Το εξωτερικό γινόμενο στον R^3

Το εσωτερικό γινόμενο δεν είναι ο μόνος τρόπος για να πολλαπλασιάζουμε διανύσματα. Στην παράγραφο αυτή θα μελετήσουμε ένα άλλο τρόπο πολλαπλασιασμού διανυσμάτων που αφορά όμως μόνο τον R^3 ($n=3$) και ονομάζεται εξωτερικό γινόμενο ή και διανυσματικό γινόμενο. Θα υπενθυμίσουμε πρώτα την ανισότητα Cauchy-Schwarz και το πώς η ανισότητα αυτή επιτρέπει τον ορισμό της γωνίας μεταξύ δύο μη μηδενικών διανυσμάτων του R^n.

Αν $x, y \in R^n$ τότε $|x\cdot y| \le \|x\|\cdot\|y\|$ (ανισότητα Cauchy-Schwarz) (όπου αν $x=(x_1,...,x_n), y=(y_1,...,y_n)\in R^n$ τότε $x\cdot y=\sum_{k=1}^{n} x_k y_k$ και $\|x\|=\sqrt{x_1^2+...+x_n^2}$).

Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz έπεται ότι αν $x, y\in R^n-\{0\}$ τότε $-1\le \dfrac{x\cdot y}{\|x\|\cdot\|y\|}\le 1$.

Έτσι ως γωνία των x και y ορίζεται ο (μοναδικός) αριθμός $\theta\in[0,\pi]$ ώστε,

$$\cos\theta=\frac{x\cdot y}{\|x\|\cdot\|y\|} \Leftrightarrow x\cdot y=\|x\|\cdot\|y\|\cdot\cos\theta .$$

Το x και y λέγονται ορθογώνια (γράφουμε δε $x\perp y$) αν $x\cdot y=0 \Leftrightarrow \cos\theta=0 (\Leftrightarrow \theta=\frac{\pi}{2})$.

Επιστρέφουμε τώρα στον τρισδιάστατο Ευκλείδειο χώρο R^3 και ορίζουμε την έννοια του εξωτερικού γινομένου διανυσμάτων σε αυτόν.

4.1 Ορισμός. Έστω $x=(x_1,x_2,x_3)$ και $y=(y_1,y_2,y_3)$ διανύσματα του R^3.
Ως εξωτερικό γινόμενο των x, y ορίζεται το διάνυσμα (χρησιμοποιώντας ορίζουσες)

$$x\times y=\begin{vmatrix} i & j & k\\ x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x_2 x_3\\ y_2 y_3\end{vmatrix} i-\begin{vmatrix} x_1 x_3\\ y_1 y_3\end{vmatrix} j+\begin{vmatrix} x_1 x_2\\ y_1 y_2\end{vmatrix} k$$ όπου

$i=e_1=(1,0,0), j=e_2=(0,1,0), k=e_3=(0,0,1)$

Επομένως $x\times y=(x_2y_3-x_3y_2)i-(x_1y_3-x_3y_1)j+(x_1y_2-x_2y_1)k$
$=(x_2y_3-x_3y_2)i+(x_3y_1-x_1y_3)j+(x_1y_2-x_2y_1)k$.

Παράδειγμα Να βρεθεί το $x\times y$ όπου $x=2i-j+3k$ ($=(2,-1,3)$) και $y=7j-4k (=(0,7,-4))$.

Λύση

$$x\times y=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 2 & -1 & 3\\ 0 & 7 & -4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -1 & 3\\ 7 & -4\end{vmatrix} i-\begin{vmatrix} 2 & 3\\ 0 & -4\end{vmatrix} j+\begin{vmatrix} 2 & -1\\ 0 & 7\end{vmatrix} k$$

$$=((-1)(-4)-3\cdot 7)i-(2\cdot(-4)-3\cdot 0)j+(2\cdot 7-(-1)\cdot 0)k$$

$$=-17i+8j+14k=(-17,8,14)$$

4.2 Θεώρημα (Ιδιότητες εξωτερικού γινομένου)
Έστω $x,y,z\in R^3$ και $\lambda\in R$ τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

1) $(\lambda x)\times y=\lambda(x\times y)=x\times(\lambda y)$, ιδιαίτερα $0\times y=y\times 0=0$

2) $x\times x=0$

3) $x\times y=-(y\times x)$

4) $x\times(y+z)=x\times y+x\times z$ και $(y+z)\times x=y\times x+z\times x$

5) $\|x\times y\|^2=\|x\|^2\cdot\|y\|^2-(x\cdot y)^2$ (ταυτότητα Lagrange)

6) $x\cdot(y\times z)=(x\times y)\cdot z$

7) $x\times(y\times z)=(x\cdot z)y-(x\cdot y)z$

Απόδειξη: Όλες οι ιδιότητες αποδεικνύονται με χρήση του ορισμού του εξωτερικού γινομένου και με πράξεις. Ενδεικτικά αποδεικνύουμε τις (3) και (5).
Έστω, $x=(x_1,x_2,x_3)$ και $y=(y_1,y_2,y_3)$

$$x\times y=\begin{vmatrix} i & j & k\\ x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} i & j & k\\ y_1 & y_2 & y_3\\ x_1 & x_2 & x_3\end{vmatrix}=-(y\times x).$$

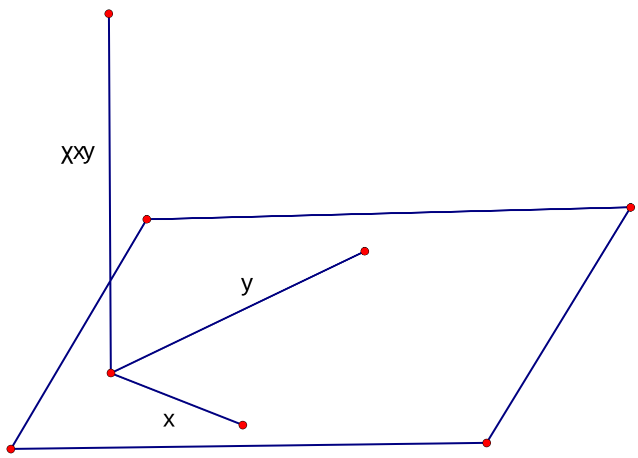
Η (5) είναι ειδική περίπτωση της ταυτότητας Lagrange ($n=3$) η οποία με την βοήθεια των συνιστωσών των διανυσμάτων γράφεται:

$$(x_2y_3-x_3y_2)^2+(x_3y_1-x_1y_3)^2+(x_1y_2-x_2y_1)^2=$$
$$=(x_1^2+x_2^2+x_3^2)(y_1^2+y_2^2+y_3^2)-(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3)^2$$

Η ταυτότητα αυτή επαληθεύεται εύκολα με πράξεις

Σημείωση. Η ταυτότητα Lagrange στην γενική μορφή της θα αποδειχθεί αργότερα στην παράγραφο αυτή.

Το εξωτερικό γινόμενο συχνά χρησιμοποιείται και για γεωμετρικούς σκοπούς, για να ορίσει το διάνυσμα που είναι κάθετο σε δύο δοσμένα διανύσματα. Το αποτέλεσμα που ακολουθεί μας λέει ότι αν x και y είναι δύο μη συγγραμμικά διανύσματα του R^3 τότε το $x\times y$ είναι ένα διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο που ορίζουν τα x και y.



4.3 Πρόταση. Το εξωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων x και y του R^3 είναι ορθογώνιο προς τα διανύσματα x και y.

Απόδειξη: Αρκεί να αποδείξουμε ότι $x\cdot(x\times y)=y\cdot(x\times y)=0$. Παρατηρούμε ότι,

$$x\cdot(x\times y)= x_1\left(x_2y_3-x_3y_2\right)+x_2\left(x_3y_1-x_1y_3\right)+x_3\left(x_1y_2-x_2y_1\right)=$$
$$x_1x_2y_3-x_1x_3y_2+x_2x_3y_1-x_2x_1y_3+x_3x_1y_2-x_3x_2y_1=0$$

Ανάλογα αποδεικνύεται ότι $y\cdot(x\times y)=0$.

Παράδειγμα. Να βρεθεί ένα μη μηδενικό διάνυσμα ορθογώνιο στα διανύσματα $x=-2i+3j-7k$ και $y=5i+9k$.

Λύση Το εξωτερικό γινόμενο $x\times y$ είναι ορθογώνιο και στο x και στο y.

$$x\times y=\begin{vmatrix} i & j & k\\ -2 & 3 & -7\\ 5 & 0 & 9\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3 & -7\\ 0 & 9\end{vmatrix}i-\begin{vmatrix}-2 & -7\\ 5 & 9\end{vmatrix}j+\begin{vmatrix}-2 & 3\\ 5 & 0\end{vmatrix}k=$$
$$\left(3\cdot 9-(-7)\cdot 0\right)i-\left((-2)\cdot 9-(-7)\cdot 5\right)j+\left((-2)\cdot 0-3\cdot 5\right)k=27i-17j-15k.$$

Το εσωτερικό γινόμενο των μη μηδενικών διανυσμάτων x και y του R^3 ικανοποιεί την εξίσωση $x\cdot y=\|x\|\cdot\|y\|\cdot\cos\theta$ όπου θ η γωνία $\left(\theta\in[0,\pi]\right)$ μεταξύ των x και y. Ένα ανάλογο αποτέλεσμα ισχύει και για το εξωτερικό γινόμενο.

4.4 Πρόταση Αν x και y μη μηδενικά διανύσματα του R^3 και $\theta\in[0,\pi]$ η μεταξύ τους γωνία τότε $\|x\times y\|=\|x\|\cdot\|y\|\cdot\sin\theta$.

Απόδειξη: Θα χρησιμοποιήσουμε την ταυτότητα του Lagrange (θεώρημα 4.2 (5)).

$$\|x\times y\|^2=\|x\|^2\cdot\|y\|^2-(x\cdot y)^2=\|x\|^2\cdot\|y\|^2-\left(\|x\|\cdot\|y\|\cdot\cos\theta\right)^2=$$
$$\|x\|^2\cdot\|y\|^2-\|x\|^2\cdot\|y\|^2\cdot\cos^2\theta=\|x\|^2\cdot\|y\|^2-\|x\|^2\cdot\|y\|^2\cdot\left(1-\sin^2\theta\right)=\|x\|^2\cdot\|y\|^2\cdot\sin^2\theta.$$

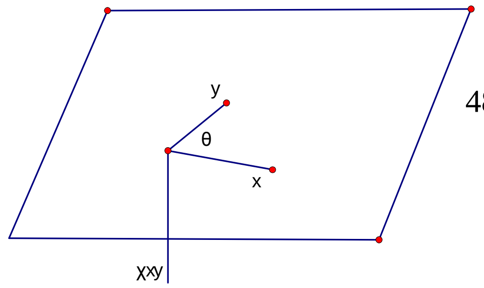
Επειδή $\sin\theta\ge 0$ όταν $0\le\theta\le\pi$, συμπεραίνουμε ότι $\|x\times y\|=\|x\|\cdot\|y\|\cdot\sin\theta$.

4.5 Πόρισμα Αν $x,y\in R^3$, τότε τα x και y είναι συγγραμμικά αν και μόνο αν $x\times y=0$.

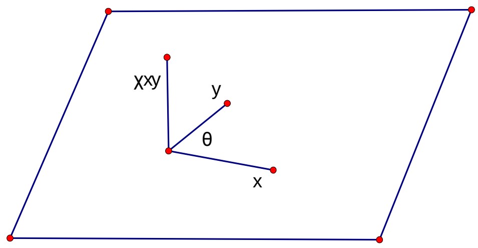
Απόδειξη: Προφανής

Σημείωση. Το προηγούμενο αποτέλεσμα είναι σημαντικό εφόσον μας δίνει ένα τρόπο υπολογισμού (του μέτρου) του εξωτερικού γινομένου που δεν εξαρτάται από συντεταγμένες, αλλά μόνο από την γεωμετρία των εμπλεκομένων διανυσμάτων.

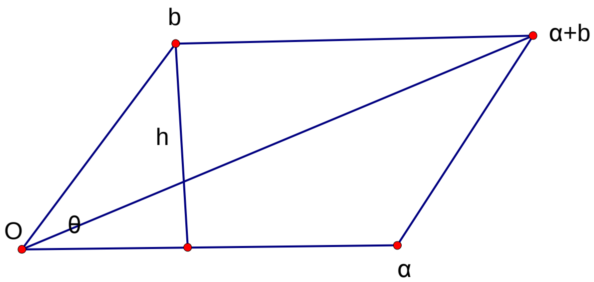
Παρατήρηση. Έστω x και y μη συγγραμμικά διανύσματα του R^3 τότε η τριάδα διανυσμάτων $(x,y,x\times y)$ αποτελεί ένα δεξιόστροφο σύστημα διανυσμάτων, δηλαδή ανάλογο με το σύστημα (i,j,k). Έτσι η κατεύθυνση του $x\times y$ προσδιορίζεται με τον κανόνα του «δεξιού χεριού» ή με τον κανόνα του δεξιόστροφου κοχλία Για να γίνουμε περισσότερο σαφείς, το εξωτερικό γινόμενο δεν είναι μεταθετικό (δες και την (3) του θεωρήματος 4.2). Έτσι στο εξωτερικό



γινόμενο $x \times y$, η σειρά που παρατίθενται τα διανύσματα (πρώτα το x και μετά το y) καθορίζει και τον προσανατολισμό της κυρτής γωνίας των x και y. Αν ένας δεξιόστροφος κοχλίας (βίδα ή τριμπουσόν) περιστρέφεται σύμφωνα με την προσανατολισμένη γωνία $\langle x, y \rangle$ τότε η κίνηση του κοχλία (προς τα πάνω ή κάτω) καθορίζει και την φορά του διανύσματος $x \times y$ (το οποίο είναι βέβαια κάθετο στο επίπεδο των διανυσμάτων x και y.



Εφαρμογές του εξωτερικού γινομένου. 1) Έστω a και b μη συγγραμμικά διανύσματα στον R^3. Τότε το εμβαδόν του παραλληλογράμμου με κορυφές τα σημεία Ο, $a, a+b,$ και b ισούται με $\|a \times b\|$.



Λύση Έστω Ε το εμβαδόν του παραλληλογράμμου με κορυφές τα Ο, $a, a+b,$ και b και h το ύψος που άγεται από το b στην πλευρά Οa. Τότε $h = \|b\| \cdot \sin\theta$, άρα $\mathrm{E} = \|a\| \cdot \|b\| \cdot \sin\theta = \|a \times b\|$ (πρόταση 4.4)

2)Αν $a, b, c \in R^3$ τότε το γινόμενο $a \cdot (b \times c)$ ονομάζεται το <u>αριθμητικό</u> ή <u>τριπλό γινόμενο</u> των a, b και c και συμβολίζεται συνήθως με $(a \cdot b \cdot c)$. Ισχύει τότε

$$(a \cdot b \cdot c) = a \cdot (b \times c) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$ όπου $a = (a_1, a_2, a_3)$, $b = (b_1, b_2, b_3)$ και $c = (c_1, c_2, c_3)$

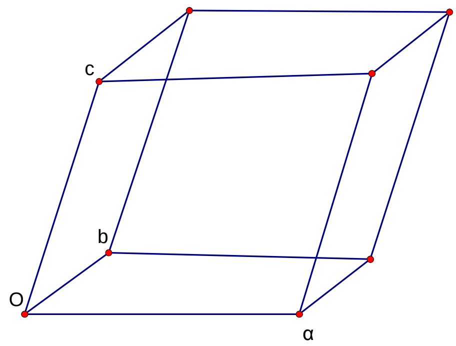
Λύση Με πράξεις βρίσκουμε:

$$a \cdot (b \times c) = (a_1 i + a_2 j + a_3 k) \cdot \left(\begin{vmatrix} b_2 b_3 \\ c_2 c_3 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} b_1 b_3 \\ c_1 c_3 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} b_1 b_2 \\ c_1 c_2 \end{vmatrix} k \right) = (a \cdot b \cdot c) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

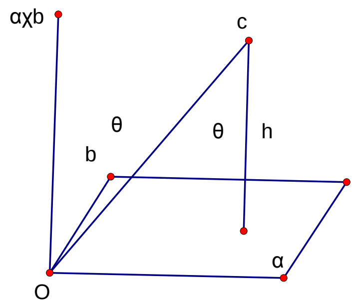
Από τις ιδιότητες των οριζουσών έχουμε ότι: $a \cdot (b \times c) = b \cdot (c \times a) = c \cdot (a \times b)$.

3) Έστω a, b, c τρία μη συνεπίπεδα διανύσματα του R^3, τότε ο όγκος του παραλληλεπιπέδου που παράγεται από τα a, b και c ισούται με $|c \cdot (a \times b)|$, δηλαδή $V = |c \cdot (a \times b)|$.

Λύση



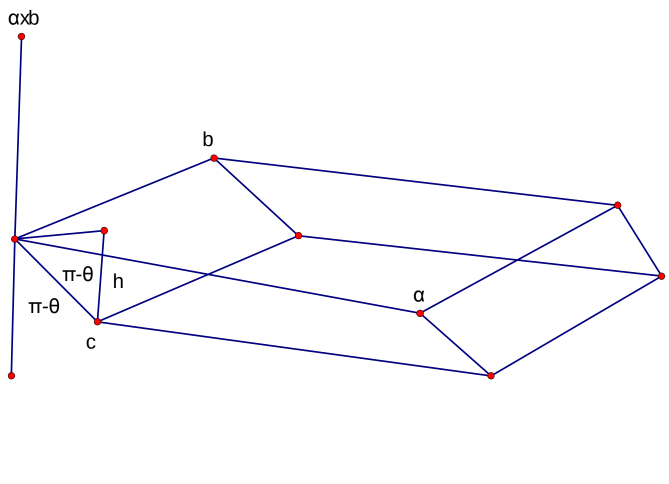
$$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$



Το παραλληλόγραμμο με κορυφές O, $a, a+b,$ και b έχει εμβαδόν $\mathrm{E} = \|a \times b\|$. Από την γεωμετρία είναι γνωστό ότι ο όγκος του παραλληλεπιπέδου που παράγεται από τα a, b και c ισούται με $V = \mathrm{E} \cdot h$, όπου h το ύψος που άγεται από την κορυφή c στο επίπεδο του παραλληλογράμμου με κορυφές τα O, $a, a+b,$ και b. Αν θ είναι η γωνία των $a \times b$ και c τότε $c \cdot (a \times b) = \|c\| \cdot \|a \times b\| \cdot \cos\theta$ (τύπος του εσωτερικού γινομένου). Όμως $h = \|c\| \cdot |\cos\theta|$, (αν $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ τότε $h = \|c\| \cdot \cos\theta$ και αν $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ τότε $h = \|c\| \cdot \cos(\pi - \theta) = -\|c\| \cdot \cos\theta$).

Έπεται ότι: $V = \|a \times b\| \cdot h = \|a \times b\| \cdot \|c\| \cdot |\cos\theta| = |c \cdot (a \times b)|$.

Παρατήρηση. Από την εφαρμογή (2) έπεται ότι ο όγκος V του παραλληλεπιπέδου που παράγεται από τα διανύσματα a, b και c ισούται με την απόλυτη τιμή της ορίζουσας $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$.



$$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi .$$