ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6ο

Α] Μερικές Παράγωγοι Ανώτερας Τάξης.

Θεωρούμε $f: A(\subseteq \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$, $\vec{x}_0 \in A$. Έστω $\exists\, g_i(\vec{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x})$, $\vec{x} \in B(\vec{x}_0, \delta) \subseteq A$. Εάν υπάρχει $\frac{\partial g_i(\vec{x}_0)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(\vec{x}_0) \stackrel{\text{συμβολ}}{=\!=} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\vec{x}_0)$ και $i=j$ τότε $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(\vec{x}_0)$ ή $f_{x_j x_i}$, $f_{x_i x_i}$ με $1 \le i, j \le n$ → 2ης τάξης μερ. παράγ.

Έστω ότι $\exists\, f_{x_j x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ σε $B(\vec{x}_0, \delta)$ εάν $\exists\, \frac{\partial f_{x_j x_i}(\vec{x}_0)}{\partial x_k} = \frac{\partial^3 f(\vec{x}_0)}{\partial x_k \partial x_j \partial x_i}$ → 3ης τάξης μερ. παράγωγοι

Παράδειγμα

$f(x,y) = e^{x^2+y} + \eta\mu(x^5+y^4)$

Έχουμε: $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xe^{x^2+y} + 5x^4\sigma\upsilon\nu(x^5+y^4)$ | $\frac{\partial f}{\partial y} = e^{x^2+y} + 4y^3\sigma\upsilon\nu(x^5+y^4)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2xe^{x^2+y} - 20x^4y^3\eta\mu(x^5+y^4)$ | $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2xe^{x^2+y} - 20y^3x^4\eta\mu(x^5+y^4)$

Δηλαδή, ισχύει $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ στο $\mathbb{R}^2$

Συμβολισμός: C^k με $k=1,2,\dots$

• $f: A(\subseteq \mathbb{R}^n)\to \mathbb{R}$ είναι $C^k \iff$ υπάρχουν οι $1,2,\dots,k$-τάξης μερ. παράγωγοι και είναι συνεχείς.

• f είναι C^∞ αν η f είναι C^ν-τάξης με $\nu\in\mathbb{N}$

Σχόλιο: Στα 3 αναφερθέντα, επεκτείνεται: αν οι συναρτήσεις στην υπόθεση είναι C^k τότε οι συναρτήσεις στο συμπέρασμα είναι C^k.

Ασκήσεις I

1)
$$\begin{tikzcd}
(x,y) \arrow[r] \arrow[dr, "F"'] & (u(x,y), v(x,y)) \arrow[d, "f"] \\
 & \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$
$(u,v,f\ C^2)$

Να υπολογιστούν οι $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \dfrac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}$

Έχουμε $\dfrac{\partial F}{\partial x} = \dfrac{\partial f(u,v)}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial f(u,v)}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(u,v)}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(u,v)}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$\dfrac{\partial f(u,v)}{\partial u} = g(u,v)$ $\quad a = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(g(u,v)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) \Rightarrow a = \dfrac{\partial g(u,v)}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x} + g(u,v)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}\left[\frac{\partial g}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right] + g(u,v)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$b = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(u,v)}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

$$\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)\right] \to \text{τύπος}$$

ομοίως για β $\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}$ απλώς αντί για x έχουμε y

2) $\vec r=(x,y)$, $r=\sqrt{x^2+y^2}$, $(x,y)\neq(0,0)$, $V(x,y)=\ln\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $V(\vec r)=\ln\frac{1}{r}$. Νδο i) η V είναι αρμονική
ii) Για δ.π. $\vec F(x,y)=\frac{1}{x^2+y^2}(x,y)$, $\vec F(r)=\frac{\vec r}{r^2}$, $\vec F=\nabla(-V)\rightsquigarrow$ (δηλ. δυναμικό) νδο F=συντηρητικό

i) $V(x,y)=-\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$, $\frac{\partial V}{\partial x}=-\frac{x}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=-\frac{(x^2+y^2)-2x^2}{(x^2+y^2)^2}=-\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$ ① και

$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=-\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$ ②. Άρα από ①,② $\Rightarrow$ $\nabla^2 V=0$ Οπότε είναι αρμονική.

ii) $\nabla(-V)=\frac{1}{x^2+y^2}(x,y)=\vec F$

3) $\vec r=(x,y,z)$, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ με $(x,y,z)\neq(0,0,0)$, $V(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $V(r)=\frac{1}{r}$. Νδο:
i) η V αρμονική ii) Για το δ.π. $F(x,y,z)=\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}(x,y,z)$ ισχύει $F=\nabla(-V)$ και το V
είναι η μον. συνάρτηση με $\vec F=\nabla(-V)$, $\lim_{r\to\infty}V(\vec r)=0$

i) $V(x,y,z)=(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}$, $\frac{\partial V}{\partial x}=-x(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial x}=-(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}+3x^2(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}$

$\frac{\partial^2 V}{\partial y}=-(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}+3y^2(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}$ και $\frac{\partial^2 V}{\partial z}=-(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}+3z^2(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}$

Άρα $\Delta V=\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=-3(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}+3(x^2+y^2+z^2)^{1}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}=0$

ii) $\vec F=\nabla(-V)=\nabla(-V_1)$ με $\lim_{r\to\infty}V(r)=\lim_{r\to\infty}V_1(r)=0$

Το $R^3-\{0\}$ είναι πολυγωνικά συν. $\overset{\text{ΘΜΤ}}{\Longrightarrow}$ $V(\vec r)^0=V_1(\vec r)^0+c\Rightarrow c=0$

4) $V(\vec x)=\|\vec x\|^{2-n}$ με $n\geq 3$ και $\vec F(\vec x)=(n-2)\frac{\vec x}{\|\vec x\|^n}$ με $\vec x\in R^n-\{\vec 0\}$ Νδο $F=\nabla(-V)$

Σχόλιο: Αν $F(\vec r)=-\frac{G\cdot Mm}{r^3}\vec r$ (βλ. ασκ. 3) M=μάζα μεγάλη m=μάζα μικρή
πεδίο βαρύτητας (Newton)
• Αν $F(\vec r)=-q\frac{\vec r}{r^3}$ Ηλεκτροστατικό πεδίο (βλ. ασκ. 3)

• Γενικό νευτώνιο δ.π. $\vec F(\vec x)=(n-2)\frac{\vec x}{}$

Πολυώνυμο Taylor - Διαφορική k-τάξης.

Θεωρούμε $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, C^{k+1}. $f(t) = \left[f(0) + \frac{1}{1!} t f'(0) + \frac{1}{2!} f''(0) t^2 + \dots + \frac{1}{k!} f^{(k)}(0) t^k \right] + R_k(t) =$

$P_{k,f}(t) + R_k(t)$. $\left(\frac{R_k(t)}{t^k} \xrightarrow{t \to 0} 0 \right)$

Το πολυώνυμο Taylor είναι το μοναδικό πολυώνυμο με: $P_{k,f}(0) = f(0)$, $P'_{k,f}(0) = f'(0)$, $P''_{k,f}(0) = f''(0)$.

Έστω ότι το $t_0 = 0$ είναι κρίσιμο σημείο f, $f'(0) = 0$ τότε $t \cong 0 \Rightarrow f(t) \cong f(0) + \frac{1}{2} f''(0) t^2$

• Όταν $f''(0) > 0$, $g(t) = f(0) + \frac{1}{2} f''(0) t^2 \sim$ παραβολή. Άρα. έχει τοπ. ελάχιστο στο $t_0 = 0$, $f(t) \cong g(t)$
η f έχει ελαχ. στο $t_0 = 0$

• Όταν $f''(0) < 0$, $g(t) = f(0) + \frac{1}{2} f''(0) t^2$. Άρα, $f(t) \cong g(t)$. Η $g(t)$ τοπ. μέγιστο και η f έχει τοπ. μεγ.

• Όταν $f''(0) = 0 \to$ Δεν ξέρουμε.

Παρατηρούμε ότι $f''(0)$ το η παραβολή $g(t) = f(0) + \frac{1}{2} f''(0) t^2$

Πώς ο θα ανακατασταθεί για των πολλ. μεταβλητών;