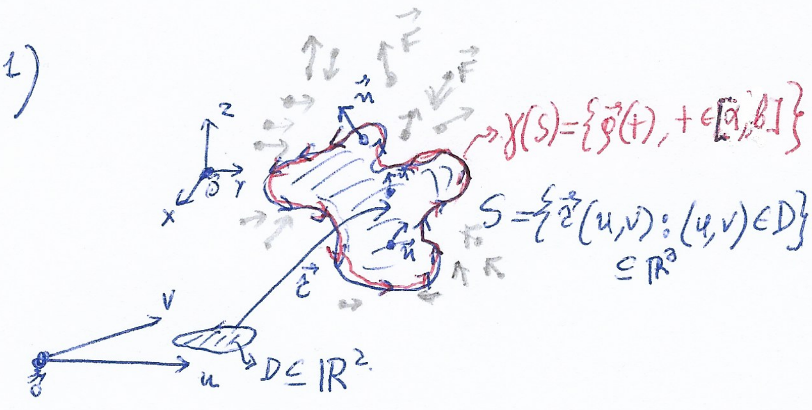


ΜΑΘΗΜΑ 28 (14-12-20)

Δεν ξεχνάμε

(1) • $\vec{F}=(P,Q,R): \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ Δ.Π (C^1)

• S επιφάνεια του $\mathbb{R}^3$ με παραμέτρηση $\vec{r}(u,v)$, $(u,v)\in D$ (καλή)



• $\vec{\rho}(t)$ παραμέτρηση του "συνόρου" (περιγράμματος) της S)

$$\boxed{\iint_D \left(\nabla\times\vec{F}(\vec{r}(u,v))\right)\cdot\left((\vec{r}_u\times\vec{r}_v)(u,v)\right)du\,dv=\int_a^b \vec{F}(\vec{\rho}(t))\cdot\vec{\rho}\,'(t)\,dt.}$$

(Θ. Stokes)

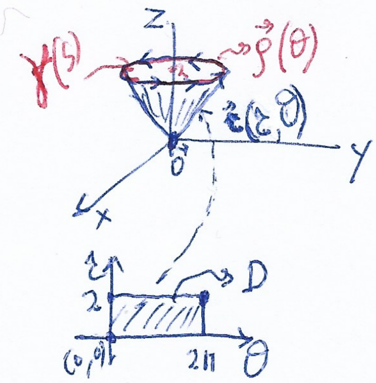
$$\nabla\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}$$ (Στροβιλισμός)

(2) $\vec{F}=(P,Q,R)$ ΔΠ C^1 ορισμένο σε Απλά Συνεκτικό σύνολο του $\mathbb{R}^3$

ΤΕΕΙ
- i) $\vec{F}$ Συντηρητικό ΔΠ $(\vec{F}=\nabla f)$
- ii) $\vec{F}$ Αστρόβιλο ΔΠ $(\nabla\times\vec{F}(\vec{x})=\vec{0},\ \vec{x}\in$ Π.Ο. του $\vec{F})$

Ασκήσεις

1) Για $\vec{F}(x,y,z)=(x^2-y)\vec{i}+4z\vec{j}+x^2\vec{k}$ και $S=\{(x,y,z): z=\sqrt{x^2+y^2},\ z\in[0,2]\}$ να επαληθευτεί ο τύπος του Stokes.



• $\vec{F}=(x^2-y,\ 4z,\ x^2)$, $\nabla\times\vec{F}(x,y,z)=(-4,-2x,1)$

• S : $\vec{r}(r,\theta)=(r\,συν\theta,\ r\,ημ\theta,\ r)$, $(\theta,r)\in[0,2\pi]\times[0,2]$
$(z=r\in[0,2])$

$\vec{r}_r\times\vec{r}_\theta=(συν\theta,\ ημ\theta,\ 1)\times(-r\,ημ\theta,\ r\,συν\theta,\ 0)=$
$=(-r\,συν\theta,\ -r\,ημ\theta,\ r)$ $(\neq(0,0,0)$ για $r>0)$

• $\vec{\rho}(\theta)=(2\sigma\upsilon\nu\theta, 2\eta\mu\theta, 2)$, $\theta\in[0,2\pi]$ παραμέτρηση του "συνόρου" $\gamma(S)$

$$\to I_1=\iint_D \left((\nabla\times\vec{F})(\vec{r}(r,\theta))\right)\cdot(\vec{r}_r\times\vec{r}_\theta)\,dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^{2}(-4,-2r\sigma\upsilon\nu\theta,1)\cdot(-r\sigma\upsilon\nu\theta,-r\eta\mu\theta,r)\,dr\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{2}(4r\sigma\upsilon\nu\theta+2r^2\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta+r)\,dr\,d\theta=4\pi$$

$$\to I_2=\int_0^{2\pi}\vec{F}(\vec{\rho}(\theta))\cdot\vec{\rho}\,'(\theta)\,d\theta=\int_0^{2\pi}\left((2\sigma\upsilon\nu\theta)^2-2\eta\mu\theta,\ 4\cdot 2,\ (2\sigma\upsilon\nu\theta)^2\right)\cdot\underbrace{(-2\eta\mu\theta, 2\sigma\upsilon\nu\theta, 0)}_{\vec{\rho}\,'(\theta)}$$

$$=\int_0^{2\pi}(-8\sigma\upsilon\nu^2\theta\cdot\eta\mu\theta+4\eta\mu^2\theta+8\cdot 2\sigma\upsilon\nu\theta)\,d\theta=4\pi$$

Άρα $I_1=I_2$ ιν.

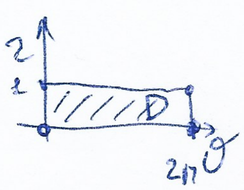
2) Για $\vec{F}(x,y,z)=(-y, x+y+z, y+z)$ και $S=\{(x,y,z): z=2-(x^2+y^2),\ x^2+y^2\le 1\}$ να επαληθευτεί ο τύπος του Stokes.

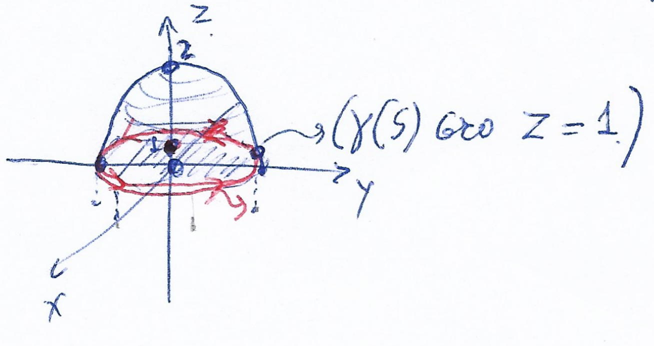
• $\vec{F}=(-y, x+y+z, y+z)$, $\nabla\times\vec{F}=(0,0,2)$

• S : $\vec{r}(r,\theta)=(r\sigma\upsilon\nu\theta, r\eta\mu\theta, 2-r^2)$, $[\theta,r]\in[0,2\pi]\times[0,1]$ $(r^2=x^2+y^2\le 1)$

$$\vec{r}_r\times\vec{r}_\theta=(\sigma\upsilon\nu\theta,\eta\mu\theta,-2r)\times(-r\eta\mu\theta, r\sigma\upsilon\nu\theta, 0)=$$
$$=(2r^2\sigma\upsilon\nu\theta, 2r^2\eta\mu\theta, r)\quad(\neq(0,0,0),\ r>0)$$

• $\vec{\rho}(\theta)=(\sigma\upsilon\nu\theta, \eta\mu\theta, 2-1=1)$, $\theta\in[0,2\pi]$ το "σύνορο" της S, $\gamma(S)$





③

$$\rightarrow I_1 = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(\nabla\times\vec{F}(\vec{r}(r,\theta))\right)\cdot(\vec{r}_r\times\vec{r}_\theta)\,dr\,d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (0,0,2)\cdot(2r^2\sigma\upsilon\nu\theta,\ 2r^2\eta\mu\theta,\ r)\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 2r\,dr\right)d\theta = \underline{2\pi}$$

$$\rightarrow I_2 = \int_0^{2\pi}\vec{F}(\vec{g}(\theta))\cdot\vec{g}\,'(\theta)\,d\theta = \int_0^{2\pi}(-\eta\mu\theta,\ \sigma\upsilon\nu\theta+\eta\mu\theta+1,\ \eta\mu\theta+1)\cdot(-\eta\mu\theta,\sigma\upsilon\nu\theta,0)\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}(1+\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta+\sigma\upsilon\nu\theta)\,d\theta = 2\pi //$$

<u>Άρα</u>, $I_1 = I_2$ ✓✓

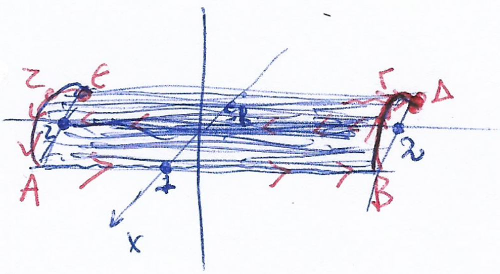
3) Για $\vec{F}(x,y,z) = (y^2+z^2,\ z^2+x^2,\ x^2+y^2)$ και S είναι η κυλινδρική επιφάνεια $x^2+z^2=1$ με $z\geq 0$ και αποκόπτεται από τα επίπεδα $y=-2, y=2$, <u>να</u> επαληθευτεί ο τύπος του Stokes.

- $\vec{F} = (y^2+z^2,\ z^2+x^2,\ x^2+y^2)$, $\nabla\times\vec{F}(x,y,z) = 2(y-z,\ z-x,\ x-y)$

- S : $\vec{r}(x,y) = (x,y,z=\sqrt{1-x^2})$, $(x,y)\in[-1,+1]\times[-2,+2]=D$

  Η S είναι γράφημα

  της $z=\sqrt{1-x^2}$, $(x,y)\in D$



  Κάθετο $(-z_x,-z_y,1) =$

  $= \left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}},0,1\right)$ ($\neq\vec{0}$, έχει έννοια για $x\in(-1,+1)$)

- $\gamma(S)$. αποτελείται από το ευθ τμήμα AB,

  Γ_1, $\vec{r}_1(y) = (1,y,0)$, $y\in[-2,+2]$,

ii) κατά το ημικύκλιο $\overrightarrow{B\Gamma\Delta}$,

$$\Gamma_2 : \vec{r}_2(x) = (-x, 2, \sqrt{1-x^2}), \ x \in [-1, +1]$$

iii) κατά το ευθ. τμήμα ΔE

$$\Gamma_3 : \vec{r}_3(y) = (-1, -y, 0), \ y \in [-2, 2]$$

iv) κατά το ημικύκλιο $\overrightarrow{EZA}$,

$$\Gamma_4 : \vec{r}_4(x, -2, \sqrt{1-x^2}), \ x \in [-1, +1]$$

$$\to I_1 = \int_{-2}^{+2}\left(\int_{-1}^{+1} (\nabla \times \vec{F}(\vec{r}(x,y)) \cdot (-z_x, -z_y, 1)\, dx\right) dy = \int_{-2}^{+2}\left(\int_{-1}^{+1}\left(\frac{2xy}{\sqrt{1-x^2}} - 2y\right) dx\right) dy =$$

$$= \left(\int_{-2}^{+2} y\, dy\right)\int_{-1}^{+1}\left(\frac{2x}{\sqrt{1-x^2}} - 2\right) dy = 0 \cdot \int_{-1}^{+1}\left(\frac{2x}{\sqrt{1-x^2}} - 2\right) dx = 0 //$$

$$\to I_2 = \int_{-2}^{+2} \vec{F}(\vec{r}_1(y)) \cdot \vec{r}_1'(y)\, dy + \int_{-1}^{+1} \vec{F}(\vec{r}_2(x)) \cdot \vec{r}_2'(x)\, dx + \int_{-2}^{+2} \vec{F}(\vec{r}_3(y)) \cdot \vec{r}_3'(y)\, dy +$$

$$+ \int_{-1}^{+1} \vec{F}(\vec{r}_4(x)) \cdot \vec{r}_4'(x)\, dx = \int_{-2}^{+2} (y^2, 1, 1+y^2) \cdot (0, 1, 0)\, dy +$$

$$+ \int_{-1}^{+1} \left(4 + (\sqrt{1-x^2})^2, (\sqrt{1-x^2})^2 + x^2, x^2 + 2^2\right) \cdot \left(-1, 0, -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) dx +$$

$$+ \int_{-2}^{+2} (y^2, 1, 1+y^2) \cdot (0, -1, 0)\, dy +$$

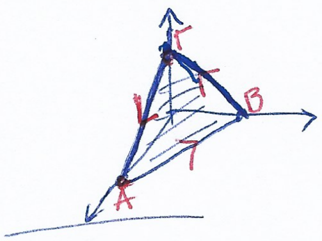
$$+ \int_{-1}^{+1} \left((-2)^2 + (\sqrt{1-x^2})^2, (\sqrt{1-x^2})^2 + x^2, x^2 + (-2)^2\right) \cdot \left(1, 0, -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) dx =$$

$$= \int_{-2}^{+2} 1\, dy + \int_{-1}^{+1} -2x\,\frac{(x^2+4)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx + \int_{-2}^{+2} (-1)\, dy =$$

$$= 4 + \underset{(\text{περιττή})}{0} - 4 = 0 //$$

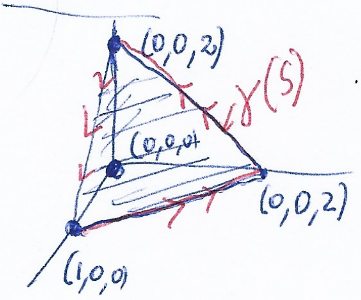
Άρα, ισχύει $I_1 = I_2$ ✓✓

4) Για $\vec{F}(x,y,z)=(y^2+z^2,\ x^2+z^2,\ x^2+y^2)$ και για $S=\{(x,y,z):\ x,y,z\geq 0$ και $x+y+z=1\}$ να επαληθευτεί ο τύπος του Stokes.

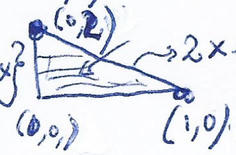


(Κάθετο στην $F(x,y,z)=x+y+z-1=0$ το $(1,1,1)$
$I_1=0=I_2$)

5) Να υπολογιστεί $\oint_{\gamma(S)} xy\,dx+x\,dy+(3+z)\,dz$, όπου η $\gamma(S)$ περίμετρος/σύνορο του τριγώνου με κορυφές τα σημεία $(1,0,0)$, $(0,2,0)$ και $(0,0,2)$. —



- $\vec{F}(x,y,z)=(xy,\ x,\ 3+z)$, $\nabla\times\vec{F}=(0,0,1-x)$
- S : $\vec{r}(x,y)=(x,y,2-2x-y)$ όπου $(x,y)\in D=\{(x,y):\ 0\leq x\leq 1,\ 0\leq y\leq 2-2x\}$



Από τον τύπο του Stokes έχουμε,

$$\oint_{\gamma(S)}\vec{F}\cdot d\vec{\sigma}=\iint_D\left(\nabla\times\vec{F}(\vec{\sigma}(x,y))\right)\cdot(2,1,1)=$$

$\left(f(x,y)=2-2x-y,\ \text{κάθετο το } (-f_x,-f_y,1)\right)$

$$=\int_0^1\left(\int_0^{2-2x}(0,0,1-x)\cdot(2,1,1)\,dy\right)dx=\int_0^1\left(\int_0^{2-2x}(1-x)\,dy\right)dx=$$

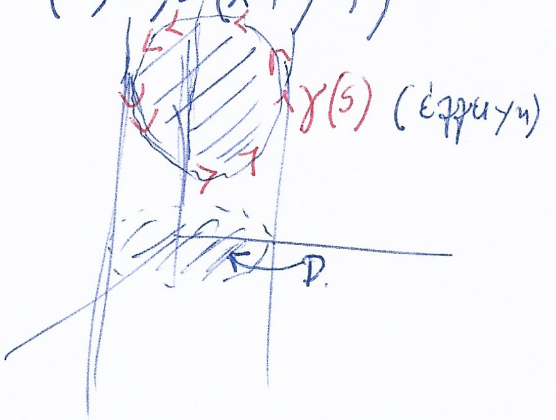
$$=\frac{2}{3}$$

6) Να υπολογιστεί $\oint_{\gamma(S)}-y^3dx+x^3dy-z^3dz$, όπου η $\gamma(S)$ είναι η καμπύλη που προκύπτει από την τομή του κυλίνδρου $x^2+y^2=1$, με το επίπεδο $x+y+z=1$.

• $\vec F(x,y,z)=(-y^3,x^3,-z^3)$, $\nabla\times\vec F=(0,0,3(x^2+y^2))$

• S : $\vec r(x,y)=(x,y,1-x-y)$

$D=\{(x,y): x^2+y^2\le 1\}$



Από τον τύπο του Stokes έχουμε,

$$\oint_{\gamma(S)} \vec F\cdot d\vec\rho = \iint_D (\nabla\times\vec F)(\vec\rho(x,y))\cdot(1,1,1)\,dx\,dy =$$

$(G(x,y,z)=x+y+z-1=0$, κάθετο $\nabla G=(1,1,1))$

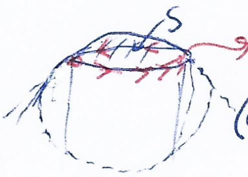
$$=\iint_D 3(x^2+y^2)\,dx\,dy \xrightarrow[\text{συντ.}]{\text{πολικές}} \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 (3r^2)\cdot r\,dr\right)d\theta = \frac{3\pi}{2}$$

---

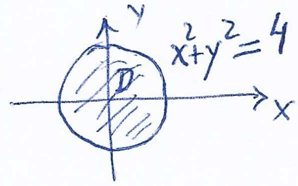
7) Να υπολογισθεί το $\iint_S(\nabla\times\vec F)\cdot d\vec S$, όπου $\vec F(x,y,z)=x^2y^3\vec i+\vec j+\vec k$ όπου S η επιφάνεια του ημισφαιρίου $x^2+y^2+z^2=16$, $z\ge 0$ που αποκόπτεται από τον κύλινδρο $x^2+y^2=4$.

• $\vec F(x,y,z)=(x^2y^3,1,1)$

• $S=\{(x,y,z): x^2+y^2+z^2=16,\ x^2+y^2\le 4,\ z\ge 0\}$



$\gamma(S)$: $\vec\rho(\theta)=(2\cos\theta,2\sin\theta,\sqrt{12})$, $\theta\in[0,2\pi]$



Από τον τύπο του Stokes έχουμε

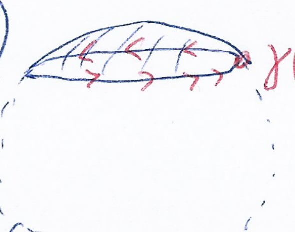
$$\iint_S(\nabla\times\vec F)\cdot d\vec S=\oint_{\gamma(S)}(\vec F\cdot\vec\rho\,')\,d\theta=\int_0^{2\pi}\left((2\cos\theta)^2(2\sin\theta)^3,1,1\right)\cdot(-2\sin\theta,2\cos\theta,0)\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}(-64\cos^2\theta\sin^4\theta+2\cos\theta+0)\,d\theta=-64\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\sin^4\theta\,d\theta$$

$$=-64\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos2\theta}{2}\cdot\left(\frac{1-\cos2\theta}{2}\right)^2=\dots=-\pi$$

8) Να υπολογιστεί το επιφανειακό ολοκλήρωμα του $\nabla\times\vec{F}$, όπου $\vec{F}(x,y,z)=(-yz, xz, xyz)$ στην επιφάνεια S η οποία είναι το μέρος της σφαίρας $x^2+y^2+z^2=13$ με $z\geq 2$.

($\iint_S(\nabla\times\vec{F})\cdot d\vec{S}=36\pi$, όπως το 7), με εύκολο ολοκλ.)



$\gamma(S)$ (στο $z=2$)

---

9) Να υπολογιστεί το $\oint_{\Gamma^+}\vec{F}\cdot d\vec{r}$, όπου $\vec{F}(x,y,z)=(z^3+2xy+e^x, x^2, 3xz^2)$

Γ η καμπύλη $x^{2/3}+y^{2/3}=1$ που βρίσκεται στο επίπεδο $z=1$.

Μήπως το $\vec{F}$ είναι Αστρόβιλο στον $\mathbb{R}^3$;;

$P=z^3+2xy+e^x$, $\quad \frac{\partial P}{\partial y}=2x$, $\frac{\partial P}{\partial z}=3z^2$ $\quad\Big|\quad \frac{\partial P}{\partial y}=2x=\frac{\partial Q}{\partial x}$

$Q=x^2$, $\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=2x$, $\frac{\partial Q}{\partial z}=0$ $\quad\Big|\quad \frac{\partial P}{\partial z}=3z^2=\frac{\partial R}{\partial x}$

$R=3xz^2$, $\quad \frac{\partial R}{\partial x}=3z^2$, $\frac{\partial R}{\partial y}=0$ $\quad\Big|\quad \frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y}=0$

Άρα, $\nabla\times\vec{F}(x,y,z)=(0,0,0)$. Άρα Συντηρητικό, $\oint_{\Gamma^+}\vec{F}\cdot d\vec{r}=0$

(η Γ είναι κλειστή...)

10) Να υπολογιστεί το $\int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$, όπου $\vec{F}(x,y,z)=(2x\,\text{συν}(x^2+y), \text{συν}(x^2+y), z^2)$

όπου Γ : $\vec{r}(t)=(\text{συν}\,t, \text{ημ}\,t, t)$, $t\in[0,4\pi]$.

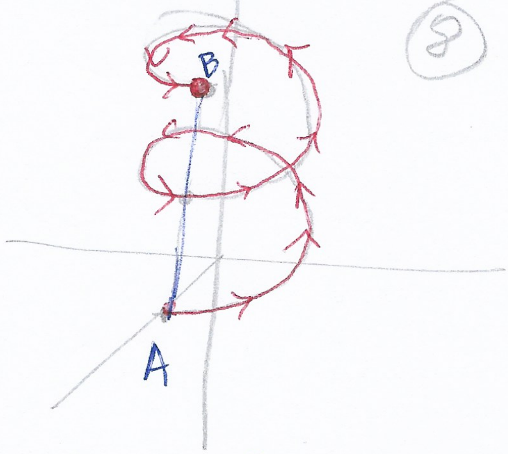
Μήπως το $\vec{F}$ είναι Αστρόβιλο στον $\mathbb{R}^3$; ΝΑΙ, $\nabla\times\vec{F}=(0,0,0)$

Μήπως να βρούμε f, $\vec{F}=\nabla f$; (αφού η Γ <u>ΔΕΝ</u> είναι κλειστή, οπότε θα χρειαστούμε την f)

Εύκολα, $f(x,y,z)=\text{ημ}(x^2+y)+\frac{z^3}{3}$.

$\vec{r}(0)=(1,0,0)$ (το A)

$\vec{r}(4\pi)=(1,0,4\pi)$ (το B)



Άρα, $\int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = f(\vec{r}(4\pi)) - f(\vec{r}(0)) =$

$$= \left(\ln(1^2+0)+\frac{(4\pi)^3}{3}\right) - \left(\ln(1^2+0)+0\right) = \frac{64}{3}\pi^3 \;//$$

---

11) Έστω $\vec{F}(x,y,z) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, z\right)$, $(x,y,z)\in B$, όπου B ο torus/λουκουμάς που δημιουργείται από τον κύκλο του επιπέδου $y=0$, $(x-2)^2+z^2=1$, με περιστροφή γύρω από τον άξονα των z. Να δειχθεί ότι

i) Το $\vec{F}$ έχει $\nabla\times\vec{F}(x,y,z)=(0,0,0)$, για $(x,y,z)\in B$

ii) $\int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} \neq 0$ για κατάλληλη καμπύλη Γ στο εσωτερικό του B, Γ = ΚΛΕΙΣΤΗ. —

Να εξηγήσετε γιατί τα i) και ii) δεν αντιφάσκουν.

i) $P = -\frac{y}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$, $\frac{\partial P}{\partial z}=0$

$Q = \frac{x}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$, $\frac{\partial Q}{\partial z}=0$

$R = z$ $\quad \frac{\partial R}{\partial x}=0$, $\frac{\partial R}{\partial y}=0$

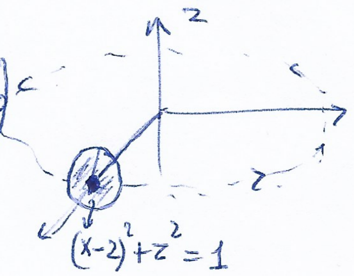
$\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial R}{\partial y}$

Άρα $\nabla\times\vec{F}(\vec{x})=\vec{0}$ για $\vec{x}\in B$.

ii) Η Γ : $\vec{r}(\theta)=(2\sigma\upsilon\nu\theta, 2\eta\mu\theta, 0)$, $\theta\in[0,2\pi]$ είναι στο εσωτερικό του B

$$\oint \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi}\left(-\frac{2\eta\mu\theta}{4}, \frac{2\sigma\upsilon\nu\theta}{4}, 0\right)\cdot(-2\eta\mu\theta, 2\sigma\upsilon\nu\theta, 0)\,d\theta$$

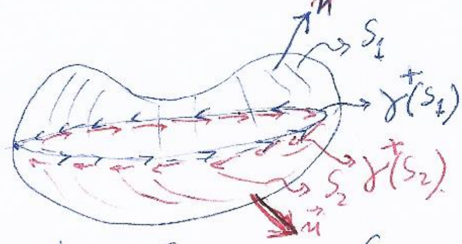
$$= 2\pi \neq 0$$



Το θεώρημα "Αστρόβιλο ⇔ Συντηρητικό" έχει στην υπόθεση ότι η $\vec{F}$ ορίζεται σε Απλά Συνεκτικό Σύνολο. Ο torus δεν είναι.

12) Έστω $\vec{F}$ C^1 διαν. πεδίο και S κλειστή, λεία επιφάνεια στο π.ο. του $\vec{F}$. Να δειχθεί ότι

$$\iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = 0$$



Χωρίζουμε την S σε 2 επιφάνειες S_1, S_2 με κοινό "σύνορο" καμπύλη Γ. Προσανατολίζουμε θετικά την S_1 και την S_2.

$$\left.\begin{aligned} \iint_{S_1} (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} &= \int_{\gamma^+(S_1)} \vec{F} \cdot d\vec{r} \\ \iint_{S_2} (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} &= \int_{\gamma^+(S_2)} \vec{F} \cdot d\vec{r} \end{aligned}\right\} \text{με } \gamma^+(S_1) = -\gamma^+(S_2),$$

Άρα $\displaystyle \iint_S (\nabla \times \vec{F})\, d\vec{S} = \iint_{S_1} (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} + \iint_{S_2} (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = 0$.—