Σύνολα μέτρου μηδέν στον R^n και ο χαρακτηρισμός του Lebesgue των Riemann ολοκληρωσίμων συναρτήσεων

17.1 Ορισμός. Έστω $\mathrm{A} \subseteq R^n$, λέμε ότι το Α έχει $n-$ διάστατο μέτρο μηδέν αν, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ακολουθία ανοικτών $n-$ διάστατων ορθογωνίων $(\mathfrak{R}_n)$ ώστε

$$\mathrm{A} \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathfrak{R}_n \text{ και } \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\mathfrak{R}_n) \le \varepsilon .$$

Γράφουμε τότε $\mu_n(\mathrm{A}) = 0$ ή $\mu(\mathrm{A}) = 0$ (και λέμε ότι το Α έχει μέτρο μηδέν) αν δεν υπάρχει αμφιβολία για την διάσταση.

Είναι εύκολο να ελέγξουμε ότι η έννοια του $n-$ διάστατου μέτρου μηδέν δεν εξαρτάται από το είδος των ορθογωνίων που καλύπτουν το Α, έτσι μπορούμε π.χ. να αντικαταστήσουμε στον ορισμό τα ανοικτά με κλειστά ορθογώνια.

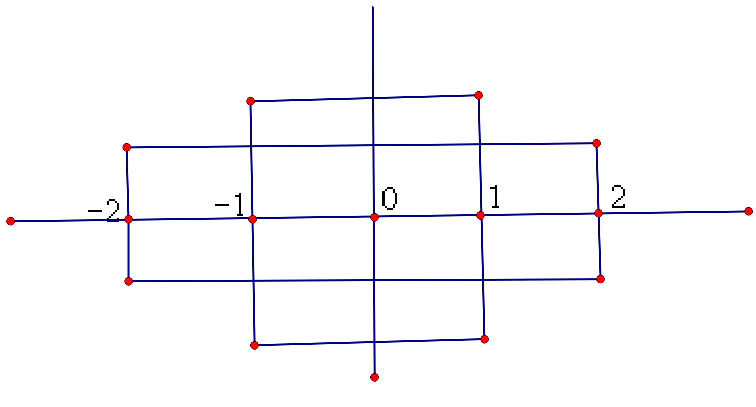
Παραδείγματα 1) Κάθε αριθμήσιμο υποσύνολο του R^n έχει $n-$ διάστατο μέτρο μηδέν.

Πράγματι, έστω $\mathrm{A} = \{x_1, ..., x_k, ...\} \subseteq R^n$. Αν $\varepsilon > 0$, επιλέγουμε για κάθε $k \ge 1$ ένα ανοικτό ορθογώνιο $\mathrm{I}_k \subseteq R^n$ με $x_k \in \mathrm{I}_k$ ώστε $\mu(\mathrm{I}_k) \le \frac{\varepsilon}{2^k}$. Έπεται προφανώς ότι

$$\mathrm{A} \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathrm{I}_k \text{ και } \sum_{k=1}^{\infty} \mu(\mathrm{I}_k) \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \varepsilon$$

2) Κάθε ευθεία του R^2 έχει διδιάστατο μέτρο μηδέν.

Ας αποδείξουμε το αποτέλεσμα – για λόγους απλότητας- για την ευθεία των πραγματικών αριθμών, δηλαδή το σύνολο $\mathrm{A} = \{(x,0) : x \in R\} \subseteq R^2$. Έστω $\varepsilon > 0$, καλύπτουμε τότε την ευθεία Α με την ακολουθία των ορθογωνίων $\mathfrak{R}_n = [-n, n] \times \left[-\frac{\varepsilon}{2n2^{n+1}}, \frac{\varepsilon}{2n2^{n+1}}\right], n \ge 1$.



Είναι προφανές ότι $\mathrm{A} \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathfrak{R}_n$. Επειδή $\mu(\mathfrak{R}_n) = \frac{\varepsilon}{2^n}, n \ge 1$ και

$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(\mathfrak{R}_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \varepsilon$, έχουμε το συμπέρασμα.

Παρατηρήσεις 1) Η έννοια του $n-$ διάστατου μέτρου μηδέν εξαρτάται από τον χώρο που «ζει» το σύνολο που εξετάζουμε, έτσι η ευθεία των πραγματικών έχει διδιάστατο μέτρο μηδέν ως υποσύνολο του R^2, όμως ως υποσύνολο του εαυτού της έχει βέβαια (μονοδιάστατο) μέτρο που είναι διαφορετικό του μηδενός (αφού απειρίζεται).

2) Το προηγούμενο αποτέλεσμα γενικεύεται σε κάθε διάσταση ($n \ge 2$). Έτσι αποδεικνύεται ότι κάθε υπερεπίπεδο του R^n ($n \ge 2$) έχει $n-$ διάστατο μέτρο μηδέν. (Άσκηση).

Δεν είναι δύσκολο να αποδειχθεί και το ακόλουθο αποτέλεσμα η απόδειξη του οποίου αφήνεται ως άσκηση.

17.2 Πρόταση Έστω $\mathrm{A}_k, k \ge 1$ μια ακολουθία υποσυνόλων του R^n που το καθένα έχει $n-$ διάστατο μέτρου μηδέν, τότε το σύνολο $\mathrm{A} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{A}_n$ έχει $n-$ διάστατο μέτρου μηδέν.

Σύνολα διδιάστατου μέτρου μηδέν στον R^2 που παρουσιάζουν μεγάλο ενδιαφέρον για εμάς είναι τα γραφήματα συνεχών πραγματικών συναρτήσεων πραγματικής μεταβλητής.

17.3 Θεώρημα Έστω $f:[a,b] \subseteq R \to R$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση (ιδιαίτερα η f είναι συνεχής) τότε το γράφημα της f έχει διδιάστατο μέτρο μηδέν.

Απόδειξη: Έστω $\varepsilon > 0$, επειδή f είναι ολοκληρώσιμη ικανοποιεί το κριτήριο Riemann. Άρα υπάρχει διαμέριση $\mathrm{P} = \{t_0 = a < t_1 < \ldots < t_n = b\}$ του $[a,b]$, ώστε αν $m_k = \inf\{f(x) : x \in [t_{k-1}, t_k]\}$ και $\mathrm{M}_k = \sup\{f(x) : x \in [t_{k-1}, t_k]\}$, $k = 1, 2, \ldots, n$ τότε $U(f,\mathrm{P}) - L(f,\mathrm{P}) = \sum_{k=1}^{n} (t_k - t_{k-1})(\mathrm{M}_k - m_k) \le \varepsilon$ (1).

Παρατηρούμε ότι τα ορθογώνια $\mathfrak{R}_k = [t_{k-1}, t_k] \times [m_k, \mathrm{M}_k], k = 1, 2, \ldots, n$ καλύπτουν το γράφημα της f, $G(f) = \{(x, f(x)) : x \in [a,b]\}$. Πράγματι, αν $x \in [a,b]$ τότε υπάρχει $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ ώστε $x \in [t_{k-1}, t_k]$, άρα $(x, f(x)) \in [t_{k-1}, t_k] \times [m_k, \mathrm{M}_k] = \mathfrak{R}_k$.

Επί πλέον από την (1) έπεται προφανώς ότι $\sum_{k=1}^{n} \mu(\mathfrak{R}_k) = \sum_{k=1}^{n} (t_k - t_{k-1})(\mathrm{M}_k - m_k) \le \varepsilon$.

Συνεπώς το $G(f)$ έχει διδιάστατο μέτρο μηδέν.

Στην περίπτωση που η f είναι συνεχής, τότε όπως γνωρίζουμε ικανοποιεί το κριτήριο του Riemann (ισοδύναμα είναι ολοκληρώσιμη). Ας υπενθυμίσουμε την απόδειξη αυτού του ισχυρισμού:

Έστω $\varepsilon > 0$, επειδή η f είναι ομοιόμορφα συνεχής, ως συνεχής στο συμπαγές $[a,b]$, υπάρχει $\delta > 0$, ώστε $x, y \in [a,b]$ και $|x - y| \le \delta$ τότε $|f(x) - f(y)| \le \frac{\varepsilon}{b-a}$ (2).

Επιλέγουμε μια διαμέριση $\mathrm{P} = \{t_0 = a < t_1 < \ldots < t_n = b\}$ του $[a,b]$ με λεπτότητα $\delta(\mathrm{P}) = \max\{t_k - t_{k-1} : 1 \le k \le n\} \le \delta$ και παρατηρούμε (με τον προηγούμενο συμβολισμό) ότι όπως έπεται από την (2) θα έχουμε, $U(f,\mathrm{P}) - L(f,\mathrm{P}) =$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\mathrm{M}_k - m_k\right)\cdot\left(t_k - t_{k-1}\right) \le \frac{\varepsilon}{b-a}\cdot\sum_{k=1}^{n}\left(t_k - t_{k-1}\right) = \varepsilon .$$

Έτσι η f ικανοποιεί το κριτήριο του Riemann και συνεπώς είναι ολοκληρώσιμη.

Το προηγούμενο θεώρημα αποδεικνύεται με τον ίδιο τρόπο και για συναρτήσεις πολλών μεταβλητών.

17.4 Θεώρημα Έστω $\mathfrak{R}$ κλειστό ορθογώνιο του R^n και $f:\mathfrak{R}\to R$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση (ιδιαίτερα η f είναι συνεχής) τότε το γράφημα της f έχει $n+1-$ διάστατο μέτρο μηδέν (ως υποσύνολο του R^{n+1}).

Παραδείγματα 1) Ο μοναδιαίος κύκλος $S^1 = \left\{(x,y)\in R^2 : x^2+y^2=1\right\}$ του R^2 έχει διδιάστατο μέτρο μηδέν.
Πράγματι, ο S^1 είναι ένωση του άνω και του κάτω ημικυκλίου που είναι γραφήματα των συναρτήσεων $f(x)=\sqrt{1-x^2}, x\in[-1,1]$ και $g(x)=-\sqrt{1-x^2}, x\in[-1,1]$ αντίστοιχα. Επομένως $\mu_2\left(S^1\right)=0$.

2) Η επιφάνεια της μοναδιαίας σφαίρας $S^2=\left\{(x,y,z): x^2+y^2+z^2=1\right\}$ του R^3 έχει τρισδιάστατο μέτρο μηδέν αφού μπορεί να γραφεί ως ένωση του άνω και του κάτω ημισφαιρίου που είναι γραφήματα των συναρτήσεων, $f(x,y)=\sqrt{1-\left(x^2+y^2\right)}$ και $g(x,y)=-\sqrt{1-\left(x^2+y^2\right)}$, με κοινό πεδίο ορισμού τον κλειστό δίσκο $\widehat{\mathrm{B}}(0,1)=\left\{(x,y)\in R^2 : x^2+y^2\le 1\right\}$ του Ευκλειδείου επιπέδου.

Τα δύο προηγούμενα παραδείγματα εύκολα γενικεύονται στον R^n . Έτσι η επιφάνεια $S^{n-1}=\left\{\left(x_1,\dots,x_n\right)\in R^n : x_1^2+\dots+x_n^2=1\right\}, n\ge 2$ της μοναδιαίας σφαίρας του R^n έχει $n-$ διάστατο μέτρο μηδέν (Άσκηση).

3) Η καμπύλη (παραβολή) $C=\left\{\left(x,x^2\right): x\in R\right\}$ έχει διδιάστατο μέτρο μηδέν. Πράγματι, θέτομε $C_n=\left\{\left(x,x^2\right): x\in[-n,n]\right\}$ για $n\in N$, τότε η C_n είναι γράφημα της συνεχούς συνάρτησης $f(x)=x^2$ περιορισμένης στο διάστημα $[-n,n]$. Επειδή $\mu_2\left(C_n\right)=0$ για κάθε $n\ge 1$ και $C=\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$ έχομε το συμπέρασμα.

Διατυπώνουμε τώρα, χωρίς απόδειξη, ένα σημαντικό αποτέλεσμα του Lebesgue που χαρακτηρίζει τις κατά Riemann ολοκληρώσιμες συναρτήσεις.

17.5 Θεώρημα Έστω $\mathfrak{R}$ κλειστό ορθογώνιο του R^n και $f:\mathfrak{R}\to R$ φραγμένη συνάρτηση. Οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι:
(ι) Η f είναι ολοκληρώσιμη.
(ιι) Το σύνολο των σημείων ασυνέχειας της f έχει $n-$ διάστατο μέτρο μηδέν.

Jordan μετρήσιμα υποσύνολα του R^n .

Η θεωρία ολοκλήρωσης που αναπτύξαμε μέχρι τώρα αφορά πολλαπλά ολοκληρώματα $\int_{\Re} f(x)dx$ όπου $\Re$ κλειστό ορθογώνιο του Ευκλειδείου χώρου R^n.
Όμως στις εφαρμογές είναι απαραίτητο να έχουμε έναν ορισμό του πολλαπλού ολοκληρώματος σε μια κλάση υποσυνόλων του R^n ευρύτερη των ορθογωνίων. Έτσι δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό.

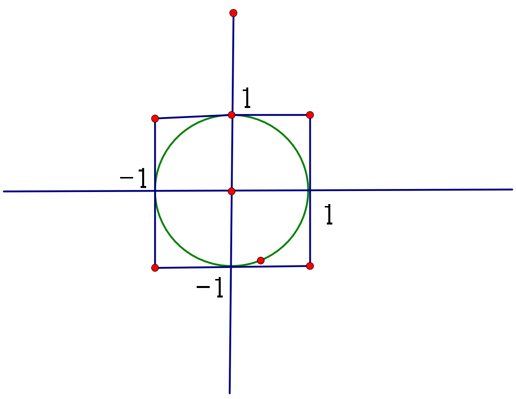
17.6 Ορισμός. Έστω $\mathrm{A} \subseteq R^n$ φραγμένο και $f : \mathrm{A} \to R$ φραγμένη συνάρτηση. Έστω ακόμη $\Re$ ένα κλειστό ορθογώνιο του R^n που περιέχει το Α, ορίζουμε μια συνάρτηση g επί του $\Re$ με τον ακόλουθο τρόπο: $g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{αν } x \in \mathrm{A} \\ 0, & \text{αν } x \in \Re - \mathrm{A} \end{cases}$

Η f λέγεται ολοκληρώσιμη (κατά Riemann) επί του Α αν το ολοκλήρωμα (Riemann) $\int_{\Re} g(x)dx$ υπάρχει. Γράφουμε τότε $\int_{\mathrm{A}} f(x)dx = \int_{\Re} g(x)dx$

Σημείωση Δεν είναι δύσκολο να αποδείξουμε (π.χ. θεωρώντας τα αθροίσματα Riemann που προσεγγίζουν το $\int_{\Re} g(x)dx$) ότι το ολοκλήρωμα $\int_{\mathrm{A}} f(x)dx$ είναι <u>ανεξάρτητο</u> του ορθογωνίου που περιέχει το Α.

Ας εξετάσουμε τον καινούριο ορισμό με ένα συγκεκριμένο παράδειγμα: Έστω $f(x,y) = x^2 + yx, (x,y) \in R^2$ και Α ο κλειστός μοναδιαίος δίσκος του R^2, δηλαδή $\mathrm{A} = \{(x,y) : x^2 + y^2 \le 1\}$. Το τετράγωνο $\Re = [-1,1] \times [-1,1]$ περιέχει τον δίσκο Α και μένει να εξακριβώσουμε αν το ολοκλήρωμα $\int_{\Re} g(x,y)dxdy$ υπάρχει όπου

$$g(x,y) = \begin{cases} x^2 + xy, (x,y) \in \mathrm{A} \\ 0, \quad (x,y) \in \Re - \mathrm{A} \end{cases}$$



Παρατηρούμε ότι η g δεν είναι συνεχής στο τετράγωνο $\Re$, μάλιστα τα σημεία ασυνέχειας της g είναι ακριβώς τα σημεία του μοναδιαίου κύκλου $S^1 = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\}$ που έχουν βέβαια άπειρο (υπεραριθμήσιμο) πλήθος. Παρόλα αυτά η συνάρτηση g είναι ολοκληρώσιμη στο $\Re$ όπως έπεται εύκολα από τον χαρακτηρισμό των Riemann ολοκληρωσίμων συναρτήσεων του Lebesgue και το γεγονός (που ήδη γνωρίζουμε) ότι καμπύλες όπως ο κύκλος που είναι πεπερασμένες ενώσεις γραφημάτων συνεχών συναρτήσεων έχουν μέτρο μηδέν.
Από το παράδειγμα που μόλις εξετάσαμε προκύπτει ότι πρέπει να είμαστε προσεκτικοί με τον ορισμό του πολλαπλού ολοκληρώματος πάνω από ένα φραγμένο

σύνολο $A \subseteq R^n$ που δώσαμε πριν, και αυτό διότι η διαδικασία αυτή εισάγει καινούριες ασυνέχειες στην συνάρτησή μας (που βρίσκονται στο σύνορο του A) και αυτό βρίσκεται σε αντίθεση με τον χαρακτηρισμό Lebesgue των ολοκληρωσίμων συναρτήσεων. Από το ίδιο παράδειγμα (αλλά και από άλλα παραδείγματα) προκύπτει ακόμη ότι σύνολα κατάλληλα για την ολοκλήρωση είναι αυτά που το σύνορό τους είναι σχετικά ομαλό.

Ας ξεκινήσουμε την διερεύνηση των συνόλων με ομαλό σύνορο (ως προς την ολοκλήρωση) με την ακόλουθη.

Παρατήρηση. Έστω $A \subseteq R^n$, θεωρούμε την χαρακτηριστική συνάρτηση $f = x_A$ του συνόλου A. Τότε είναι εύκολο να αποδείξουμε ότι αν $x \in R^n$, το x είναι σημείο ασυνέχειας της f αν και μόνο αν το x ανήκει στο <u>σύνορο</u> του A. (Άσκηση). Υπενθυμίζουμε ότι το σύνορο ∂A του A ορίζεται ως, $\partial A = \overline{A} \cap \overline{R^n - A}$ και ακόμη ότι ισχύει η εξίσωση , $R^n = \operatorname{int}\left(R^n - A\right) \cup \partial A \cup \operatorname{int}\left(A\right)$.

Έπεται αμέσως από των χαρακτηρισμό του Lebesgue των Riemann ολοκληρωσίμων συναρτήσεων και την παρατήρηση αυτή η ακόλουθη.

17.7Πρόταση Έστω $A \subseteq R^n$ φραγμένο σύνολο και $f = x_A$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

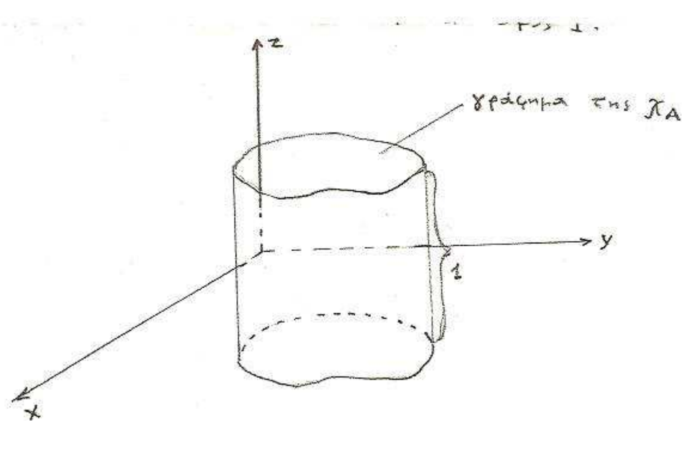
(ι) Η f είναι ολοκληρώσιμη.

(ιι) Το σύνορο του A έχει $n-$ διάστατο μέτρο μηδέν ($\mu_n\left(\partial A\right) = 0$).

17.8 Ορισμός Θα λέμε ότι ένα φραγμένο υποσύνολο $A \subseteq R^n$ <u>έχει περιεχόμενο</u> ή ότι είναι <u>Jordan μετρήσιμο</u> υποσύνολο του R^n, αν η χαρακτηριστική συνάρτησή του $f = x_A$ είναι ολοκληρώσιμη, ισοδύναμα αν $\mu_n\left(\partial A\right) = 0$ (σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση).

Αν το $A \subseteq R^n$ είναι Jordan μετρήσιμο ορίζουμε τότε (ως $n-$ διάστατο) <u>περιεχόμενο</u> ή ($n-$ διάστατο) <u>όγκο</u> του A τον αριθμό $\mu_n\left(A\right) = \int\limits_A 1dx \left(= \int\limits_{\Re} x_A dx \right)$, δηλαδή το ολοκλήρωμα Riemann της χαρακτηριστικής συνάρτησης του A. Ο όγκος του A συμβολίζεται και με $V\left(A\right)$.

Ο ορισμός του όγκου είναι φυσιολογικός επειδή ο χώρος κάτω από το γράφημα της $f = x_A$ είναι μια « κυλινδρική» περιοχή με βάση το σύνολο A και ύψος 1.



Παρατηρήσεις 1) Έστω $\mathrm{A}\subseteq R^n$ φραγμένο, τότε το Α είναι Jordan μετρήσιμο με <u>περιεχόμενο μηδέν</u> (δηλαδή $\mu_n(\mathrm{A})=\int\limits_{\mathrm{A}}1dx=0$) αν και μόνο αν, για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει μια πεπερασμένη ακολουθία $\Re_1,...,\Re_N$ από ορθογώνια ώστε $\mathrm{A}\subseteq\bigcup\limits_{k=1}^{N}\Re_k$ και $\sum\limits_{k=1}^{N}\mu(\Re_k)\le\varepsilon$ (η απόδειξη αφήνεται ως άσκηση). Έπεται προφανώς ότι αν το Α έχει περιεχόμενο μηδέν τότε έχει και μέτρο μηδέν.

2)Αν $\mathrm{A}\subseteq R^n$ είναι συμπαγές τότε το Α έχει ($n-$ διάστατο) μέτρο μηδέν , αν και μόνο αν, έχει ($n-$ διάστατο) περιεχόμενο μηδέν (Άσκηση).
Έπεται ιδιαίτερα ότι αν $\mathrm{A}\subseteq R^n$ φραγμένο, τότε Α Jordan μετρήσιμο αν και μόνο αν το σύνορό του έχει περιεχόμενο μηδέν.

3)Ένα φραγμένο υποσύνολο $\mathrm{A}\subseteq R^n$ ενδέχεται να έχει μέτρο μηδέν αλλά όχι περιεχόμενο μηδέν. Ένα τέτοιο παράδειγμα (στην διάσταση $n=1$) είναι το σύνολο $\mathrm{A}=Q\bigcap[0,1]$ των ρητών του διαστήματος $[0,1]$. Πράγματι η χαρακτηριστική συνάρτηση $f=x_{\mathrm{A}}$ (= η συνάρτηση του Dirichlet), δεν είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$, αφού για κάθε διαμέριση Ρ του $[0,1]$ έχουμε ότι $L(f,\mathrm{P})=0$ και $U(f,\mathrm{P})=1$.
Είναι βέβαια σαφές ότι το Α ως αριθμήσιμο υποσύνολο του R έχει (μονοδιάστατο) μέτρο μηδέν. (Σημειώνομε ότι, το σύνορο $\partial\mathrm{A}$ του Α είναι το σύνολο $[0,1]$ και άρα $\mu(\partial\mathrm{A})=1$.)

4)Η κλάση J_n των Jordan μετρήσιμων υποσυνόλων του R^n είναι μια <u>άλγεβρα</u>, δηλαδή είναι κλειστή για τις πεπερασμένες ενώσεις και τομές, καθώς και για τα συμπληρώματα. (Η απόδειξη αφήνεται ως άσκηση. Παρατηρήστε ότι $\partial(\mathrm{A}\bigcup\mathrm{B})\subseteq\partial(\mathrm{A})\bigcup\partial(\mathrm{B})$ για $\mathrm{A},\mathrm{B}\subseteq R^n$).

Τα σύνολα της άλγεβρας J_n έχουν ομαλό σύνορο και αυτό επιτρέπει την ολοκλήρωση φραγμένων συναρτήσεων πάνω σε αυτά οι οποίες είναι σχετικά ομαλές.

17.9Θεώρημα Έστω $\mathrm{A}\subseteq R^n$ Jordan μετρήσιμο σύνολο και $f:\mathrm{A}\to R$ φραγμένη συνάρτηση. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:
(ι) Η f είναι ολοκληρώσιμη επί του Α.
(ιι) Το σύνολο των σημείων ασυνέχειας της f στο Α είναι σύνολο μέτρου μηδέν.

Απόδειξη: Έστω $\Re$ κλειστό ορθογώνιο του R^n που περιέχει το Α. Επεκτείνουμε την f σε μια συνάρτηση $g:\Re\to R$ (σύμφωνα με τον σχετικό ορισμό) θέτοντας

$$g(x)=\begin{cases}f(x), x\in\mathrm{A}\\0, x\in\Re-\mathrm{A}\end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι η g παραμένει φραγμένη και ότι ασυνέχειες της f κληροδοτούνται στην g. Όμως η g ενδέχεται να έχει ασυνέχειες σε κάποια ή και σ' όλα από τα συνοριακά σημεία του Α. Επειδή το Α είναι Jordan μετρήσιμο έπεται προφανώς ότι η g είναι ολοκληρώσιμη ακριβώς τότε αν το σύνολο των σημείων ασυνέχειας της f έχει μέτρο μηδέν.

Έπεται προφανώς το ακόλουθο

17.10 Πόρισμα Έστω $A \subseteq R^n$ Jordan μετρήσιμο. Αν η συνάρτηση $f : A \to R$ είναι συνεχής και φραγμένη τότε η f είναι ολοκληρώσιμη επί του A.

Παραδείγματα Jordan μετρήσιμων συνόλων. 1) Κάθε πεπερασμένο υποσύνολο του R^n έχει περιεχόμενο μηδέν (προφανές).
Γενικότερα κάθε φραγμένο υποσύνολο $A \subseteq R^n$ με πεπερασμένο σύνολο σημείων συσσώρευσης (A' πεπερασμένο) έχει περιεχόμενο μηδέν (Άσκηση).

2)Κάθε φραγμένο ορθογώνιο $\mathfrak{R}$ του R^n είναι Jordan μετρήσιμο σύνολο (αν $\mathfrak{R} = [a_1, b_1] \times ... \times [a_n, b_n]$ τότε ο όγκος του είναι $V(\mathfrak{R}) = (b_1 - a_1)...(b_n - a_n)$).

3)Κάθε σφαίρα του Ευκλειδείου χώρου (ανοικτή ή κλειστή) είναι Jordan μετρήσιμο σύνολο. Αυτό το αποτέλεσμα το έχουμε ήδη αποδείξει για την μοναδιαία σφαίρα του R^n (αφού η επιφάνειά της S^{n-1} έχει μέτρο μηδέν). Το γενικότερο αποτέλεσμα αποδεικνύεται παρόμοια. Ιδιαίτερα στο R κάθε φραγμένο διάστημα είναι Jordan μετρήσιμο (γιατί;).

4)Κάθε φραγμένο υποσύνολο του R^2 του οποίου το σύνορο αποτελείται από ένα πεπερασμένο σύνολο γραφημάτων συνεχών πραγματικών συναρτήσεων πραγματικής μεταβλητής είναι Jordan μετρήσιμο. Γενικότερα, κάθε φραγμένο υποσύνολο του $R^n (n \geq 2)$, του οποίου το σύνορο είναι πεπερασμένη ένωση γραφημάτων συνεχών συναρτήσεων $n-1$ μεταβλητών είναι Jordan μετρήσιμο, αφού τότε το σύνορό του έχει $n-$ διάστατο μέτρο μηδέν.

5)Έστω $f : [a,b] \to R$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση ώστε $f \geq 0$ στο $[a,b]$. Τότε το σύνολο $D = \{(t,z) \in R^2 : t \in [a,b] \text{ και } 0 \leq z \leq f(t)\}$ είναι Jordan μετρήσιμο στο R^2 (Άσκηση).

Παρατήρηση Αποδεικνύεται ότι κάθε φραγμένο και κυρτό υποσύνολο του R^n είναι Jordan μετρήσιμο.