Μάθημα 6ο

21/10/2020

Δεν ξεχνάμε (!!)

$f: A (\subseteq \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$, $\vec{x_0} \in A$

Η $f$ είναι <u>διαφορίσιμη στο $\vec{x_0}$</u>

$\Leftrightarrow \exists\ T_{\vec{x_0}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ΓΡΑΜΜΙΚΗ

με $\lim\limits_{h \to \vec{0}} \dfrac{f(\vec{x_0}+\vec{h}) - f(\vec{x_0}) - T_{\vec{x_0}}(\vec{h})}{\|\vec{h}\|} = 0$

$\Leftrightarrow \exists\ T_{\vec{x_0}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ΓΡΑΜΜΙΚΗ

και $q : B(\vec{0}, \varepsilon) (\subseteq \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$

με $f(\vec{x_0}+\vec{h}) = f(\vec{x_0}) + T_{\vec{x_0}}(\vec{h}) + \|\vec{h}\| q(\vec{h})$, $\|\vec{h}\| < \varepsilon$.

και $\lim q(\vec{h}) = 0 = q(\vec{0})$

$df(\vec{x_0}) = T_{\vec{x_0}}$

Εάν η $f$ είναι διαφορίσιμη στο $x_0$:

→ Η $f$ συνεχής στο $\vec{x_0}$

→ $\exists \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(\vec{x_0} + h\vec{e_i}) - f(\vec{x_0})}{h} := \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x_0}) = df(\vec{x_0})(\vec{e_i})$ $(1 \le i \le n)$

# ΚΡΙΤΗΡΙΑ

(I) $f: A\,(\subseteq \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ και η $f$ συνεχής, $f$ έχει μερικές παραγώγους στο $\vec{x_0}$
$x_0 \in A$

i) Η $f$ είναι διαφορίσιμη στο $\vec{x_0}$

ii) $$\lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \frac{f(\vec{x_0}+\vec{h}) - f(\vec{x_0}) - \nabla f(\vec{x_0})\cdot(\vec{h})}{\|\vec{h}\|} = 0$$

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ (I)

1) $$f_\lambda(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{(x^2+y^2)^\lambda}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$ $\longrightarrow$ προηγούμενο μάθημα

στο $(0,0)$ i) $f_\lambda$ συνεχής $\Leftrightarrow \lambda < 1$

ii) $f_\lambda$ διαφορίσιμη $\Leftrightarrow \lambda < 1/2$

2) $$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{(x^6+y^6)^\lambda}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Να ευρεθούν τα $\lambda \in \mathbb{R}$:

στο $(0,0)$ i) $f_\lambda$ συνεχής

ii) $f_\lambda$ διαφορίσιμη

Υποδ.

(συνεχής $\Leftrightarrow \lambda < \frac{1}{3}$
διαφορ. $\Leftrightarrow \lambda < -1/6$)

{θέτουμε $t$ και κοιτάμε αν $t \to (0,0)$ για τα $x, y$.}
$x \to (0,0)$

3) $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 \cdot e^x - y^3 \cdot e^y}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Λύση

i) $$|f(x,y)| \leq \frac{|x|^3 \cdot e^x + |y|^3 \cdot e^y}{x^2+y^2} = \frac{|x|^3 e^x + |y|^3 e^y}{\|(x,y)\|^2} \leq \frac{\|(x,y)\|^3 e^x + \|(x,y)\|^3 \cdot e^y}{\|(x,y)\|^2}$$

$= \|(x,y)\| \cdot (e^x + e^y) \to 0 \cdot 2 = 0 = f(0,0)$ συνεχής στο $(0,0)$

ii) • $f(x,0) = x \cdot e^x, \quad x \in \mathbb{R}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{d}{dx}\left(xe^x\right)\Big|_{x=0} =$$

$$= \left(e^x + x \cdot e^x\right)\Big|_{x=0} = 1$$

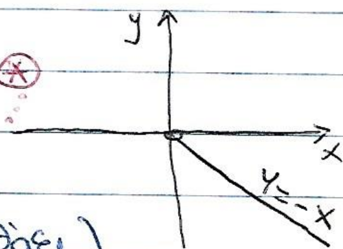
• $f(0,y) = -y \cdot e^y, \quad y \in \mathbb{R}$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = -1$$ (ίδιο με το $x$)

Άρα $\nabla f(0,0) = (1,-1)$

$$q(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left[f(x,y) - f(0,0) - \nabla f(0,0)(x,y)\right] \xrightarrow{\text{πρέπει}} 0$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left[\frac{x^3e^x - y^3e^y}{x^2+y^2} - 0 - (x-y)\right]$$ (*)




παίρνουμε (*) $\left\{\begin{matrix} y=-x \\ x>0 \end{matrix}\right\}$ (το $y=x$ δεν μας βοηθάει γιατί όλα πάνε στο 0)

$$(*) \quad \frac{1}{x\sqrt{2}}\left[\frac{x^3 e^x + x^3 e^{-x}}{2x^2} - 2x\right] =$$

$$= \frac{e^x + e^{-x}}{2\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{2}} \xrightarrow{x \to 0} \frac{1+1}{2\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0$$

Συμπεραίνουμε ότι $\lim_{(x,y)\to(0,0)} q(x,y)$ δεν είναι ίσο με 0 (και ∄ το όριο)

Άρα $f$ δεν είναι διαφορίσιμη στο $(0,0)$

β' τρόπος

$\left( y = ax, \ x>0, \ \underset{a \neq 1}{a \in \mathbb{R}} \rightsquigarrow \nexists \ g(x,y) \text{ δεν έχει όριο στο } (0,0) \right)$

4)* $f(x,y) = \begin{cases} x^2 \cdot ημ\frac{1}{x} + y^2 \cdot ημ\frac{1}{y}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

N.δ.ο.:

i) Η $f$ είναι συνεχής

ii) $\exists \ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \ \forall (x,y)$

Α συνεχείς στο $(0,0)$

iii) Διαφορίσιμη

Λύση

μηδενική επί φραγμένη

i) $|f(x,y)| \leq |x|^2 \cdot ημ\left|\frac{1}{x}\right| + |y|^2 \cdot ημ\left|\frac{1}{y}\right| \leq |x|^2 + |y|^2 \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0 = f(0,0)$

άρα $f$ συνεχής στο $(0,0)$

ii) $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x \, ημ\frac{1}{x} - συν\frac{1}{x}, \quad x \neq 0$

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[ f(h,0) - f(0,0) \right] =$

$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \, h^2 \, ημ\frac{1}{h} =$

$= \lim_{h\to 0} h \cdot ημ\frac{1}{x} = 0$

περιοδική συνάρτηση $\nexists$ το όριο

και $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ δεν υπάρχει (το $\lim_{x\to 0} συν\frac{1}{x}$ δεν υπάρχει)

Άρα $\nexists \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

και $f$ Ασυνεχής στο $(0,0)$.

Το ίδιο συμπέρασμα ισχύει και για $\frac{\partial f}{\partial y}$.

iii) $q(h_1,h_2) = \frac{1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\left[f(h_1,h_2) - f(0,0) - \nabla f(0,0)\cdot(h_1,h_2)\right] =$

από (ii)

$$= \frac{1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\cdot\left[h_1^2\cdot \eta\mu\frac{1}{h_1} + h_2^2\cdot \eta\mu\frac{1}{h_2} - 0 - (0,0)\cdot(h_1,h_2)\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\left[h_1^2\cdot \eta\mu\frac{1}{h_1} + h_2^2\cdot \eta\mu\frac{1}{h_2}\right]$$ πάει στο 0;

$$\leq \frac{h_1^2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\cdot 1 + \frac{h_2^2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\cdot 1 =$$

$$= \sqrt{h_1^2+h_2^2} \xrightarrow[(h_1,h_2)\to(0,0)]{} 0$$

Άρα $\exists\ df(0,0)(x,y) = \nabla f(0,0)(x,y) = (0,0)(x,y) = 0x + 0y$.

5) $g(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\cdot \eta\mu\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ (εμείς)

Ίδια συμπεριφορά με την $f$ της ασκ. 4

6) $f,g : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x_0$ και $y_0$ στο $\mathbb{R}$

Έστω ότι $f'(x_0)$, $g'(x_0)$ υπάρχουν.

Τότε $F(x,y) = f(x) + g(y)$ είναι διαφορ. στο $(x_0,y_0)$

και $dF(x_0,y_0)(x,y) = f'(x_0)x + g'(y_0)\cdot y$

Γ

# ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΚΑΤΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ & ΜΕΓΙΣΤΟΣ-ΕΛΑΧΙΣΤΟΣ ΡΥΘΜΟΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ

μιας $f: A(\subseteq \mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}$ στο $\vec{x}_0 \in A$

Έστω $f: A(\subseteq \mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}$ και $(x_0, y_0) \in A$

Τότε $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ = Ρυθμός μεταβολής της $f$ στο $(x_0, y_0)$ αν την περιορίσουμε στην ευθεία $\boxed{\vec{x}_0 + t(1,0)}$

## ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ

$\vec{\alpha} \in \mathbb{R}^n$, $\|\vec{\alpha}\| = 1$

Εάν $\exists$ $\lim_{t \to 0} \frac{f(\vec{x}_0 + t\vec{\alpha}) - f(\vec{x}_0)}{t} = D_{\vec{\alpha}} f(\vec{x}_0)$ (ή $f_{\vec{\alpha}}$)

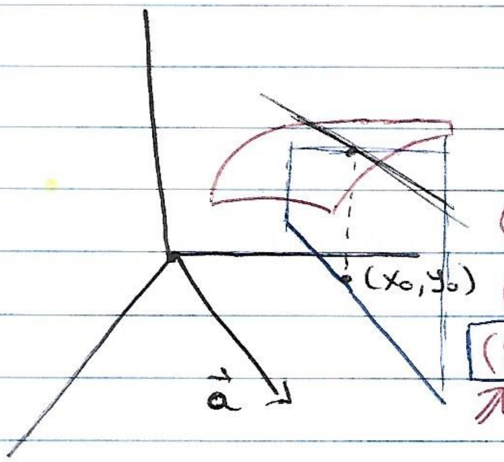
$D_{\vec{\alpha}} f(\vec{x}_0) \rightsquigarrow$ παράγωγος κατά κατεύθυνση $\vec{\alpha}$ ή κατευθυνόμενη παράγωγος (στην κατεύθυνση $\vec{\alpha}$)

$n=2$, $\vec{\alpha} = (a, b)$, $\|\vec{\alpha}\| = 1$

$$D_{\vec{\alpha}} f(x_0, y_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + ta, y_0 + tb) - f(x_0, y_0)}{t}$$

Αν $\vec{\alpha} = \vec{e}_i$, $D_{\vec{e}_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}$

Σχόλιο: Εάν $\exists$ $D_{\vec{\alpha}} f(\vec{x}_0)$ τότε η $g(t) = f(\vec{x}_0 + t\vec{\alpha})$ είναι συνεχής δηλ. ο περιορισμός της $f$ στην ευθεία $\vec{x}_0 + t\vec{\alpha}$ είναι συνεχής στο $\vec{x}_0$.




**Πρόταση:** Εάν η $f$ είναι διαφορ. στο $\vec{x_0}$ και $(df(\vec{x_0}))$ τότε για κατεύθυνση $\vec{a}$,

(i) υπάρχει $D_{\vec{a}} f(\vec{x_0})$

(ii) $D_{\vec{a}} f(\vec{x_0}) = \nabla f(\vec{x_0}) \cdot \vec{a} = df(\vec{x_0})(\vec{a})$

$\boxed{\text{(iii)}}$ Μέγιστη, ελάχιστη μεταβολή της $f$ στο $\vec{x_0}$.

Εάν $\nabla f(\vec{x_0}) \neq 0$ τότε στο $\vec{a_0} = \dfrac{\nabla f(\vec{x_0})}{\|\nabla f(\vec{x_0})\|}$ η $f$ έχει τον μέγιστο Ρυθμό Μεταβολής στο $\vec{x_0}$. Για $\vec{b_0} = -\vec{a_0}$ τον το Ελάχιστο

**Αποδ.**

i), ii) ανάλογα $df(\vec{x_0}) \cdot (\vec{e_i}) = \dfrac{\partial F(\vec{x_0})}{\partial x_i}$

iii) $D_{\vec{a}} f(\vec{x_0}) = \nabla f(\vec{x_0}) \cdot \vec{a} =$

$= \|\nabla f(\vec{x_0})\| \cdot \|\vec{a}\| \cdot \sigma\upsilon\nu\theta$ όπου $\|\vec{a}\| = 1$, $\theta =$ γωνία μεταξύ των $\vec{a}, \nabla f(\vec{x_0})$

?

? ? $\vec{a}$; ώστε η $D_{\vec{a}} f(\vec{x_0}) = \|\nabla f(\vec{x_0})\| \sigma\upsilon\nu\theta$ Μέγιστος ?

? Αν και μόνο αν το συνθ γίνεται Μέγιστο

$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\theta = 1 \Leftrightarrow \exists\, \lambda > 0 : \lambda \cdot \vec{a_0} = \nabla f(\vec{x_0}) \Leftrightarrow$

$\lambda = \|\nabla f(\vec{x_0})\| \Leftrightarrow$

$\vec{a_0} = \dfrac{\nabla f(\vec{x_0})}{\|\nabla f(\vec{x_0})\|}$ → (τα διανύσματα είναι ομόρροπα)

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ ($D_{\vec{a}} f$)

1) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ Ν.Δ.Ο: η $f$

i) ασυνεχής στο $(0,0)$

ii) έχει $D_{\vec{a}} f(0,0)$, $\vec{a}=$ κατεύθυνση

iii) Δεν είναι διαφορίσιμη

Λύση

i) ~~[illegible]~~ $f(x,\sqrt{x}) = \frac{x^2}{x^2+x^2} = \frac{1}{2} \xrightarrow[x>0]{} \frac{1}{2} \neq 0 = f(0,0)$

$\left( \text{ή } \left(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}\right) \to (0,0), \text{ ενώ } f\left(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}\right) \to \frac{1}{2} \neq 0 \right)$

Ασυνεχής στο $(0,0)$

iii) Ασυνεχής $\Rightarrow$ όχι διαφορίσιμη στο $(0,0)$

ii) $\vec{a} = (a,b) \in \mathbb{R}^2$ όπου $a^2+b^2=1$

$$D_{\vec{a}} f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f((0,0)+t(a,b)) - f(0,0)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{f(ta,tb)-0}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left[\frac{ta\cdot t^2\cdot b^2}{t^2a^2+t^4b^4}\right] =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{t^2 a b^2}{t^2a^2+t^4b^4}$$

- Εάν $a=0$, τότε $\lim_{t\to 0} \frac{t^2 \cdot 0 \cdot b^2}{t^2 \cdot 0 + t^4 b^4} = 0$

$\left( (a^2+b^2)=1 \Rightarrow b \neq 0 \right)$

- Εάν $a \neq 0$, $D_{\vec{a}} f(0,0) = \frac{ab^2}{a^2} = \frac{b^2}{a}$

Τελικά $D_{\vec{a}} f(0,0) = \begin{cases} 0, & a=0 \\ \frac{b^2}{a}, & a\neq 0 \end{cases}$ $\quad (\vec{a}=(a,b))$

2) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$ Ν.Δ.Ο.

i) Συνεχής (προηγ. άσκηση)

ii) $D_{\vec{a}} f(0,0)$, $\|\vec{a}\|=1$, $\vec{a}\in\mathbb{R}^2$

iii) Δεν είναι διαφορίσιμη

Λύση $\vec{a}=(a,b)$, $\|\vec{a}\|=1$

ii) $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(ta,tb)-f(0,0)}{t} =$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\cdot\frac{t^3\cdot ab^2}{t^2\underbrace{(a^2+b^2)}_{=1}} = ab^2$$

iii) Ορισμός, $\nabla f(0,0)=(0,0)$ και το κρ. Ι

Αν $\exists\, df(0,0)$ τότε $D_{\vec{a}} f(0,0) = \nabla f(0,0)(a,b)$ για $\vec{a}=(a,b)$, $\|\vec{a}\|$

$ab^2=0$ δεν συμβαίνει $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

3) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{(x^2+y^2)^{1/4}}+x, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

i) Συνεχής και διαφορ.

ii) $D_{\vec{a}} f(0,0)$ με τον ορισμό & με την βοήθεια του $df(0,0)$

ΚΟΜΜΑΤΙ ΠΟΥ ΛΕΙΠΕΙ ΑΠΟ 5ο ΜΑΘΗΜΑ!

(B) ** $f: A(\subseteq \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$, $\vec{x}_0 \in A$

Η $f$ είναι διαφορίσιμη στο $\vec{x}_0 \Leftrightarrow$

$\exists\, T_{\vec{x}_0}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ΓΡΑΜΜΙΚΗ με

$$\lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \frac{f(\vec{x}_0+\vec{h})-f(\vec{x}_0)-T_{\vec{x}_0}(\vec{h})}{\|\vec{h}\|}=0$$

$\Leftrightarrow \exists\, T_{\vec{x}_0}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ ΓΡΑΜΜΙΚΗ και $q: B(\vec{0},\varepsilon)\to\mathbb{R}$
ώστε $f(\vec{x}_0+\vec{h})=f(\vec{x}_0)+T_{\vec{x}_0}(\vec{h})+\|\vec{h}\|\,q(\vec{h})$ και
$q(\vec{h})\to 0 = q(\vec{0})$

Αν υπάρχει η $T_{\vec{x}_0}$, $T_{\vec{x}_0} = df(\vec{x}_0)$ (ή $D_1 f(\vec{x}_0)$)
διαφορικό της $f$ στο $\vec{x}_0$.

Πρόταση

$f: A(\subseteq \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ διαφ. στο $\vec{x}_0$
$df(\vec{x}_0)(\vec{x}) = \vec{a}\cdot\vec{x}$. Τότε ισχύει ότι
$|f(\vec{x}_0+\vec{h}) - f(\vec{x}_0)| \leq \|\vec{h}\|\,(1+\|\vec{a}\|)$ για $\|\vec{h}\|<\delta$

Άρα η $f$ είναι συνεχής στο $\vec{x}_0$

Πρόταση

Έστω $f: A(\subseteq \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ διαφορίσιμη στο $\vec{x}_0$ και
$df(\vec{x}_0)$ το διαφορικό, $df(\vec{x}_0)(\vec{x}) = \vec{a}\cdot\vec{x}$, $\vec{x}\in\mathbb{R}$
Τότε:

i) $\exists\, \delta>0$ ώστε $|f(\vec{x})-f(\vec{x}_0)| \leq (1+\|\vec{a}\|)\|\vec{x}-\vec{x}_0\|$ για $\vec{x}\in A$ με $\|\vec{x}-\vec{x}_0\|<\delta$.

ii) η $f$ συνεχής στο $\vec{x}_0$

Αποδ. i) $f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + df(\vec{x}_0)(\vec{x}-\vec{x}_0) + \|\vec{x}-\vec{x}_0\|\,q(\vec{x}-\vec{x}_0)$ (κοντά στο $\vec{x}_0$)

$\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} q(\vec{x}-\vec{x}_0) = 0 = q(\vec{0})$. Άρα $\exists\, \delta>0: |q(\vec{x}-\vec{x}_0)|<1$, $\vec{x}\in B(\vec{x}_0,\delta)$

$$|f(\vec{x})-f(\vec{x}_0)| \leq |df(\vec{x}_0)(\vec{x}-\vec{x}_0)| + \|\vec{x}-\vec{x}_0\|\cdot 1$$
$$= |\vec{a}\cdot(\vec{x}-\vec{x}_0)| + \|\vec{x}-\vec{x}_0\|$$
$$\overset{C-S}{\leq} \|\vec{a}\|\cdot\|\vec{x}-\vec{x}_0\| + \|\vec{x}-\vec{x}_0\| = (1+\|\vec{a}\|)\|\vec{x}-\vec{x}_0\|$$
για $x\in A$, $\|\vec{x}-\vec{x}_0\|<\delta$

ii) Από την (i)