1) ΟΡΙΣΜΟΙ πολύ καλά (σκεφτόμαστε)
2) ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Σχόλια

i) Ισχύει και το αντίστροφο. Αν $\nabla f(\vec{x})\circ\vec{x} = a f(\vec{x})$
$\Rightarrow$ η f = ομογενής a- τάξης

ii) Οι συναρτήσεις της ασκ. 4 είναι ομογενής 0- τάξης

$$f(tx,ty) = f\left(\frac{tx}{ty}\right) = f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x,y)$$

$$f(tx,ty) = t^0 \cdot f(x,y)$$

Μάθημα 9
30/10/2020

1) ΘΜΤ για 1 μεταβλητή

$F:(\gamma,\delta)\to\mathbb{R}$, F = παραγωγίσιμη/διαφορίσιμη

Έστω $a,b\in(\gamma,\delta)$, $a\neq b$

Τότε $\exists$ $z_0\in(\gamma,\delta)$: $F(b)-F(a) = F'(z_0)(b-a) = dF(z_0)(b-a)$

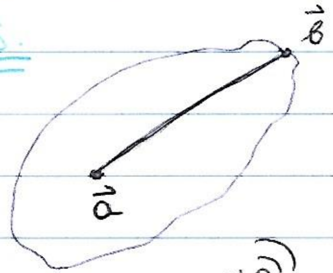
2) ΘΜΤ για πραγματική συνάρτηση πολλών μεταβλητών

$f: A(\subseteq\mathbb{R}^n)\to\mathbb{R}$, f = διαφορίσιμη

Έστω $\vec{a},\vec{b}\in A$ με $[\vec{a},\vec{b}]\subseteq A$

Τότε $\exists$ $z_0\in A\setminus\{\vec{a},\vec{b}\}$: $f(\vec{b})-f(\vec{a}) = df(\vec{z_0})(\vec{b}-\vec{a}) =$
$= \nabla f(\vec{z_0})\circ(\vec{b}-\vec{a})$

Αποδ.



$[\vec{a},\vec{b}] = \{\vec{x}\in\mathbb{R}^n : \vec{x} = \vec{a}+t(\vec{b}-\vec{a}),\ t\in[0,1]\}$

$\vec{r}(t) = \vec{a}+t(\vec{b}-\vec{a})$, $t\in[0,1]$

$\vec{r}(0)=\vec{a}$
$\vec{r}(1)=\vec{b}$
$\vec{r}\,'(t)=\vec{b}-\vec{a}$

$F = f\circ\vec{r}: [0,1]\to\mathbb{R}$
διαφορίσιμη
παραγωγίσιμη

$F(0) = f(\vec{r}(0)) = f(\vec{a})$

$F(1) = f(\vec{r}(1)) = f(\vec{b})$

$F'(t) \underset{\text{αλυσίδας}}{\overset{\text{κανόνας}}{=\!=}} \nabla f(\vec{r}(t))\circ\vec{r}\,'(t)$

Από ΘΜΤ (1), $\exists$ $t_0\in(0,1)$: $F(1)-F(0) = F'(t_0)\cdot(1-0)$

$\hookrightarrow \quad f(\vec{b}) - f(\vec{a}) = \nabla f(\vec{r}(t_0)) \circ (\vec{b} - \vec{a})$

$\vec{z}_0 = \vec{r}(t_0) \quad , \quad \vec{z}_0 \in [\vec{a}, \vec{b}] \setminus \{\vec{a}, \vec{b}\}$

Σχόλια

1) Δεν υπάρχουν κανόνες L'Hospital για συναρτήσεις πολλών Μεταβλητών

- $n=1$, οι κανόνες l'hospital βασίζονταν στο Γενικευμένο ΘΜΤ. Δηλ. αν $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$, $g(b) \neq g(a)$ και f, g παραγωγίσιμες, τότε $\exists \xi$:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)(b-a)}{g'(\xi)(b-a)}$$

← γίνεται απλοποίηση του $(b-a)$

- $f, g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $n \geq 2$, $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{a} \neq \vec{b}$, $g(\vec{b}) \neq g(\vec{a})$

$$\frac{f(\vec{b}) - f(\vec{a})}{g(\vec{b}) - g(\vec{a})} = \frac{\nabla f(\vec{z}_0)(\vec{b} - \vec{a})}{\nabla g(\vec{z}_0)(\vec{b} - \vec{a})}$$

← ΔΕΝ γίνεται απλοποίηση του $(\vec{b} - \vec{a})$

2) **ΔΕΝ** ισχύει ΘΜΤ για $\vec{r}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, για $n \geq 2$

- π.χ. $\vec{r}(t) = (\text{συν}t, \text{ημ}t)$, $t \in \mathbb{R}$

Τότε έχουμε $\vec{r}(0) = (1, 0)$

$\vec{r}(2\pi) = (1, 0)$

$\vec{r}\,'(t) = (-\text{ημ}t, \text{συν}t)$

$(2\pi - 0)$

Δεν υπάρχει $t_0 \in (0, 2\pi)$ με $\vec{r}(2\pi) - \vec{r}(0) = r'(t_0) \cdot 2\pi$

διότι $(0,0) \neq (-\text{ημ}t, \text{συν}t)$, $t \in \mathbb{R}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) $f: A (\subseteq \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$, A = ανοικτό, f = διαφορίσιμη

Υποθέτουμε ότι το A είναι ΚΥΡΤΟ (δηλ. $\forall \vec{a}, \vec{b} \in A$ με $\vec{a} \neq \vec{b}$, το $[\vec{a}, \vec{b}] \subseteq A$) π.χ.

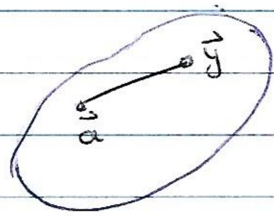
όχι κυρτά:

Εάν $\nabla f(\vec{x})=\vec{0}$, $\vec{x}\in A$, τότε ν.δ.ο. $f=$σταθερή

Λύση

Σταθεροποιούμε $\vec{a}\in A$

Έστω τυχαίο $\vec{y}\in A$, $\vec{y}\neq\vec{a}$



Τότε $[\vec{a},\vec{y}]\subseteq A$

ΘΜΤ, $\exists\ \vec{x}_0\in A$, $f(\vec{y})-f(\vec{a})\overset{ΘΜΤ}{=}\nabla f(\vec{x}_0)\cdot(\vec{y}-\vec{a})=0$

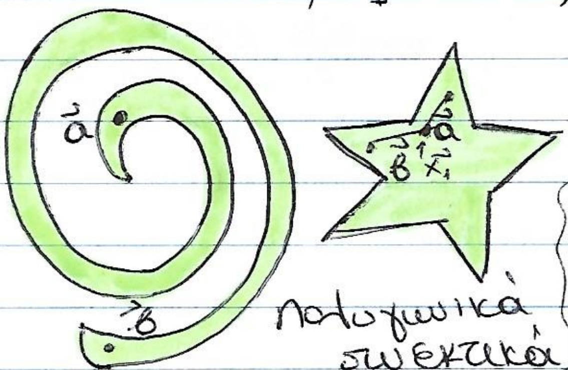
Άρα $f(\vec{y})=f(\vec{a})$, $\vec{y}\in A$

② $f: A(\subseteq\mathbb{R}^n)\longrightarrow\mathbb{R}$, $A=$ανοικτό, $f=$ διαφορίσιμη.

Υποθέτουμε ότι το A είναι Πολυγωνικά Συνεκτικό

δηλ. για $\vec{a},\vec{b}\in A$, $\vec{a}\neq\vec{b}$ $\exists$ πολυγωνική γραμμή του A, που τα ενώνει.

$[a,x_1]\cup[x_1,x_2]\cup\cdots\cup[x_k,\vec{b}]\subseteq A$



πολυγωνικά συνεκτικά

Εάν $\nabla f(\vec{x})=\vec{0}$, $\vec{x}\in A$

τότε $f=$ σταθερή

• $\vec{a}\in A$

$\vec{y}\in A$, $\vec{y}\neq\vec{a}$

ΘΜΤ στο $[a,x_1]$

$f(\vec{x}_1)=f(\vec{a})$

ΘΜΤ στο $[x_1,x_2]$

$f(\vec{x}_2)=f(\vec{x}_1)=f(\vec{a})(\cdots)$ Τελικά $f(\vec{y})=f(\vec{a})$

και άρα η f είναι σταθερή

③ Έστω $f,g: A\overset{(\subseteq\mathbb{R}^n)}{\longrightarrow}\mathbb{R}$ διαφορίσιμες και $A=$ανοικτό & πολυγωνικά συνεκτικό

Εάν $\nabla f(\vec{x})=\nabla g(\vec{x})$, για $\vec{x}\in A$, τότε ν.δ.ο. $f=g+c$.

Λύση

$\nabla\cdot(f-g)(\vec{x})=\vec{0}$, $\vec{x}\in A.\ \overset{Ασκ.}{\underset{2}{\Longrightarrow}}\ f-g=c$ στο A

Παρατήρηση! $\overset{\text{διαφορ.}}{\vec{F}}: A(\subseteq \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$, συντηρητικό δ.π.

δηλ. $\exists\, f: A(\subseteq \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ διαφορίσιμη με $\vec{F} = \nabla f$

A = ανοικτό & πολυγωνικά συνεκτικό, τότε η f είναι "μοναδική" με την εξής έννοια: Αν $\vec{F} = \nabla g$ τότε $g = f + c$

(4) $f: A(\subseteq \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ διαφορίσιμη και οι Μερ. Παρ. αυτής, $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ $i = 1, \dots, n$ είναι φραγμένες.

A = ανοικτό και κυρτό

Τότε $\exists\, M > 0 : |f(\vec{x}) - f(\vec{y})| \leq M \cdot \|\vec{x} - \vec{y}\|$, $\vec{x}, \vec{y} \in A$

(δηλ. η f είναι L-συνεχής)

Λύση

Θεωρούμε $\vec{x}, \vec{y} \in A$, $\vec{x} \neq \vec{y}$

$[\vec{x}, \vec{y}] \subseteq A$ (A = κυρτό)

εξάρτηση από $\vec{x}, \vec{y}$

Τότε $\exists\, \vec{z} \in A : |f(\vec{x}) - f(\vec{y})| \overset{\text{ΘΜΤ}}{=} |\nabla f(\vec{z}_{0(\vec{x},\vec{y})}) \cdot (\vec{x} - \vec{y})|$

$$\overset{\text{C-S}}{\leq} \|\nabla f(\vec{z}_{(\vec{x},\vec{y})})\| \cdot \|\vec{x} - \vec{y}\| \leq$$

$$\overset{\text{υποθ.}}{\leq} M \|\vec{x} - \vec{y}\|$$

(B) ΘΕΩΡΗΜΑ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

1) Έχουμε 1 εξίσωση (1ου βαθμού) με 1 άγνωστο

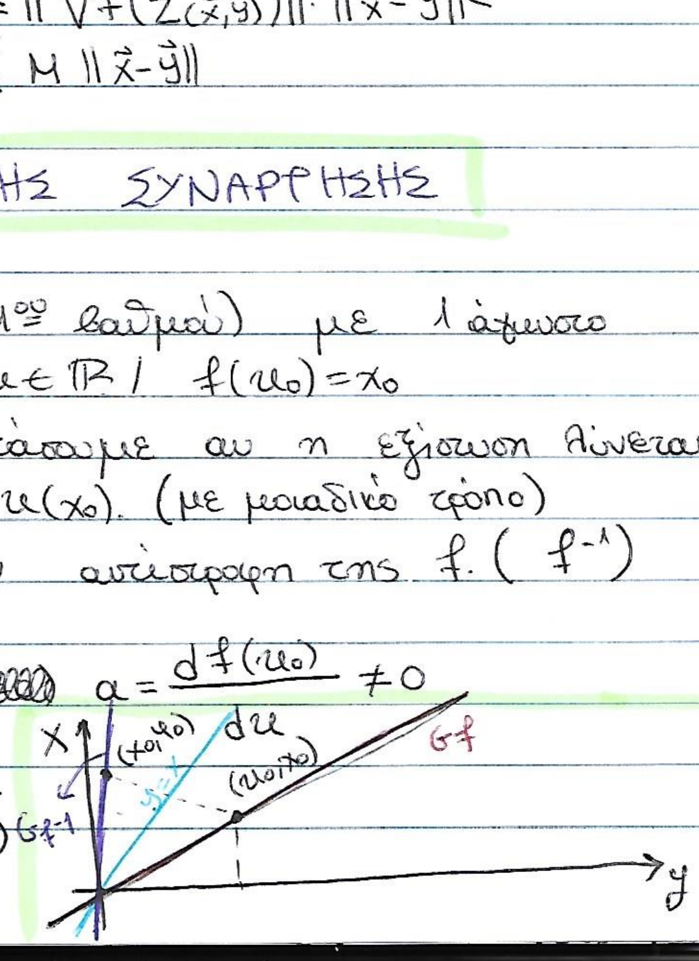
$x = f(u) = a(u - u_0) + x_0$, $u \in \mathbb{R}$ / $f(u_0) = x_0$

Το ζητούμενο: Να εξετάσουμε αν η εξίσωση λύνεται ως προς $u = u(x)$, $u_0 = u(x_0)$. (με μοναδικό τρόπο)

Δηλ. ζητάμε να βρούμε την αντίστροφη της f. (f^{-1})

Λύνεται (μοναδικά) $\iff$ $a = \frac{df(u_0)}{du} \neq 0$

Τότε $(f^{-1})'_{f(u_0) = x_0} = \frac{1}{f'(u_0)}$



C^1

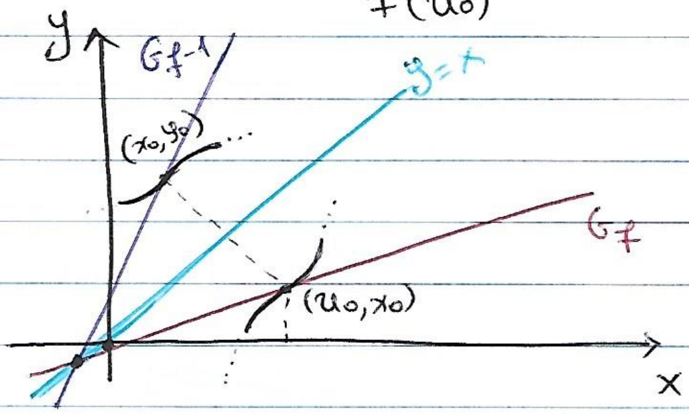
1) Έστω 1 εξίσωση με 1 άγνωστο

$x = f(u)$, $x_0 = f(u_0)$ $\qquad f = C^1$

ΘΕΩΡΗΜΑ ΑΝΤΙΣΤΡ. ΣΥΝΑΡΤ.

Εάν $f'(u_0) \neq 0 \Rightarrow \exists\, f^{-1} : (x_0-\varepsilon,\ x_0+\varepsilon) \rightarrow (u_0-\delta,\ u_0+\delta)$ επί και C^1

και $(f^{-1})'(x_0) = \dfrac{1}{f'(u_0)}$



C^2

2) Έστω σύστημα 2 εξισώσεων (1ου βαθμού) με 2 αγνώστους

$$x = a_1(u-u_0)+a_2(v-v_0)+x_0 = f_1(u,v)$$
$$y = b_1(u-u_0)+b_2(v-v_0)+y_0 = f_2(u,v)$$

$$\vec{F} = (f_1, f_2) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$
$$\vec{F}(u_0,v_0) = (x_0, y_0)$$

Το ζητούμενο: Να εξετάσουμε αν το σύστημα λύνεται ως προς $u=u(x,y)$ και $v=v(x,y)$ (κατά μοναδικό τρόπο) δηλ. να βρούμε την $\vec{F}^{-1}$

Λύνεται (μοναδικά) $\Leftrightarrow \det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \neq 0.$

$\Leftrightarrow \det\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v} \end{pmatrix}(u,v)$

(Θέλαμε f_1, f_2 να μην έχουν γραμμική εξάρτηση)

$\Longleftrightarrow \det J_{\vec F}(u,v) \neq 0$

$J_{\vec F^{-1}}(x_0,y_0) = \left(J_{\vec F}(u_0,v_0)\right)^{-1}$

2') Έστω 2 εξισώσεις με 2 αγνώστους

$x = f_1(u,v)$ $\quad \vec F(u,v) = (f_1, f_2)(u,v)$, $\vec F(u_0,v_0) = (x_0,y_0)$

$y = f_2(u,v)$

<u>Το ζητούμενο</u>: Να εξετάσουμε αν το σύστημα λύνεται κατά C^1-τρόπο (f_1, f_2 C^1)

δηλ. να βρούμε την $\vec F^{-1}$

(Ανάλογα για σύστημα 3 εξισώσεων με 3 αγνώστους)

ΘΕΩΡΗΜΑ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

(I) $f: A(\subseteq \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, A = ανοικτό

$x_0 \in A$, $f(x_0) = y_0$, f είναι C^1

1) Αν $f'(x_0) \neq 0$ τότε i) $\exists$ $U, V \subseteq \mathbb{R}$ <u>ανοικτά</u> με $x_0 \in U$, $y_0 \in V$ και η $f: U \to V$, 1-1 και <u>επί</u>

ii) $\exists$ $f^{-1}: V \to U$, C^1

$(f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$, $x \in U$

2) Αν $f'(x_0) = 0$ η f <u>δεν</u> αντιστρέφεται κατά C^1 τρόπο (αν αντιστρέφεται)

(II) $\vec f: A(\subseteq \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$, A = ανοικτό

$\vec x_0 \in A$, $\vec f(\vec x_0) = \vec y_0$, $\vec f$ C^1

- Αν $\det J_{\vec f}(\vec x_0) \neq 0$ τότε,

i) $\exists$ $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ <u>ανοικτά</u> με $x_0 \in U$, $y_0 \in V$ και $\vec f: U \to V$, 1-1 και επί

ii) $\exists$ $\vec f^{-1}: V \to U$ C^1 και $J_{\vec f^{-1}}(y) = \left(J_{\vec f}(x)\right)^{-1}$, $x \in U$

- Αν $\det J_{\vec f}(\vec x_0) = 0$ η $\vec f$ <u>δεν</u> αντιστρέφεται κατά C^1 τρόπο (αν αντιστρέφεται)

Παρατήρηση $\vec{f}(u,v)=(e^u \text{συν}v, e^u \text{ημ}v)$, $(u,v)\in\mathbb{R}^2$

C^1, $\det J_{\vec{f}}(u,v)=\det\begin{pmatrix} e^u \text{συν}v & -e^u \text{ημ}v \\ e^u \text{ημ}v & e^u \text{συν}v \end{pmatrix}=$

$= e^{2u}\neq 0,\ u\in\mathbb{R}$ όμως $\vec{f}$ C^1 άρα από

(<=) Θ.Α.Σ Η $\vec{f}$ αντιστρέφεται τοπικά σε $(u_0,v_0)\in\mathbb{R}^2$.

Όχι ολική (;) $\vec{f}$ δεν είναι 1-1 (!)

$\vec{f}(u,0)=\vec{f}(u,2k\pi)$, $u\in\mathbb{R}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) $\vec{f}(\rho,\varphi)=(\rho\,\text{συν}\varphi, \rho\,\text{ημ}\varphi)$, $\rho>0$, $\varphi\in\mathbb{R}$

Να αποδ. ότι η $\vec{f}$ αντιστρέφεται τοπικά, στο (ρ_0,φ_0) όχι ολικά στο $(0,+\infty)\times\mathbb{R}$

2) $\vec{F}(x,y)=\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, \frac{xy}{x^2+y^2}\right)$ $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$

Υπάρχουν σημεία $(x_0,y_0)\neq(0,0)$ ώστε η $\vec{F}$ να αντιστρέφεται τοπικά;

3)** $\begin{cases} x=u^3+u^2v \\ y=u^4v+2uv \end{cases}$

1) ΝΔΟ $\exists$ $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$ αν $(x,y)\in$ Περιοχή $(2,3)$ και $(u,v)\in$ Περιοχή $(1,1)$

2) Να υπολ. $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ στο $(1,1)$

Λύση

$\vec{F}(u,v)=(u^3+u^2v, u^4v+2uv)$

$\vec{F}(1,1)=(2,3)$

$\det J_{\vec{F}}(1,1)=\det\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 3\end{vmatrix}\neq 0$, Άρα $\exists$ $\vec{F}^{-1}$, C_1.

$J_{\vec{F}^{-1}}(2,3)=\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{pmatrix}_{(2,3)} = \left(J_{\vec{F}}(1,1)\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 3\end{pmatrix}^{-1} = \rightsquigarrow$

$\Longrightarrow$ Ας λύσω (δικές μου) Ασκήσεις $\Leftarrow$
όπως την 3

$\rightsquigarrow = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/9 \\ -2/3 & 5/9 \end{pmatrix}$

$\frac{\partial u}{\partial x}(2,3) = \frac{1}{3}$, $\frac{\partial u}{\partial y}(2,3) = -1/9$, $\frac{\partial v}{\partial x}(2,3) = -2/3$, $\frac{\partial v}{\partial y}(2,3) = -5/9$

ΧΩΡΟΣ ΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ⇓