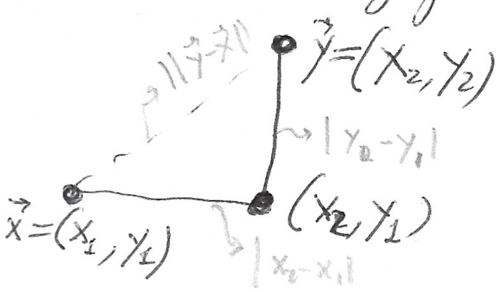
Άσκηση 1 (Φυλ. 3, άσκ. 1 / 11 Δεκ. 2020)

$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ με φραγμένες μερικές παραγώγους. Τότε, υπάρχει $M\geq 0$ ώστε $|f(\vec{x})-f(\vec{y})|\leq M\|\vec{x}-\vec{y}\|$, $\vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^2$

Λύση (μέθοδος που χρησιμοποιήθηκε στο Θ. Μεικτών Παραγώγων)

$\vec{y}=(x_2,y_2)$, $\vec{x}=(x_1,y_1)$, $\vec{x}\neq\vec{y}$



$$|f(x_2,y_2)-f(x_2,y_1)|=\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x_2,\xi)\right||y_2-y_1|$$

$$|f(x_2,y_1)-f(x_1,y_1)|=\left|\frac{\partial f}{\partial x}(\eta,y_1)\right||x_2-x_1| \quad , \exists\ \xi\in(y_1,y_2),\ \eta\in(x_1,x_2)$$

Θ. Rolle/ΘΜΤ.

Άρα $|f(\vec{y})-f(\vec{x})|\leq M_1\|\vec{y}-\vec{x}\|+M_1\|\vec{y}-\vec{x}\|=M\|\vec{y}-\vec{x}\|$ (M_1 = ένα φράγμα των |Μερ. Παρ.| $M=2M_1$)

Δεν μπορώ να χρησιμοποιήσω ΘΜΤ για 2-μεταβλητών.

Π.χ. Η $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ (έχει φραγμένες f_x,f_y, δεν είναι Διαφ. στο (0,0))

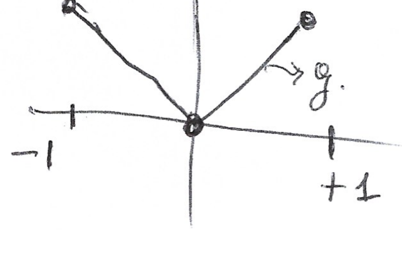
$f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$, $|f_x(x_0,y_0)|=\left|\frac{y_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}-\frac{x_0^2y_0}{(x^2+y^2)^{3/2}}\right|\leq 1+1=2$, $(x_0,y_0)\neq(0,0)$

και $|f_y(x_0,y_0)|\leq 2$ για $(x_0,y_0)\neq(0,0)$ / Άρα $|f_x(x,y)|,|f_y(x,y)|\leq 2$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

$\vec{y}=(1,1)$, $\vec{x}=(-1,+1)$

$\vec{r}(x)=(x,x)$, $x\in[-1,+1]$ | $g(x)=f(x,x)=\frac{1}{\sqrt{2}}|x|$, $x\in\mathbb{R}$.

$\begin{cases} g(-1)=g(1)\\ g \text{ συνεχής}\end{cases} \xrightarrow{\text{Rolle/ΘΜΤ}} \exists\ \xi\in(-1,+1):\ g'(\xi)=0$ ⟨ $|g'(w)|=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $w\neq 0$; δεν υπάρχει η παράγωγος, $w=0$.



Χρήση ΘΜΤ οδηγεί στο Συμπέρασμα ⟹ Η $g(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}|x|$ έχει παράγωγο "0" στο $x_0=0$" ⟸

Άσκηση 2

$\vec{F}=(2xz+y,\ 2yz+3x,\ x^2+y^2+5)$, S επιφάνεια του κυλίνδρου $x^2+y^2=1$.

Γ $\boxed{\text{ΤΥΧΑΙΑ}}$ κλειστή, απλή, C^1, λεία καμπύλη πάνω στην S.

Ζητείται $I=\int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$

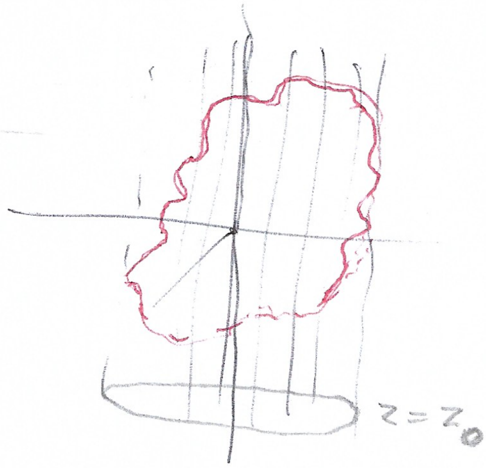
Λύση • Για Γ που δεν ανήκει σε επίπεδο // άξονα του z ...

α' τρόπος (απόδειξη από φορτική).

Γ , $\vec{r}(t)=(\cos t, \sin t, z(t))$, $t\in[0,2\pi]$

τυχαία (όχι επίπεδη, αναγκαστικά)

$z(t)$, (C^1), $z(0)=z(2\pi)$ (κλειστή) ⊛



$I=\int_0^{2\pi}\vec{F}(\vec{r}(t))\cdot\vec{r}\,'(t)\,dt=\int_0^{2\pi}(2\cos t\cdot z(t)+\sin t,\ 2\sin t\cdot z(t)+3\cos t,\ 1+5)\cdot$

$\cdot(-\sin t, \cos t, z'(t))\,dt=\int_0^{2\pi}(-2\sin t\cos t\cdot z(t)-\sin^2 t+2\sin t\cos t\, z(t)+$

$3\cos^2 t+6z'(t))\,dt=\int_0^{2\pi}(-\sin^2 t-\cos^2 t+4\cos^2 t+6z'(t))\,dt=$

$=-2\pi+4\pi+6\int_0^{2\pi}z'(t)\,dt=2\pi+6(z(2\pi)-z(0))\underset{*}{=}\underline{2\pi}$

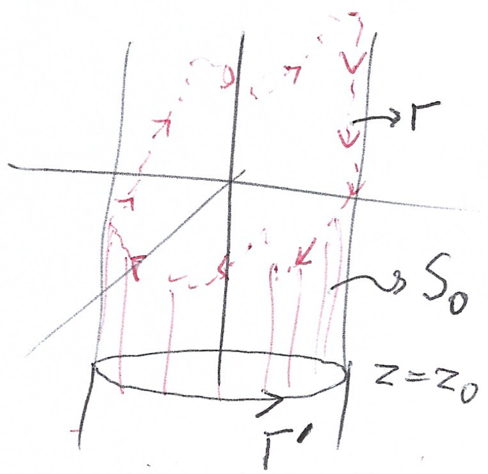
↳(Θ.Θ.Α.Π)

β' τρόπος (με Θ. Stokes)

Γ τυχαία κλειστή+απλή+C^1+λεία καμπύλη πάνω στην S.

Έστω $\Gamma'=\{(x,y,z): x^2+y^2=1,\ z=z_0\}$

ώστε $\Gamma\cap\Gamma'=\emptyset$



Εφαρμόζουμε Θ. Stokes για επιφ. S_0 που έχει ως "σύνορο" τις καμπύλες Γ, $\Gamma' = \{\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, z_0),\ t \in [0, 2\pi]\}$

$$\iint_{S_0} \nabla \times \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_{\Gamma'_+} \vec{F} \cdot d\vec{r} - \int_{\Gamma_+} \vec{F} \cdot d\vec{r}. \quad (\text{Stokes})$$

$\nabla \times \vec{F} = (0,0,2) = 2\vec{k}$, $d\vec{S} = \vec{n}\, dS$, $\vec{n} \perp S_0 \Rightarrow \vec{n} \perp \vec{k}$, $\vec{n} \cdot \vec{k} = 0$

Άρα, $0 = \iint_{S_0} \nabla \times \vec{F} \cdot d\vec{S} \Rightarrow \int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\Gamma'} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \cdots dt = 2\pi$ //

γ' τρόπος (α' τρόπος ή Θ. Stokes με διαφορετική μορφή)

$\vec{F} = (2xz + y,\ 2yz + 3x,\ x^2 + y^2 + 5) = \nabla f + (y, 3x, 5)$

όπου $f(x,y,z) = z(x^2 + y^2)$. $\int_\Gamma \nabla f \cdot d\vec{r} = 0$

Άρα $\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_\Gamma (y, 3x, 5) \cdot d\vec{r}$, $\nabla \times (y, 3x, 5) = 2\vec{k}$.

Συνεχίζουμε με τη μέθοδο α' ή β' τρόπου.

- Για καμπύλη Γ που βρίσκεται σε επίπεδο παράλληλο με τον άξονα των z

$\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_{S_0} \nabla \times \vec{F} \cdot d\vec{S} = 0$, όπου Γ είναι το σύνορο της S_0.

Σημείωση. • Η εύρεση του $I = \int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$ σε ΣΥΓΚΕΚΡΙΜΕΝΗ καμπύλη (π.χ. $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, 0)$ ή $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, c)$ δηλ. μόνον σε κύκλους, δεν είναι δεκτή). Προφανώς το αποτέλεσμα είναι 2π.

- Δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε Θ. Gauss, όπως στην Άσκηση 2.

Ⓐ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ (Σ/Λ, Πολλαπλής Επιλογής)

- Σ/Λ Φυλλάδιο 1 (1 Δεκεμβρίου 2020)
  Χειρόγραφες Σημειώσεις (2020-21 X)
  Βιβλίο ...

- Πολλαπλής Επιλογής
  Ανάλογες με τις Ασκήσεις που λύθηκαν ακ. έτος 2020-21 (X)

Σε όλα τα ερωτήματα υπάρχει η σωστή απάντηση, στις επιλογές