Μάθημα 7ο

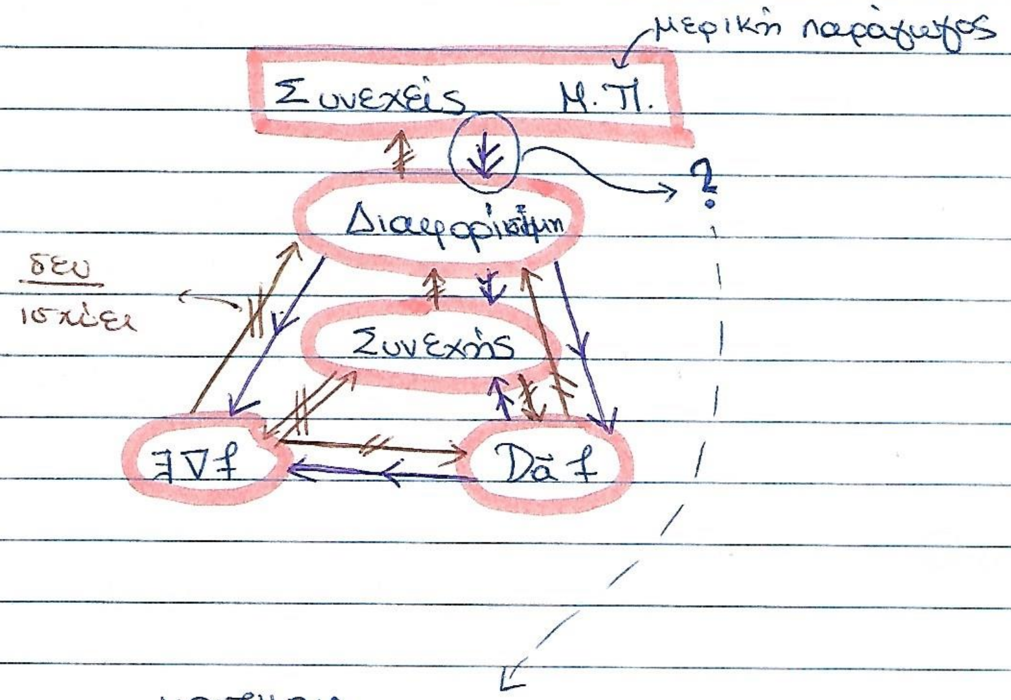
23/10/2020

Δεν γελιάμε!

$f: A(\subseteq \mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}$, $\vec{x}_0 \in A$ $\quad (n \geq 2)$

f διαφορ στο $\vec{x}_0 \Leftrightarrow \exists\ T_{\vec{x}_0}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ΓΡΑΜΜΙΚΗ

με $\displaystyle \lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \frac{f(\vec{x}_0+\vec{h}) - f(\vec{x}_0) - T_{\vec{x}_0}(\vec{x})}{\|\vec{h}\|} = 0$



ΚΡΙΤΗΡΙΑ

(I) Εάν $f: A(\subseteq \mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}$, $\vec{x}_0 \in A$

και υπάρχει το $\nabla f(\vec{x}_0)$

ΚΑΙ $\displaystyle \lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \frac{f(\vec{x}_0+\vec{h}) - f(\vec{x}_0) - \nabla f(\vec{x}_0)\cdot \vec{h}}{\|\vec{h}\|} = 0$

Τότε $\exists\ df(\vec{x}_0): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$(df(\vec{x}_0)(\vec{x}) = \nabla f(\vec{x}_0)\cdot \vec{x},\ \vec{x}\in\mathbb{R}^n)$

↳ είναι μια γραμμική απεικόνιση

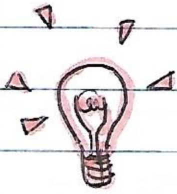
(Για δίκλαδες κυρίως)

(II) $f: A(\subseteq \mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}$ $(n \geq 2)$ και $\vec{x}_0 \in A$

i) Υπάρχουν όλες οι $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x})$ $(i=1,\dots,n)$ για κάθε $\vec{x}\in B(\vec{x}_0, r)\ (\subseteq A)$

ii) Οι $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x})$ $(i=1,\dots,n)$ είναι συνεχής στο $\vec{x}_0$

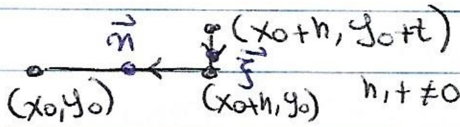
Τότε η f είναι διαφορίσιμη στο $\vec{x}_0$. $(df(\vec{x}_0)(\vec{\omega}) = \nabla f(\vec{x}_0)\cdot(\vec{\omega}),\ \vec{\omega}\in\mathbb{R}^n)$



ΙΔΕΑ ΑΠΟΔΕΙΞΗΣ

Ξέραμε ΘΜΤ για μια μεταβλητή και το χρησιμοποιούμε

(Αποδ.) Για $n=2$



$h, t \neq 0$

ΘΜΤ
$$\begin{cases} f(x_0+h, y_0+t) - f(x_0+h, y_0) = \\ = t \cdot \dfrac{\partial f(\vec{\xi})}{\partial y} \quad \text{για κάποιο } \vec{\xi} = \vec{\xi}(h,t) \xrightarrow[(0,0)]{} (x_0, y_0) \end{cases} \quad (1)$$

$$\cancel{q(h,t) = \frac{\quad}{\sqrt{h^2+t^2}}\Big[}$$

ΘΜΤ
$$\begin{cases} f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0) = \\ = \dfrac{h \cdot \partial f(\vec{n})}{\partial x}, \quad \vec{n} = \vec{n}(h) \to (x_0, y_0) \end{cases} \quad (2)$$

$$q(h,t) = \frac{1}{\sqrt{h^2+t^2}} \left[f(x_0+h, y_0+t) - f(x_0, y_0) - \left(\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} h + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} t \right) \right]$$

$$\overset{(1)+(2)}{=} \frac{1}{\sqrt{h^2+t^2}} \left[h \cdot \frac{\partial f(\vec{n})}{\partial x} + \frac{t \cdot \partial f(\vec{\xi})}{\partial y} - \frac{h \cdot \partial f(x_0, y_0)}{\partial x} - \frac{t \cdot \partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \right]$$

$$= \frac{h}{\sqrt{h^2+t^2}} \underbrace{\left[\frac{\partial f(\vec{n})}{\partial x} - \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \right]}_{0 \text{ (συνεχ. Μ.Π)}} + \frac{t}{\sqrt{h^2+t^2}} \underbrace{\left[\frac{\partial f(\vec{\xi})}{\partial y} - \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \right]}_{0} \quad (3)$$

$$\left| \frac{h}{\sqrt{h^2+t^2}} \right|, \frac{|t|}{\sqrt{h^2+t^2}} \leq 1$$

Άρα όλη η παράσταση $(3) \xrightarrow[(h,t)\to(0,0)]{} 0$ και άρα ΚΡ(Ι) $\exists\, df(x_0, y_0)$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΡ ΙΙ

1) $f(x,y,z) = x^2 + 4y^2 + 9z^2$

i) Ν.δ.ο. f διαφορίσιμη στον $\mathbb{R}^3$

ii) $D_{\vec{a}} f(2,1,-1)$, $\vec{a}_0$; ώστε η f να έχει Μέγιστη αύξηση

Λύση

i) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 2x$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 8y$

$\dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 18z$ σχέση *

Συνεχείς στον $\mathbb{R}^3$

Από ΚΡ ΙΙ, η f διαφορ. στον $\mathbb{R}^3$

ii) $\|\vec{a}\|=1$, $\vec{a}=(\alpha,\beta,\gamma)$

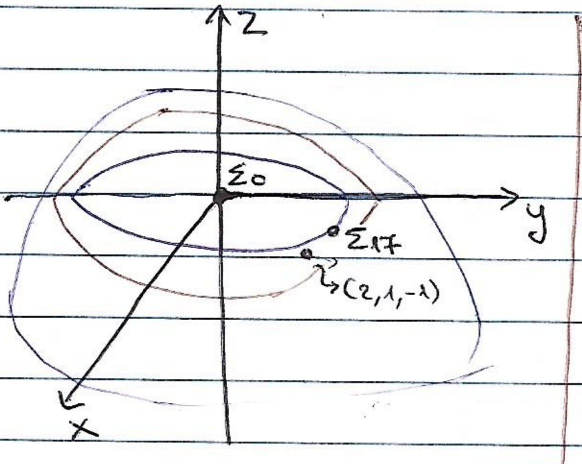
$D_{\vec{a}} f(2,1,-1) = \nabla f(2,1,-1)\circ(\alpha,\beta,\gamma)$

από σχέση *

$= (2\cdot 2, 8\cdot 1, -18)\circ(\alpha,\beta,\gamma) =$

$= 4\alpha + 8\beta - 18\gamma$

$\vec{a_0}$ μέγιστη αύξηση, $\vec{a_0} = \dfrac{(4,8,-18)}{\sqrt{4^2+8^2+18^2}} = \dfrac{\nabla f(2,1,-1)}{\|\nabla f(2,1,-1)\|}$



2) $f(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$

i) $df(1,-1)$

ii) καμπύλη στάθμης S_c ώστε $(1,-1)\in S_c$

iii) $D_{(\alpha,\beta)}(1,-1)$, $\|(\alpha,\beta)\|=1$

Πότε έχουμε τη Μέγιστη Αύξηση;

Λύση

$(x,y)\neq(0,0)$

i) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{y}{x^2+y^2}$

Συνεχείς στο $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$

Άρα $\exists\ df(1,-1)$

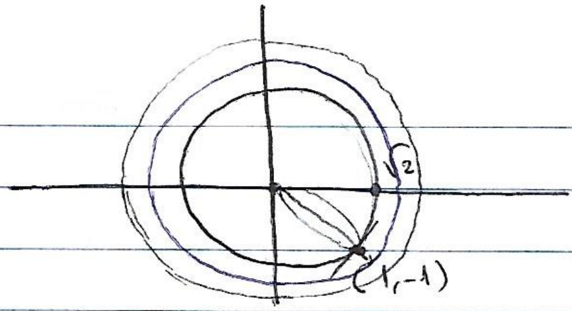
$df(1,-1)(h,t) = \nabla f(1,-1)\circ(h,t) =$

$= \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)(h,t) =$

$= \frac{1}{2}(h-t)$

ii) $c_;$ $\ln\sqrt{x^2+y^2}=c$

$(1,-1)\in S_c$ $\boxed{\ln\sqrt{2}=c}$



$\ln\sqrt{x^2+y^2}=c,\ \{(x,y):\ \ln\sqrt{x^2+y^2}=c=\ln\sqrt{2}\}$

iii) $D_{(a,\beta)}(1,-1)=df(1,-1)(a,\beta)=\frac{1}{2}(a-\beta)$

$\vec{a_0}=(a_0,\beta_0)$, $\vec{a_0}=\frac{\nabla f(1,-1)}{\|\nabla f(1,-1)\|}$ ⇝ Μέγιστη Μεταβολή

$$\vec{a_0}=\frac{\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)}{\underbrace{\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}}_{=\frac{\sqrt{2}}{2}}}=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{2}{\sqrt{2}}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

3) Αν $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{(5+\eta\mu x)^{e^y}-\gamma-ax-\beta y}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$ Να υπολ. οι τιμές των a,β,γ

<u>Λύση</u>

$f(x,y)=(5+\eta\mu x)^{e^y}$

($ax+\beta y+\gamma$ γραμμική μόνη σ. που προσεγγίζει διαφ. συνάρτ. είναι το διαφορικό της)

Έχει συν. Μ.Π. $\Rightarrow \exists\ df(x_0,y_0):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$

$\boxed{\gamma=f(0,0)=5}$

$a=\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, $\beta=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ → $\frac{\partial f(0,0)}{\partial y}=5\ln5$

$f(x,0)=5+\eta\mu x$, $f(0,y)=5^{e^y}$

άρα $\boxed{\beta=5\ln5}$

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\sigma\upsilon\nu 0=1$, άρα $\boxed{a=1}$

4) Αν $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{e^{x\sigma\upsilon\nu y}-\gamma-ax-\beta y}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$ να υπολ. οι τιμές των a,β,γ

$(a=1,\ \beta=0,\ \gamma=1)$

5) $\lim\limits_{(3,1,2)}\frac{(x-y)^2-ax-\beta y-\gamma z-\delta}{(x-3)^2+(y-1)^2+(z-2)^2}=0$ Να υπολ. τα a,β,γ,δ

$(a=4,\ \beta=-4,\ \gamma=0,\ \delta=4)$

**

(A) ## ΔΙΑΦΟΡΙΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

$\vec{f} = (f_1, f_2, \dots, f_m) : A\,(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^m$, $(n \geq 1,\ m \geq 2)$

$\vec{x_0} \in A$

ΓΡΑΜΜΙΚΗ!

Η $\vec{f}$ διαφορ. στο $\vec{x_0} \Leftrightarrow \exists\ \vec{T} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

με $\lim\limits_{\vec{h} \to \vec{0}} \dfrac{\vec{f}(\vec{x_0}+\vec{h}) - \vec{f}(\vec{x_0}) - \vec{T}(\vec{h})}{\|\vec{h}\|} = \vec{0}$

$\vec{T} = d\vec{f}(\vec{x_0}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, γραμμική

Ισοδύναμο

$\vec{f}$ διαφ. στο $\vec{x_0} \Leftrightarrow f_1, f_2, \dots, f_m : A(\subseteq \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ είναι διαφ. στο $\vec{x_0}$

$d\vec{f}(\vec{x_0}) = (df_1, df_2, \dots, df_m)(\vec{x_0})$

$$d\vec{f}(\vec{x_0})(\vec{h}) = \left(\sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f_1(\vec{x_0})}{\partial x_i}, \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f_2(\vec{x_0})}{\partial x_i}, \dots, \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f_m(\vec{x_0})}{\partial x_i} \right)$$

$\vec{h} = (h_1, \dots, h_n)$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} (\vec{x_0}) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$$

Ο πίνακας για $n, m \geq 2$ καλείται πίνακας Jacobi της $\vec{f}$ στο $\vec{x_0}$.

ΣΥΝΟΨΗ

$f : A(\subseteq \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^m$ $(n, m \geq 1)$

Διαφ. στο $\vec{x_0} \in A$

- $n = m = 1$, $df(x_0)(x) = f'(x_0)\,x$, $x \in \mathbb{R}$
  Πίνακας της γρ. συν. $df(x_0) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι $(f'(x_0))$

- $n = 1,\ m \geq 2$, $\vec{r} : (a, b) \to \mathbb{R}^m$ διαφ. Πίνακας που αντιστοιχεί στο $\vec{r}(t_0)$ είναι

Αν $\vec{r}(t) = (r_1(t), \dots, r_m(t))$ $\begin{pmatrix} r_1'(t) \\ \vdots \\ r_m'(t) \end{pmatrix}$

Λέμε ότι η $\vec{r}$ είναι παρ. στο $t_0 \in (a,b)$

$$\iff \exists \lim_{h\to 0} \frac{\vec{r}(t_0+h)-\vec{r}(t_0)}{h} = \vec{r}\,'(t_0)$$

$\vec{r}\,'(t_0)$ = η Παρ. της $\vec{r}$ στο t_0

$$\vec{r}\,'(t_0) = \left(r_1'(t_0), r_2'(t_0), \dots, r_m'(t_0)\right)$$

- $n \geq 2$, $m=1$ $f: A(\subseteq \mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}$, διαφορ. στο $\vec{x}_0$

$$df(\vec{x}_0)(\vec{h}) = \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial x_n}\right)\begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$$

$\vec{h} = (h_1, h_2, \dots, h_n)$

Ο πίνακας του $df(\vec{x}_0)$ είναι το $\nabla f(\vec{x}_0)$

ΠΙΝΑΚΑΣ $d\vec{f}(\vec{x}_0)$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
Ο πίνακας του $df(x_0)$ είναι ο $(f'(x_0))$

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $n \geq 2$
Ο πίνακας του $df(\vec{x}_0)$ είναι το $\nabla f(\vec{x}_0)$

$\vec{r}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$, $m \geq 2$
Ο πίνακας του $d\vec{r}(t_0)$ είναι το $(\vec{r}\,'(t_0))^{\perp}$

$\vec{f}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $m \geq 2$
Ο πίνακας του $d\vec{f}(\vec{x}_0)$ είναι ο πίνακας Jacobi

Σχόλιο: Οι έννοιες Παραγώγιση και Διαφόριση, ταυτίζονται ΜΟΝΟΝ
- ΠΡ. ΣΥΝ. μιας μεταβλ.
- ΔΙΑΝ. ΣΥΝ. » »

Κεφ. 5

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Κανόνας της Αλυσίδος / Αλυσιδωτή Παραγώγιση / Διαφ. σύνθεσης 2 συναρτήσεων

θ. Μέσης Τιμής Δ.Λ.

(βλ. θ. ενδιαμέσων τιμών)

θ. Αντιστρόφου

θ. Πεπλεγμένης Συνάρτησης

Εφ. Ευθεία, εφ. Επίπεδο