Το θεώρημα μέσης τιμής

Το ακόλουθο αποτέλεσμα γενικεύει το γνωστό Θεώρημα του Διαφορικού Λογισμού της μιας μεταβλητής στις πολλές μεταβλητές.

7.1 Θεώρημα. Έστω $D \subseteq R^n$ ανοικτό και $a,b \in D$ ώστε το ευθύγραμμο τμήμα $[a,b]=\{(1-t)a+tb : t\in[0,1]\}\subseteq D$. Αν $f : D \to R$ είναι διαφορίσιμη συνάρτηση τότε υπάρχει $z \in (a,b)$ ώστε, $f(b)-f(a)=\nabla f(z)\cdot(b-a)$.

Απόδειξη: Έστω $\sigma(t)=(1-t)a+tb, t\in[0,1]$ η συνήθης παραμέτρηση του ευθυγράμμου τμήματος $[a,b]$. Η συνάρτηση $\sigma:[0,1]\to R^n$ είναι διαφορίσιμη. Πράγματι, αν $a=(a_1,...,a_n)$ και $b=(b_1,...,b_n)$ τότε έχουμε ότι, $\sigma(t)=(\sigma_1(t),...,\sigma_n(t))$, όπου $\sigma_k(t)=(1-t)a_k+tb_k, k=1,2,...,n, t\in[0,1]$, άρα $\sigma'(t)=(\sigma_1^{'}(t),...,\sigma_n^{'}(t))=(b_1-a_1,...,b_n-a_n)=b-a$ για $t\in[0,1]$.

Η συνάρτηση $h= fo\sigma:[0,1]\to R$ είναι διαφορίσιμη (Κανόνας της αλυσίδας) και από το Θεώρημα μέσης τιμής του Διαφορικού Λογισμού έχουμε ότι υπάρχει $\xi\in(0,1)$ ώστε, $h(1)-h(0)=h'(\xi)(1-0)=h'(\xi)$ ή $f(b)-f(a)=h'(\xi)$. Θέτουμε $z=(1-\xi)a+\xi b$, προφανώς $z\in(a,b)$ και $\sigma(\xi)=z$.

Από τον <u>κανόνα της αλυσίδας</u> έχουμε ότι:

$h'(\xi)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_k}(\sigma(\xi))\cdot\frac{d\sigma_k}{dt}(\xi)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_k}(z)\cdot(b_k-a_k)=\nabla f(z)\cdot(b-a)$, ή

$$f(b)-f(a)=\nabla f(z)\cdot(b-a).$$

Παρατήρηση. Αν το D είναι επί πλέον <u>κυρτό</u>, δηλαδή αν για κάθε $a,b\in R^n \Rightarrow [a,b]\subseteq D$, τότε η πρόταση ισχύει για κάθε $a,b\in D$.

7.2 Πόρισμα. Έστω $D\subseteq R^n$ ανοικτό και κυρτό και $f : D\to R$ διαφορίσιμη συνάρτηση. Αν $x,y\in D$ τότε ισχύει η ανισότητα,

$$|f(x)-f(y)|\le \sup_{z\in D}\|\nabla f(z)\|\cdot\|x-y\|$$

Έπεται ιδιαίτερα ότι, αν $\sup_{z\in D}\|\nabla f(z)\|<+\infty$ τότε η f είναι Lipschitz στο D.

Απόδειξη: Έστω $x,y\in D$ τότε $[x,y]\subseteq D$, εφόσον D κυρτό. Από την προηγούμενη πρόταση έπεται ότι υπάρχει $z\in[x,y]$: $f(x)-f(y)=\nabla f(z)\cdot(x-y)$

Συνεπώς, $|f(x)-f(y)|=|\nabla f(z)\cdot(x-y)|\le\|\nabla f(z)\|\cdot\|x-y\|$ (χρησιμοποιώντας την ανισότητα C-S).

Άρα $|f(x)-f(y)|\le\sup_{z\in D}\|\nabla f(z)\|\cdot\|x-y\|$, $x,y\in D$.

Το υπόλοιπο της πρότασης έπεται προφανώς από τα παραπάνω.

Υπενθυμίζουμε τα ακόλουθα:

1)Αν $z_0, z_1, ..., z_m \in R^n$, τότε η πολυγωνική γραμμή με κορυφές τα $z_0, z_1, ..., z_m$ είναι το σύνολο $\mathrm{P} = [z_0, z_1] \cup [z_1, z_2] \cup ... \cup [z_{m-1}, z_m]$

2)Ένα ανοικτό υποσύνολο $D \subseteq R^n$ είναι <u>συνεκτικό</u> αν και μόνο αν (είναι πολυγωνικά συνεκτικό, δηλαδή) για κάθε $a, b \in D$ υπάρχει πολυγωνική γραμμή $\mathrm{P} = [z_0, z_1] \cup [z_1, z_2] \cup ... \cup [z_{m-1}, z_m] \subseteq D$ με $z_0 = a$ και $z_m = b$.

7.3 Πρόταση. Έστω $D \subseteq R^n$ ανοικτό και συνεκτικό. Αν $f : D \to R$ είναι διαφορίσιμη συνάρτηση ώστε, $\dfrac{\partial f}{\partial x_k} = 0$ στο D, για κάθε $k = 1, 2, ..., n$, τότε η f είναι σταθερή.

Απόδειξη: Έστω για απλότητα ότι $n = 2$. Έτσι η υπόθεσή μας μετατρέπεται ότι D ανοικτό συνεκτικό στο R^2 και $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ στο D.

Θα αποδείξουμε ότι, αν a, b είναι δύο τυχόντα σημεία του D τότε $f(a) = f(b)$. Είναι τότε σαφές ότι η f θα είναι σταθερή στο D. Έστω $\mathrm{P} = [z_0, z_1] \cup [z_1, z_2] \cup ... \cup [z_{n-1}, z_n] \subseteq D$ πολυγωνική γραμμή με $z_0 = a$ και $z_n = b$.

Εφαρμόζουμε το θεώρημα μέσης τιμής στο ευθύγραμμο τμήμα $[z_0, z_1]$, οπότε υπάρχει $z \in [z_0, z_1]$: $f(z_1) - f(z_0) = \nabla f(z) \cdot (z_1 - z_0)$.

Επειδή $\nabla f(z) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(z), \dfrac{\partial f}{\partial y}(z) \right) = (0,0)$ έπεται ότι $f(z_1) = f(z_0)$. Εφαρμόζοντας διαδοχικά το θεώρημα μέσης τιμής στα ευθύγραμμα τμήματα $[z_1, z_2], ..., [z_{n-1}, z_n]$ βρίσκουμε ότι $f(z_0) = f(z_1) = f(z_2) = ... = f(z_{n-1}) = f(z_n)$. Συνεπώς $f(b) = f(a)$.

Παρατηρήσεις. 1) Το θεώρημα μέσης τιμής <u>δεν</u> ισχύει για διανυσματικές συναρτήσεις. Πράγματι, έστω $f : R \to R^2 : f(t) = (\cos t, \sin t), t \in R$. Τότε $f'(a) = (\cos' a, \sin' a) = (-\sin a, \cos a), a \in R$.

Έστω $a = 0$ και $b = 2\pi$, τότε $f(b) - f(a) \neq f'(\xi) \cdot (b - a)$ για κάθε $\xi \in (0, 2\pi)$.

Αφού το αριστερό μέλος ισούται με 0 ($f(2\pi) - f(0) = f(0) - f(0) = 0$), ενώ το δεξί είναι το μη μηδενικό διάνυσμα $2\pi \cdot (-\sin \xi, \cos \xi)$ του R^2.

(*) 2)<u>Η γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος μέσης τιμής</u>: Έστω $D \subseteq R^2$ ανοικτό $[a, b] \subseteq D$ με $a \neq b$ και $f : D \to R$ διαφορίσιμη. Τότε υπάρχει $\omega \in (a, b)$ τέτοιο ώστε το εφαπτόμενο επίπεδο Ε του γραφήματος της f στο $(\omega, f(\omega))$ είναι παράλληλο με την ευθεία l του R^3 που διέρχεται από τα σημεία $\mathrm{A}(a, f(a))$ και $\mathrm{B}(b, f(b))$.

Πράγματι από το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\omega \in (a, b)$: $f(b) - f(a) = \nabla f(\omega) \cdot (b - a)$ όπου $a = (a_1, a_2), b = (b_1, b_2)$ και

$\omega = (\omega_1, \omega_2)$. Το εφαπτόμενο επίπεδο στο σημείο $(\omega, f(\omega))$ του γραφήματος της f έχει εξίσωση: $z = f(\omega_1, \omega_2) + \frac{\partial f}{\partial x}(\omega_1, \omega_2)(x - \omega_1) + \frac{\partial f}{\partial y}(\omega_1, \omega_2)(y - \omega_2)$, (Ε), το επίπεδο αυτό είναι παράλληλο στο επίπεδο με εξίσωση $z = \frac{\partial f}{\partial x}(\omega_1, \omega_2)x + \frac{\partial f}{\partial y}(\omega_1, \omega_2)y$ (E_1) το οποίο διέρχεται από το $(0,0,0)$.

Η ευθεία ℓ που διέρχεται από τα $(a, f(a))$ και $(b, f(b))$ έχει εξίσωση

$$\ell(t) = (a, f(a)) + t(b - a, f(b) - f(a))$$
$$= (a_1, a_2, f(a)) + t(b_1 - a_1, b_2 - a_2, f(b) - f(a))$$

και είναι παράλληλη με το διάνυσμα

$$(b, f(b)) - (a, f(a)) = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, f(b) - f(a)).$$

Παρατηρούμε ότι το σημείο $(b_1 - a_1, b_2 - a_2, f(b) - f(a))$ ικανοποιεί την εξίσωση του Ε, αφού ισχύει

$$f(b) - f(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(\omega_1, \omega_2)(b_1 - a_1) + \frac{\partial f}{\partial y}(\omega_1, \omega_2)(b_2 - a_2)$$

ισοδύναμα ισχύει $\qquad f(b) - f(a) = \nabla f(\omega) \cdot (b - a)$

που είναι ακριβώς το θεώρημα μέσης τιμής.