

Κλίση και επιφάνειες στάθμης μιας συνάρτησης

Έστω $D \subseteq \mathbb{R}^3$ ανοικτό και $f: D \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, C^1 συνάρτηση. Αν κ πραγματική σταθερά (με $\kappa \in f(D)$) τότε η εξίσωση

$$f(x, y, z) = \kappa$$

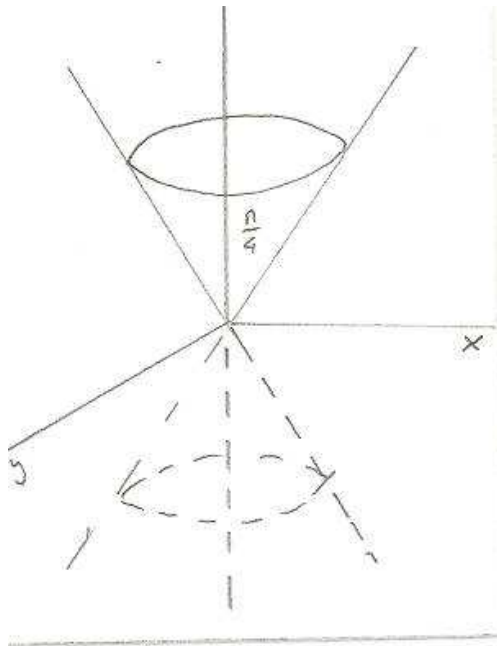
ορίζει μια επιφάνεια S στον \mathbb{R}^3 (το υποσύνολο $S = f^{-1}(\{\kappa\})$ του D). Η S ονομάζεται συνήθως επιφάνεια στάθμης της f .

Παραδείγματα: 1) Έστω $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}: f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Αν $\kappa > 0$ τότε η εξίσωση, $x^2 + y^2 + z^2 = \kappa$ ορίζει την επιφάνεια μιας σφαίρας κέντρου $(0,0,0)$ και ακτίνας $r = \sqrt{\kappa}$ στον \mathbb{R}^3 . Ιδιαίτερα αν $\kappa = 1$, έχουμε την επιφάνεια της μοναδιαίας σφαίρας του \mathbb{R}^3 . Η συνάρτηση f είναι βέβαια C^∞ .

2) Έστω $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ($f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μια C^∞ - συνάρτηση). Αν $\kappa = 0$, η εξίσωση $x^2 + y^2 - z^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = z^2$ ορίζει έναν διπλό κώνο στο \mathbb{R}^3 με κορυφή στο $(0,0,0)$.

Πράγματι, $z^2 = x^2 + y^2 \Leftrightarrow z = \pm \sqrt{x^2 + y^2}$.

Η εξίσωση $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, ορίζει έναν ορθό κώνο που βρίσκεται πάνω από το xy επίπεδο και η $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$ ορίζει τον «κατά κορυφήν» κώνο που βρίσκεται κάτω από το xy επίπεδο. Η επιφάνεια αυτή σχηματίζεται με την περιστροφή μιας ευθείας που διέρχεται από το $(0,0,0)$ περί τον άξονα των z και σε γωνία $\frac{\pi}{4}$ με αυτόν.



3) Έστω $f(x, y, z) = ax + \beta y + \gamma z$, όπου $a, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ με $|a| + |\beta| + |\gamma| > 0$. Αν $\kappa \in \mathbb{R}$ τότε η εξίσωση $ax + \beta y + \gamma z = \kappa$, ορίζει ένα επίπεδο E στον \mathbb{R}^3 κάθετο στο διάνυσμα (a, β, γ) . Είναι βέβαια προφανές ότι η f είναι C^∞ στον \mathbb{R}^3 .

4) Έστω $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό και $g: D \rightarrow \mathbb{R}$ C^1 συνάρτηση. Θέτουμε $z = g(x, y), (x, y) \in D$ και ορίζουμε μια συνάρτηση $f: D \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ θέτοντας, $f(x, y, z) = z - g(x, y), (x, y) \in D, z \in \mathbb{R}$.

Η f είναι C^1 συνάρτηση στο $D \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^3$, αφού οι μερικές παράγωγοί της, $\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\partial g}{\partial y}$ και $\frac{\partial f}{\partial z} = 1$, είναι συνεχείς συναρτήσεις.

Είναι απλό να ελέγξουμε ότι η επιφάνεια S που ορίζεται από την εξίσωση $f(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow z = g(x, y)$ συμπίπτει με το γράφημα $G(g)$ της g .

Πράγματι,

$$S = \{(x, y, z) \in D \times \mathbb{R} : f(x, y, z) = 0\} = \{(x, y, z) \in D \times \mathbb{R} : z = g(x, y)\} = \\ \{(x, y, g(x, y)) : (x, y) \in D\} = G(g). \quad (\text{Σημειώνουμε ότι το } D \times \mathbb{R} \text{ είναι ανοικτό υποσύνολο του } \mathbb{R}^3.)$$

Παρατήρηση. Ο παραπάνω ορισμός μπορεί βέβαια να διατυπωθεί για κάθε $n \geq 2$ και κάθε C^1 συνάρτηση $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Αν $\kappa \in \mathbb{R}$ τότε το σύνολο των σημείων $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : f(x) = \kappa$, ορίζεται ως το σύνολο στάθμης της f . Αν $n = 2$, μιλάμε για μια καμπύλη στάθμης και αν $n = 3$ για μια επιφάνεια στάθμης. Για παράδειγμα, αν $f(x, y) = x^2 + y^2$ και $\kappa > 0$, τότε η καμπύλη στάθμης που ορίζει η εξίσωση $x^2 + y^2 = \kappa$ είναι ο κύκλος κέντρου $(0, 0)$ και ακτίνας $r = \sqrt{\kappa}$. Παρατηρούμε ότι το παράδειγμα 4 γενικεύεται και για C^1 συναρτήσεις $g: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

10.1 Πρόταση. Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό, $x_0 \in U$ και $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση διαφορίσιμη στο x_0 . Αν $\nabla f(x_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \right) \neq 0$, τότε η κλίση $\nabla f(x_0)$ δείχνει προς εκείνη την κατεύθυνση κατά μήκος της οποίας η f αυξάνει ταχύτερα.

Απόδειξη: Έστω $\eta \in \mathbb{R}^n$ με $\|\eta\| = 1$. Ο ρυθμός μεταβολής της f στο x_0 επί της ευθείας $\ell(t) = x_0 + t\eta, t \in \mathbb{R}$ δίνεται από την παράγωγο της f στο x_0 στην κατεύθυνση η , δηλαδή την ποσότητα, $\nabla f(x_0) \cdot \eta (= Df(x_0)(\eta))$.

Όμως $\nabla f(x_0) \cdot \eta = \|\nabla f(x_0)\| \cdot \|\eta\| \cdot \cos \theta = \|\nabla f(x_0)\| \cdot \cos \theta$ όπου $\theta \in [0, \pi]$ η γωνία των διανυσμάτων η και $\nabla f(x_0)$. Αν $\theta = 0$ τότε $\cos \theta = 1$ και ο ρυθμός αυτός γίνεται μέγιστος. Δηλαδή έχουμε τον μέγιστο ρυθμό μεταβολής όταν τα διανύσματα η και $\nabla f(x_0)$ είναι παράλληλα και ομόρροπα.

Παραδείγματα. 1) Σε ποια κατεύθυνση ξεκινώντας από το $(0,1)$ αυξάνει ταχύτερα η $f(x,y) = x^2 - y^2$;

Λύση. $x_0 = (0,1), \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \frac{\partial f}{\partial y} = -2y.$ Άρα

$\nabla f(0,1) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,1), \frac{\partial f}{\partial y}(0,1) \right) = (0, -2) \neq (0,0).$ Έτσι η f αυξάνει ταχύτερα στην κατεύθυνση $\nabla f(0,1) = -2 \cdot (0,1) = -2j.$

2) Έστω $f(x,y,z) = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}, (x,y,z) \neq (0,0,0).$ Ποια είναι η κατεύθυνση της ταχύτερης αύξησης για την f στο σημείο $(1,1,1)$;

Λύση Οι μερικές παράγωγοι της f στο ανοικτό $U = R^3 - \{(0,0,0)\}$ είναι οι $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-2x}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}, \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-2y}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}$ και $\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{-2z}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}$

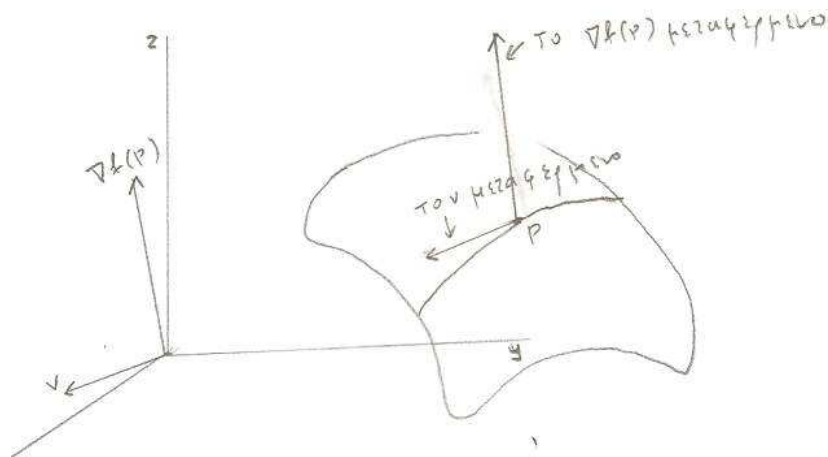
Συνεπώς, $\nabla f(1,1,1) = \left(-\frac{2 \cdot 1}{3^2}, -\frac{2 \cdot 1}{3^2}, -\frac{2 \cdot 1}{3^2} \right) = -\frac{2}{9}(1,1,1).$ Έτσι η f αυξάνει ταχύτερα στην κατεύθυνση $-\frac{2}{9}(1,1,1).$

10.2 Θεώρημα. Έστω $D \subseteq R^3$ ανοικτό και $f: D \rightarrow R$ C^1 συνάρτηση και $P = (x_0, y_0, z_0)$ ένα σημείο στην επιφάνεια S που ορίζεται από την εξίσωση $f(x,y,z) = \kappa$ όπου κ σταθερά, ($\kappa \in f(D)$). Τότε το διάνυσμα $\nabla f(P)$ είναι κάθετο στην S υπό την ακόλουθη έννοια: Αν ν είναι το εφαπτόμενο διάνυσμα στο $t=0$ μιας C^1 καμπύλης $c: [a,b] \rightarrow S$ με ($0 \in (a,b)$ και) $c(0) = P$, τότε

$$\nabla f(P) \cdot \nu = 0.$$

Απόδειξη: Από την υπόθεσή μας, $c([a,b]) \subseteq S$, επομένως $f(c(t)) = \kappa$ για κάθε $t \in [a,b]$. Το εφαπτόμενο διάνυσμα της c στο $c(0)$ είναι το $\nu = c'(0)$. Εφαρμόζουμε τον κανόνα αλυσίδας στην σύνθετη συνάρτηση $f \circ c: [a,b] \rightarrow R$ και στο $t=0$, οπότε έχουμε, λαμβάνοντας υπόψη ότι η $f \circ c$ είναι σταθερή συνάρτηση,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d(f \circ c)}{dt}(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(c(0)) \cdot \frac{dx}{dt}(0) + \frac{\partial f}{\partial y}(c(0)) \cdot \frac{dy}{dt}(0) + \frac{\partial f}{\partial z}(c(0)) \cdot \frac{dz}{dt}(0) = \\ &= \nabla f(c(0)) \cdot c'(0) = \nabla f(P) \cdot \nu \quad (\text{όπου } c(t) = (x(t), y(t), z(t)), t \in [a,b]) \end{aligned}$$



Γεωμετρική σημασία της κλίσης: Το ∇f είναι ορθογώνιο στην επιφάνεια όπου η f είναι σταθερή.

Σημείωση Το ν και $\nabla f(P)$ μεταφέρονται παράλληλα ώστε να αρχίζουν από το $P = (x_0, y_0, z_0)$.

Παρατηρήσεις: 1) Το προηγούμενο θεώρημα ισχύει για κάθε C^1 συνάρτηση $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, ($D \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό) με $n \geq 2$. Στην περίπτωση $n = 2$, η $f(x, y) = \kappa$ ορίζει μια καμπύλη $C = f^{-1}(\{\kappa\}) \subseteq D$, την καμπύλη στάθμης της f .

2) Αν $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, ($D \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό) είναι C^1 συνάρτηση, τότε η διανυσματική συνάρτηση,

$$\nabla f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n : x \in D \rightarrow \nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right) \in \mathbb{R}^n$$

ονομάζεται διανυσματικό πεδίο κλίσεων της f και είναι βέβαια συνεχής. Η συνάρτηση αυτή έχει μεγάλη γεωμετρική σημασία καθώς μας δείχνει συγχρόνως δύο πράγματα, 1^ο την κατεύθυνση στην οποία η f αυξάνει ταχύτερα και 2^ο την κατεύθυνση που είναι ορθογώνια στις επιφάνειες στάθμης της f .

Από την προηγούμενη συζήτηση οδηγούμαστε στον ακόλουθο ορισμό.

10.3 Ορισμός Έστω $f : D \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ C^1 συνάρτηση ($D \subseteq \mathbb{R}^3$ ανοικτό) και S μια επιφάνεια στάθμης της f , δηλαδή S ορίζεται από μια εξίσωση της μορφής $f(x, y, z) = \kappa$. Το εφαπτόμενο επίπεδο της S σε ένα σημείο $P = (x_0, y_0, z_0)$ της S , ορίζεται από την εξίσωση,

$$\begin{aligned} \nabla f(P) \cdot (X - P) &= 0, \text{ αν } \nabla f(P) \neq 0, \quad X = (x, y, z) \\ \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(P)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(P)(y - y_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(P)(z - z_0) &= 0 \end{aligned}$$

Με περισσότερη ακρίβεια το εφαπτόμενο επίπεδο της S στο P είναι το σύνολο,

$E = \{x \in R^3 : \nabla f(x) \cdot (x - P) = 0\}$ Παρατηρούμε ότι αν c είναι μια C^1 καμπύλη της S με $c(0) = P$, τότε το σημείο $x = P + c'(0)$ ανήκει στο E .

Σημειώνουμε ότι στο προηγούμενο θεώρημα όπως και στον παραπάνω ορισμό θα μπορούσαμε εξίσου καλά να είχαμε εργασθεί και στις δύο ή και στις n -διαστάσεις, με τις προφανείς τροποποιήσεις.

Παρατήρηση. Έστω $D \subseteq R^2$ ανοικτό και $g : D \rightarrow R$ C^1 συνάρτηση. Όπως είδαμε στο παράδειγμα (4) η g ορίζει φυσιολογικά μια C^1 συνάρτηση, $f : D \times R \rightarrow R$, θέτοντας $f(x, y, z) = z - g(x, y), (x, y, z) \in D \times R$. Επίσης παρατηρήσαμε ότι η επιφάνεια S που ορίζεται από την εξίσωση $f(x, y, z) = 0$ συμπίπτει με το γράφημα $G(g)$ της g .

Περαιτέρω παρατηρούμε ότι το εφαπτόμενο επίπεδο της S στο $P = (x_0, y_0, z_0)$, όπου $\nabla f(P) \neq 0$, όπως ορίστηκε προηγουμένως, συμπίπτει με τον ορισμό του εφαπτόμενου επιπέδου του γραφήματος της g στο $(x_0, y_0, g(x_0, y_0))$ (πρβλ. τις παρατηρήσεις μετά τον ορισμό του διαφορικού συνάρτησης).

Πράγματι, $\frac{\partial f}{\partial x}(P) = -\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(P) = -\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)$ και $\frac{\partial f}{\partial z}(P) = 1$. Συνεπώς,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(P)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(P)(y - y_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(P)(z - z_0) = 0 \Leftrightarrow$$

$$-\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) - \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + z - z_0 = 0 \Leftrightarrow$$

$$z = g(x_0, y_0) + \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Παράδειγμα. Να βρεθεί ένα μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στην επιφάνεια $z = x^2y + y + x$ στο σημείο $P = (1, 0, 1)$. Έστω $f(x, y, z) = z - (x^2y + y + x)$, θεωρούμε την επιφάνεια που ορίζεται από την εξίσωση, $f(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow z = x^2y + y + x$. Το $P = (1, 0, 1) \in S$, η κλίση της f στο (x, y, z) είναι $\nabla f(x, y, z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = (-2xy, -x^2 - 1, 1)$. Επομένως, $\nabla f(P) = (-1, -2, 1)$.

Το διάνυσμα αυτό είναι κάθετο στην S στο σημείο $P = (1, 0, 1)$. Το ζητούμενο

μοναδιαίο διάνυσμα είναι το $\eta = \frac{\nabla f(P)}{\|\nabla f(P)\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, -2, 1)$

Ασκήσεις

1) Βρείτε την εξίσωση του επιπέδου που εφάπτεται στην επιφάνεια, $z = f(x, y)$ στο σημείο που υποδεικνύεται:

(α) $z = x^3 + y^3 - 6xy, (1, 2, -3)$, (β) $z = \cos x \cdot \cos y, \left(0, \frac{\pi}{2}, 0\right)$,

(γ) $z = \cos x \cdot \sin y, \left(0, \frac{\pi}{2}, 1\right)$, (δ) $z = \sqrt{x^2 + y^2}, (1, 0, 1)$

2) Βρείτε ένα μοναδικό κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια $\cos xy - e^z - 2 = 0$ στο $(1, \pi, 0)$

3) Έστω $r = (x, y, z)$. Αποδείξτε ότι, $\nabla \left(\frac{1}{\|r\|} \right) = -\frac{r}{\|r\|^3}$ στο $U = \mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\}$

και κατόπιν ότι, $\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{\|r\|} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{1}{\|r\|} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{1}{\|r\|} \right) = 0$.

4) Έστω $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ διαφορίσιμη συνάρτηση στο $a \in \mathbb{R}^3$. Αποδείξτε ότι ο πυρήνας της γραμμικής απεικόνισης $Df(a) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ είναι ο γραμμικός υπόχωρος του \mathbb{R}^3 που είναι κάθετος στην κλίση $\nabla f(a)$ της f στο a .

5) Υπολογίστε την κλίση ∇f για κάθε μια από τις συναρτήσεις:

$$(\alpha) \quad f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$(\beta) \quad f(x, y, z) = xy + yz + xz$$

$$(\gamma) \quad f(x, y, z) = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2},$$

$$(\delta) \quad f(x, y, z) = \cos x + y^2 + z$$

Για κάθε μια από τις παραπάνω συναρτήσεις, ποια είναι η κατεύθυνση της ταχύτερης αύξησης στο σημείο $(1, 1, 1)$;