

Αλλαγή μεταβλητής στο τριπλό ολοκλήρωμα

Υπενθυμίζουμε (Θεωρημα 20.2) το γενικό τύπο αλλαγής μεταβλητής στο πολλαπλό ολοκλήρωμα:

$$\int_{B=g(A)} f(y)dy = \int_A f(g(x)) \cdot |\det J_{g(x)}| dx \quad (1),$$

όπου $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ Jordan μετρήσιμα υποσύνολα του \mathbb{R}^n , $g: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ μετασχηματισμός συντεταγμένων με $g(A) = B$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$, ανοικτό με $\bar{A} \subseteq U$ και $f: B \rightarrow \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση.

Στην περίπτωση $n=3$ (περίπτωση τριπλού ολοκληρώματος) ο τύπος (1) γράφεται: ($g(A) = B$, $A, B \in \mathbb{R}^3$, $g: U \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\bar{A} \subseteq U \subseteq \mathbb{R}^3$).

$$\int_{B=g(A)} f(x, y, z) d(x, y, z) = \int_A f(x(u, v, \omega), y(u, v, \omega), z(u, v, \omega)) \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, \omega)} \right| d(u, v, \omega) \quad (2)$$

όπου $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, \omega)}$ συμβολίζει την ορίζουσα του πίνακα Jacobi $\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial \omega} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial \omega} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial \omega} \end{pmatrix}$ του

μετασχηματισμού συντεταγμένων $g(u, v, \omega) = (x(u, v, \omega), y(u, v, \omega), z(u, v, \omega))$.

Επίσης από τον τύπο (2) για $f(x, y, z) = 1$ (η σταθερή συνάρτηση ίση με 1)

παίρνουμε τον όγκο $V(B)$ του B :
$$V(B) = \int_A \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, \omega)} \right| d(u, v, \omega).$$

Εφαρμογές. 1) Ο μετασχηματισμός των κυλινδρικών συντεταγμένων.

Έστω

$$g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3: g(r, \theta, z) = (r \cos \theta, r \sin \theta, z) \text{ δηλ. } x = r \cos \theta, y = r \sin \theta \text{ και } z = z \quad (1)$$

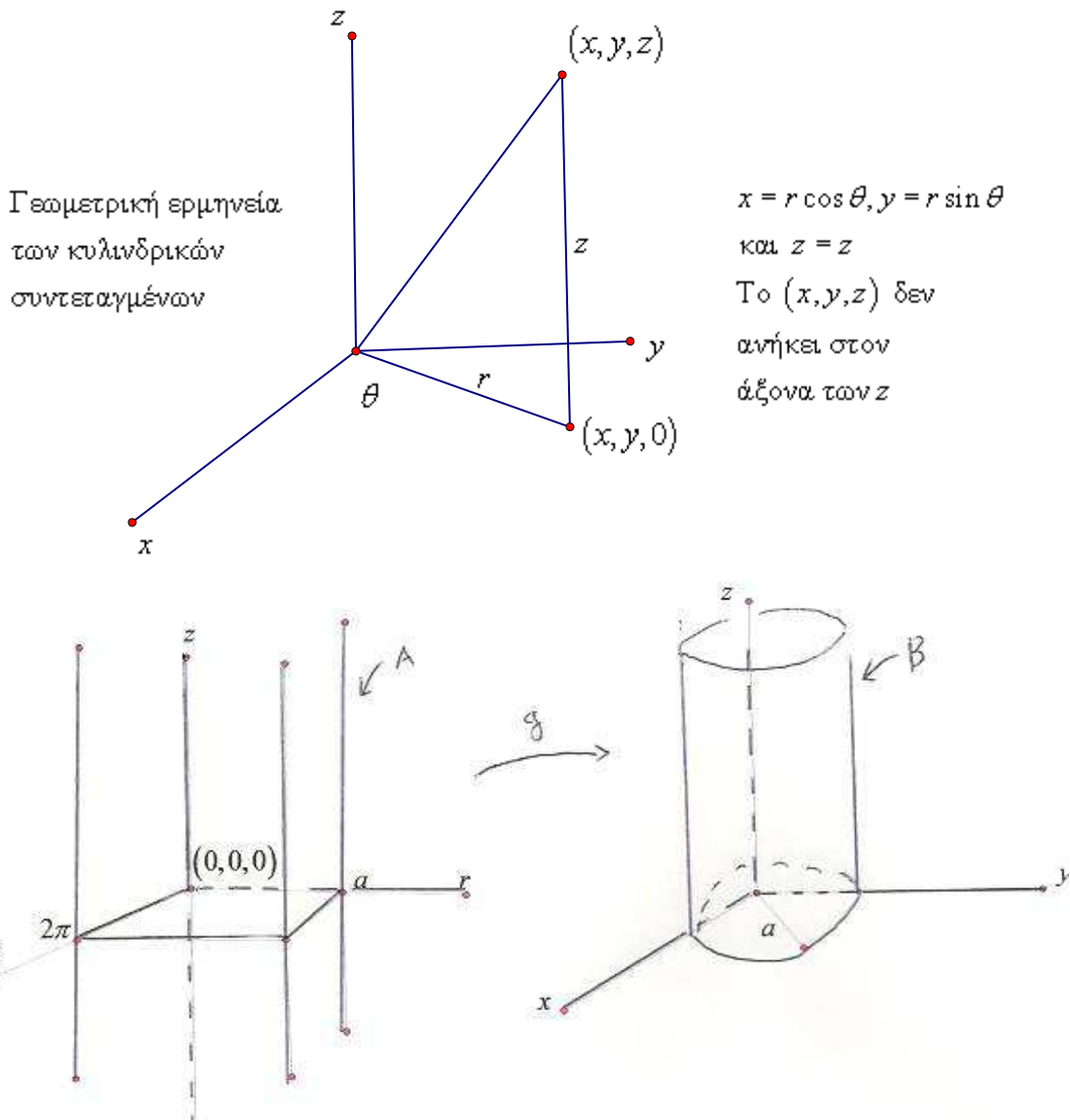
Έπεται ότι η g είναι μία C^∞ απεικόνιση καθώς οι συντεταγμένες συναρτήσεις $x(r, \theta, z)$, $y(r, \theta, z)$, $z(r, \theta, z)$ της g είναι C^∞ διαφορίσιμες. Η τριάδα (r, θ, z) είναι οι κυλινδρικές συντεταγμένες ενός σημείου $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 - \{(0, 0, z): z \in \mathbb{R}\}$.

Με άλλα λόγια αν ένα σημείο (x, y, z) δεν ανήκει στον άξονα των z , τότε μετατρέπουμε το (x, y) σε πολικές συντεταγμένες και αφήνουμε την συντεταγμένη z αμετάβλητη.

Η απεικόνιση που ορίζουν οι εξισώσεις (1) δεν είναι βέβαια 1-1, αν όμως περιορίσουμε κατάλληλα το πεδίο ορισμού της γίνεται 1-1. Έτσι αν απαιτήσουμε $r > 0$ και $\theta \in [0, 2\pi)$ (ή $\theta \in (-\pi, \pi]$) τότε η $g|_{(0, +\infty) \times [0, 2\pi) \times \mathbb{R}}$ είναι 1-1 συνάρτηση και $g(V) = \mathbb{R}^3 - \{(0, 0, z): z \in \mathbb{R}\}$, όπου $V = (0, +\infty) \times [0, 2\pi) \times \mathbb{R}$. Έτσι αν $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ δεν ανήκει στον άξονα των z οι εξισώσεις (1) έχουν μοναδική λύση $(r, \theta, z) \in V$. Αν περιορίσουμε περαιτέρω την g στο ανοικτό

$U = (0, +\infty) \times (0, 2\pi) \times \mathbb{R}$ τότε $g(U) = \mathbb{R}^3 - \{(x, 0, z) : x \geq 0 \text{ και } z \in \mathbb{R}\}$ ανοικτό σύνολο και η $g : U \rightarrow g(U)$ είναι μια αμφιδιαμόρφωση.

Ο όρος κυλινδρικές συντεταγμένες δικαιολογείται από το γεγονός ότι αν $C = \{(a, \theta, z) : \theta \in [0, 2\pi), z \in \mathbb{R}\}$, όπου a θετική σταθερά τότε $g(C) = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = a^2\}$ = κυλινδρική επιφάνεια ακτίνας a κάθετη στο xy επίπεδο. Η εικόνα του $A = \{(r, \theta, z) : 0 \leq r \leq a, \theta \in [0, 2\pi) \text{ και } z \in \mathbb{R}\}$ μέσω της g είναι το $B = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq a^2\}$, δηλαδή το εσωτερικό του κυλίνδρου ακτίνας a μαζί με την κυλινδρική επιφάνεια.



$$g(r, \theta, z) = (r \cos \theta, r \sin \theta, z)$$

Η αντίστροφη της $g|_V$ ($V = (0, +\infty) \times [0, 2\pi) \times \mathbb{R}$) είναι η

$$h = g^{-1} : \mathbb{R}^3 - \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\} \text{ και } h(x, y, z) = (r, \theta, z) \text{ με } r = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ και } \theta = \eta$$

μοναδική γωνία στο $[0, 2\pi)$ μεταξύ του θετικού ημιάξονα Ox και της ημιευθείας $\{t(x, y) : t \geq 0\}$.

Η Ιακωβιανή ορίζουσα της απεικόνισης g είναι η

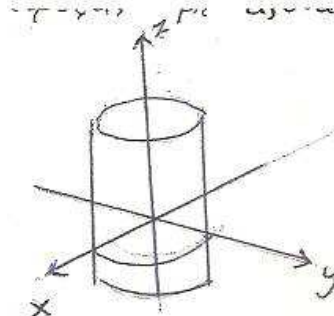
$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r \quad (= \det J_g)$$

Επομένως η $g|U = (0, +\infty) \times (0, 2\pi) \times R$ είναι ένας μετασχηματισμός συντεταγμένων με $g(U) = R^3 - \{(x, 0, z) : x \geq 0 \text{ και } z \in R\}$, αφού $g|U$ 1-1, C^∞ - διαφορίσιμη και $\det J_g = r > 0$ επί του U .

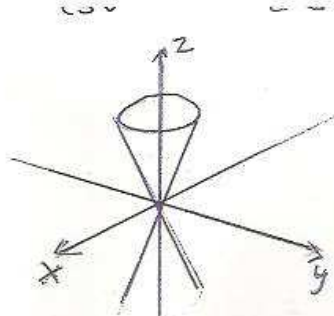
Ο τύπος (2) γίνεται τότε για $\bar{A} \subseteq U$, A Jordan μετρήσιμο, $B = g(A)$ και $f : B \rightarrow R$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση, $\int_B f(x, y, z) d(x, y, z) = \int_A f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) \cdot r d(r, \theta, z)$

και $V(B) = \int_A r d(r, \theta, z)$

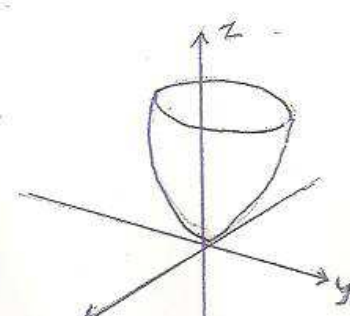
Σημείωση Οι κυλινδρικές συντεταγμένες είναι χρήσιμες για την αναπαράσταση κυλινδρικών επιφανειών εκ περιστροφής με άξονα τον z'



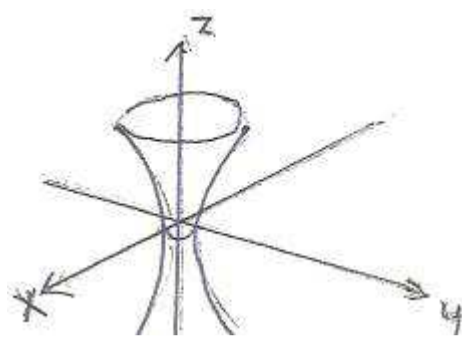
Καρτεσιανή εξίσωση
 $x^2 + y^2 = a^2$
 κυλινδ. εξίσωση
 $r = a$



κώνος
 $x^2 + y^2 = z^2$
 $r = z$



παραβολοειδής
 $x^2 + y^2 = az$
 $r^2 = az$



υπερβολοειδής
 $x^2 + y^2 - z^2 = 1$
 $r^2 = z^2 + 1$

2) Ο μετασχηματισμός των σφαιρικών συντεταγμένων.

Θεωρούμε την απεικόνιση $g: R^3 \rightarrow R^3$ με

$$g(\rho, \theta, \varphi) = (\rho \sin \varphi \cos \theta, \rho \sin \varphi \sin \theta, \rho \cos \varphi). \text{ Η } g \text{ είναι } C^\infty \text{-διαφορίσιμη}$$

απεικόνιση και αν την περιορίσουμε σε κατάλληλο υποσύνολο του R^3 γίνεται 1-1.

Η g ερμηνεύεται γεωμετρικά ως εξής: Έστω $(x, y, z) \in R^3$ με (x, y, z) να μην ανήκει

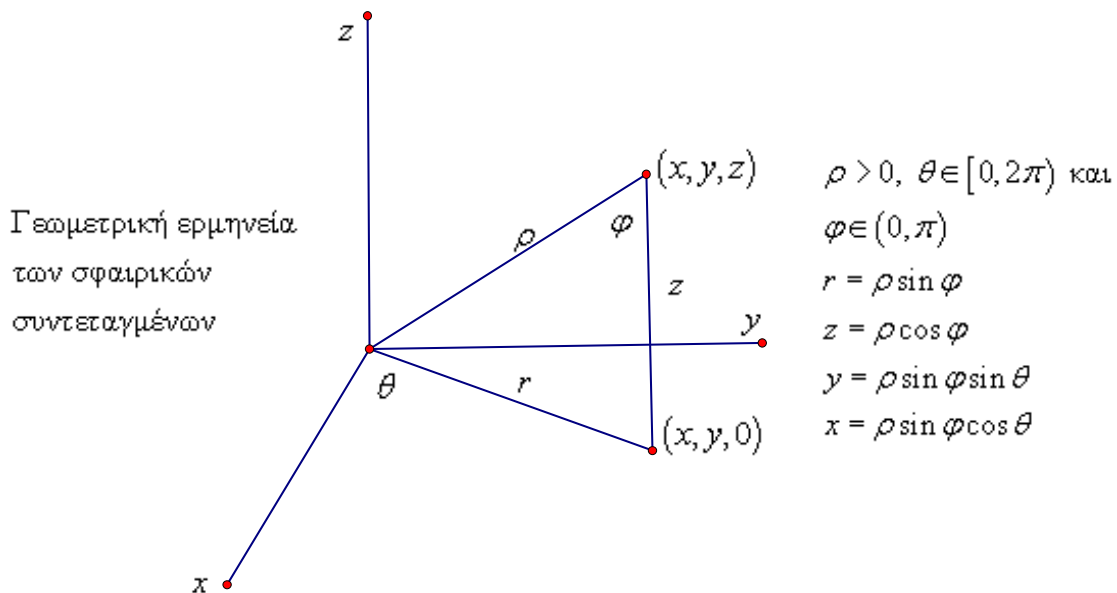
στον άξονα των z . Θέτουμε, $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ και παριστάνουμε τα x και y με πολικές συντεταγμένες στο xy επίπεδο: $x = r \cos \theta$ και $y = r \sin \theta$, όπου

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ και } \theta \in [0, 2\pi) \text{ (} \theta \text{ είναι η γωνία που σχηματίζει ο ημιάξονας } Ox \text{ με}$$

την προβολή της ημιευθείας $\{t(x, y, z) : t \geq 0\}$ στο xy επίπεδο. Η συντεταγμένη z

δίνεται από τον τύπο $z = \rho \cos \varphi$, όπου $\varphi \in (0, \pi)$ η κυρτή γωνία μεταξύ της

ημιευθείας $\{t(x, y, z) : t \geq 0\}$ και της ημιευθείας Oz , (εργαζόμαστε στο επίπεδο που ορίζεται από τον άξονα των z και το διάνυσμα (x, y, z)).



Χρησιμοποιώντας το εσωτερικό γινόμενο, μπορούμε να εκφράσουμε την φ ως εξής:

$$\cos \varphi = \frac{v \cdot \kappa}{\|v\|}, \text{ δηλαδή } \varphi = \cos^{-1} \left(\frac{v \cdot \kappa}{\|v\|} \right) \text{ (όπου } v = (x, y, z) \text{ και } \kappa = (0, 0, 1) \text{)}$$

Δεδομένου ότι $r = \rho \sin \varphi$ καταλήγουμε στις σφαιρικές συντεταγμένες (ρ, θ, φ) του σημείου (x, y, z) (με $|x| + |y| > 0$)

$$x = \rho \sin \varphi \cos \theta, \quad y = \rho \sin \varphi \sin \theta, \quad z = \rho \cos \varphi \text{ όπου } \rho > 0, 0 \leq \theta < 2\pi, 0 < \varphi < \pi.$$

Παρατηρούμε ότι η g περιορισμένη στο $A = (0, +\infty) \times [0, 2\pi) \times (0, \pi)$ είναι 1-1 και

$$g(A) = R^3 - \{(0, 0, z) : z \in R\}.$$

Αν την περιορίσουμε στο ανοικτό $U = (0, +\infty) \times (0, 2\pi) \times (0, \pi)$ τότε

$$g(U) = R^3 - \{(x, 0, z) : x \geq 0, z \in R\} = V \subseteq R^3. \text{ Η } g \text{ είναι τότε μια αμφιδιαφόριση}$$

μεταξύ των ανοικτών συνόλων $U, V \subseteq R^3$.

Η Ιακωβιανή ορίζουσα της g στο R^3 ευρίσκεται ως εξής:

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \varphi)} = \begin{vmatrix} \sin \varphi \cos \theta & -\rho \sin \varphi \sin \theta & \rho \cos \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & \rho \sin \varphi \cos \theta & \rho \cos \varphi \sin \theta \\ \cos \varphi & 0 & -\rho \sin \varphi \end{vmatrix}$$

Αναπτύσσοντας ως προς την τρίτη γραμμή παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \varphi)} &= \cos \varphi \begin{vmatrix} -\rho \sin \varphi \sin \theta & \rho \cos \varphi \cos \theta \\ \rho \sin \varphi \cos \theta & \rho \cos \varphi \sin \theta \end{vmatrix} - \rho \sin \varphi \begin{vmatrix} \sin \varphi \cos \theta & -\rho \sin \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & \rho \sin \varphi \cos \theta \end{vmatrix} = \\ &= -\rho^2 \cos^2 \varphi \sin \varphi \sin^2 \theta - \rho^2 \cos^2 \varphi \sin \varphi \cos^2 \theta - \rho^2 \sin^3 \varphi \cos^2 \theta - \rho^2 \sin^3 \varphi \sin^2 \theta = \\ &= -\rho^2 \cos^2 \varphi \sin \varphi - \rho^2 \sin^3 \varphi = -\rho^2 \sin \varphi. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι $\det J_g = -\rho^2 \sin \varphi \neq 0$ επί του $U = (0, +\infty) \times (0, 2\pi) \times (0, \pi)$

Έπεται ότι η $g|_U: U \rightarrow R^3 - \{(x, 0, z): x \geq 0, z \in R\}$ είναι ένας μετασχηματισμός συντεταγμένων (οι σφαιρικές συντεταγμένες μετασχηματίζονται σε καρτεσιανές).

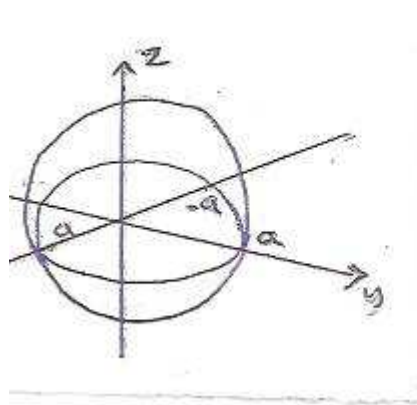
Έτσι αν $A \subseteq R^3$ Jordan μετρήσιμο με $\bar{A} \subseteq U$ και $g(A) = B$ τότε

$$\int_{B=g(A)} f(x, y, z) d(x, y, z) = \int_A f(\rho \sin \varphi \cos \theta, \rho \sin \varphi \sin \theta, \rho \cos \varphi) \rho^2 \sin \varphi d(\rho, \theta, \varphi)$$

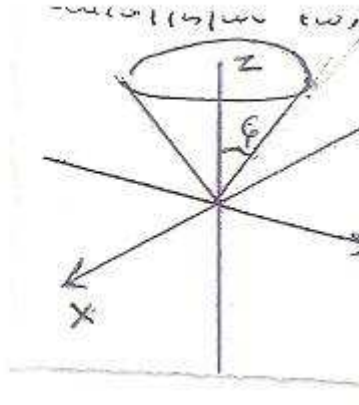
$$\left(\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \varphi)} \right) = \rho^2 \sin \varphi, \text{ καθώς } \varphi \in (0, \pi) \text{ και } \sin \varphi \geq 0 \text{) και}$$

$$V(B) = \int_A \rho^2 \sin \varphi d(\rho, \theta, \varphi) \text{ (ο όγκος του } B \text{)}.$$

Σημειώσεις. 1) Οι σφαιρικές συντεταγμένες (σχετίζονται με το γεωγραφικό μήκος και πλάτος) και είναι χρήσιμες στην αναπαράσταση σφαιρών, κώνων καθώς και καταλλήλων επιπέδων, (προβλήματα που παρουσιάζουν σφαιρική συμμετρία).

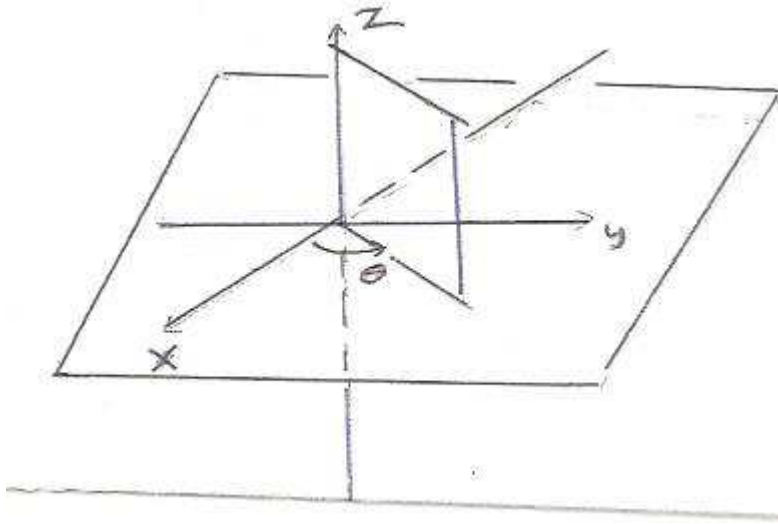


a) Η σφαίρα $\rho = a$ ($a > 0$)



Ο ημικώνος $\varphi = a$

$$(\beta) \quad 0 < a < \frac{\pi}{2}$$



(γ) κάθετο
ημιεπίπεδο $\theta = a$

Ο όρος σφαιρικές συντεταγμένες δικαιολογείται από τις ακόλουθες παρατηρήσεις.

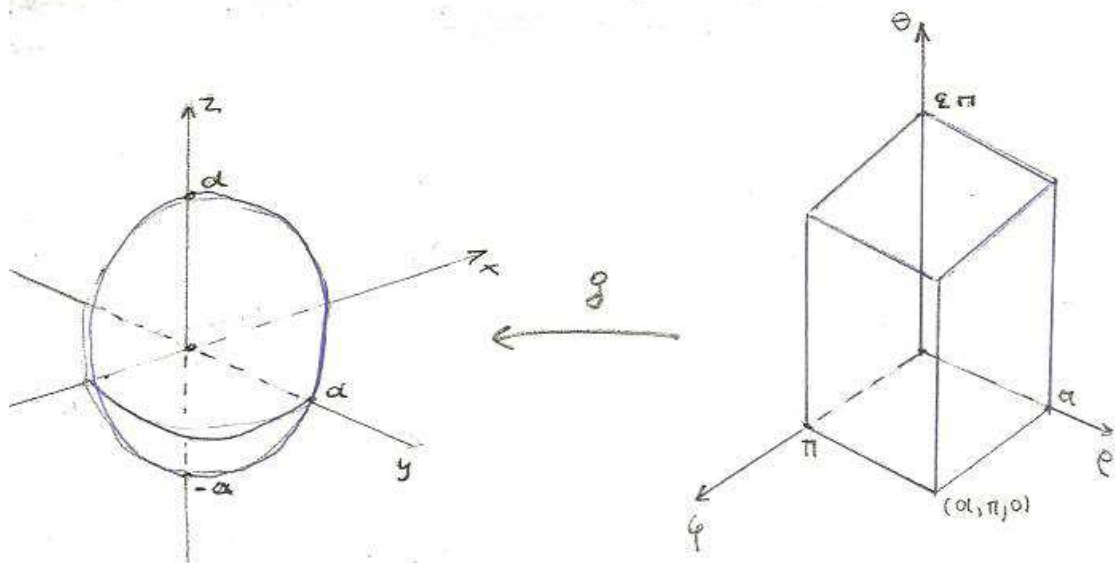
(α) Αν g είναι ο μετασχηματισμός καρτεσιανών σε σφαιρικές συντεταγμένες τότε

$$g([0, a] \times [0, 2\pi] \times [0, \pi]) = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2\} \quad (a > 0) \text{ και}$$

$$g((0, a] \times [0, 2\pi] \times [0, \pi]) = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2\} - \{(0, 0, z) : -a \leq z \leq a\} \text{ δηλαδή}$$

το παραλληλεπίπεδο $[0, a] \times [0, 2\pi] \times [0, \pi]$ απεικονίζεται στην κλειστή σφαίρα

$$\bar{B}(0, a)$$



(β) Επίσης $g(\{a\} \times [0, 2\pi] \times [0, \pi]) = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = a^2\} = \eta$ επιφάνεια της $\bar{B}(0, a)$.

(γ) Ακόμα παρατηρούμε ότι:

$$g\left([0, a] \times [0, 2\pi] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right) = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2 \text{ και } z \geq 0\} = \text{το άνω}$$

ημισφαίριο κέντρου $(0, 0, 0)$ και ακτίνας $a > 0$.

Παραδείγματα_1 Βρείτε την εξίσωση σε κυλινδρικές συντεταγμένες της επιφάνειας $z = x^2 + 3y^2$ (ελλειπτικό παραβολοειδές).

Λύση_Θέτουμε $z = z, x = r \cos \theta$ και $y = r \sin \theta$.

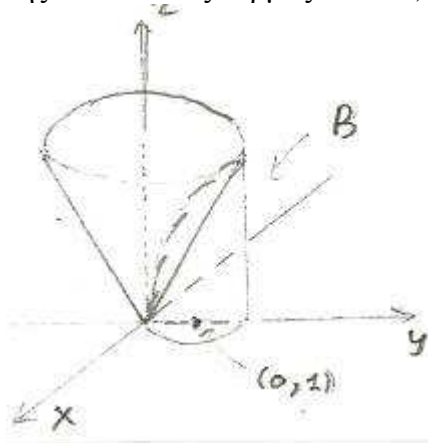
$$z = x^2 + 3y^2 = (r \cos \theta)^2 + 3(r \sin \theta)^2 = r^2 (\cos^2 \theta + 3 \sin^2 \theta) = r^2 ((1 - \sin^2 \theta) + 3 \sin^2 \theta) = r^2 (1 + 2 \sin^2 \theta)$$

2) Να βρεθεί ο όγκος του στερεού χωρίου B στο πρώτο ογδοημόριο του χώρου που φράσσεται από τον κύλινδρο $x^2 + y^2 = 2y$ τον ημικώνο $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ και το xy επίπεδο

Λύση Η καμπύλη $x^2 + y^2 = 2y$ στο xy επίπεδο είναι ο κύκλος κέντρου $(0,1)$ και ακτίνας 1 $(x^2 + y^2 = 2y \Leftrightarrow x^2 + (y-1)^2 = 1)$

Άρα η επιφάνεια $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 2y \text{ και } z \in \mathbb{R}\}$ είναι κυλινδρική με ακτίνα 1 και άξονα την κάθετη ευθεία στο xy επίπεδο και στο σημείο $(0,1)$.

Η επιφάνεια με εξίσωση $z = \sqrt{x^2 + y^2} \Leftrightarrow z^2 = x^2 + y^2$ και $z > 0$ είναι ο ορθός κώνος με κορυφή στο $(0,0,0)$ που βρίσκεται στον άνω ημίχωρο με άξονα τον άξονα των z και με γενέτειρα μια ημιευθεία του άνω ημίχωρου που σχηματίζει γωνία $\frac{\pi}{4}$ με την ημιευθεία Oz. (Η $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, είναι το γράφημα της $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ δηλαδή της Ευκλείδειας νόρμας του \mathbb{R}^2).



Οι εξισώσεις του κυλίνδρου και του κώνου σε κυλινδρικές συντεταγμένες είναι $r = 2 \sin \theta$ και $z = r$ αντίστοιχα.

$$\begin{aligned} \text{Κύλινδρος: } x^2 + y^2 &= 2y \\ r^2 &= 2r \sin \theta \\ r &= 2 \sin \theta \end{aligned}$$

$$\text{Κώνος: } z = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ και } z = r$$

Το B σε καρτεσιανές συντεταγμένες είναι χωρίο τύπου 1:

$$B = \left\{ (x, y, z) : 0 \leq y \leq 2, 0 \leq x \leq \sqrt{2y - y^2} \text{ και } 0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2} \right\}$$

Επειδή το στερεό χωρίο B βρίσκεται στο πρώτο όγδοημόριο του χώρου xyz

($x \geq 0, y \geq 0$ και $z \geq 0$), έχουμε ότι $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Έτσι το χωρίο $B = g(A)$ περιγράφεται

σε κυλινδρικές συντεταγμένες ως εξής: $0 \leq z \leq r, 0 \leq r \leq 2 \sin \theta$ και $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

(Σημειώνουμε ότι ο ημιδίσκος $\{(x, y): 0 \leq y \leq 2 \text{ και } 0 \leq x \leq \sqrt{2y - y^2}\}$ του xy επιπέδου περιγράφεται στο πολικό επίπεδο $r\theta$ ως

$$\left\{ (r, \theta): 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \text{ και } 0 \leq r \leq 2 \sin \theta \right\}.$$

Το στερεό χωρίο $A = \left\{ (r, \theta, z): 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq 2 \sin \theta \text{ και } 0 \leq z \leq r \right\}$ (όπου

$\varphi_1(r, \theta) = 0$ και $\varphi_2(r, \theta) = r$) είναι του τύπου 1 στον χώρο $r\theta z$ καθώς η προβολή του στο πολικό επίπεδο $r\theta$ είναι χωρίο τύπου 3. Έτσι έχουμε από τον τύπο αλλαγής μεταβλητής σε κυλινδρικές συντεταγμένες σε συνδυασμό με την γνωστή συνέπεια του θεωρήματος Fubini (που αφορά την διαδοχική ολοκλήρωση).

$$V(B) = \int_{B=g(A)} d(x, y, z) = \int_A rd(r, \theta, z) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2 \sin \theta} \int_0^r rdzdrd\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2 \sin \theta} r^2 drd\theta =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^3}{3} \right]_{r=0}^{r=2 \sin \theta} d\theta = \frac{8}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \theta d\theta = \frac{8}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 \theta) \sin \theta d\theta = \frac{8}{3} \left[-\cos \theta + \frac{\cos^3 \theta}{3} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{16}{9}.$$

(Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \theta d\theta$ έχουμε

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \theta d\theta &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 \theta) \sin \theta d\theta = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 \theta) d(\cos \theta) = - \int_1^0 (1 - t^2) dt = \int_0^1 (1 - t^2) dt \\ &= \left[t - \frac{t^3}{3} \right]_0^1 = \frac{2}{3}, \text{ θέτοντας } t = \cos \theta \end{aligned}$$

3) Γράψτε τις ακόλουθες εξισώσεις σε σφαιρικές συντεταγμένες: (α) της σφαίρας $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ($a > 0$), (β) του παραβολοειδούς $z = x^2 + y^2$.

Λύση Έχουμε ότι $x = \rho \sin \varphi \cos \theta, y = \rho \sin \varphi \sin \theta, z = \rho \cos \varphi$ (1) (σφαιρικές \Rightarrow καρτεσιανές).

(α) Επειδή $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \Rightarrow \rho^2 = x^2 + y^2 + z^2 \Rightarrow \rho^2 = a^2 \Rightarrow \rho = a$ αφού $\rho > 0$.

Άρα η εξίσωση της σφαίρας σε σφαιρικές συντεταγμένες είναι $\rho = a$

(β) $z = x^2 + y^2$. Από τις εξισώσεις (1) λαμβάνουμε

$$\rho \cos \varphi = (\rho \sin \varphi \cos \theta)^2 + (\rho \sin \varphi \sin \theta)^2 \Rightarrow \rho \cos \varphi = \rho^2 \sin^2 \varphi (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) =$$

$$\rho^2 \sin^2 \varphi \Rightarrow \rho = \frac{\cos \varphi}{\sin^2 \varphi}.$$

4) Υπολογίστε τον όγκο της σφαίρας κέντρου $(0,0,0)$ και ακτίνας $R > 0$.

Λύση Γνωρίζουμε ότι ο μετασχηματισμός των σφαιρικών συντεταγμένων απεικονίζει το παραλληλεπίπεδο $A = [0, R] \times [0, 2\pi] \times [0, \pi]$ του χώρου $r\theta\varphi$ στην σφαίρα $B = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$. Έπεται ότι,

$$V(B) = \int_{B=g(A)} d(x, y, z) = \int_A \rho^2 \sin \varphi d(\rho, \theta, \varphi) = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \rho^2 \sin \varphi d\varphi d\theta d\rho = (\text{επειδή}$$

ολοκληρώνουμε μια συνεχή συνάρτηση σε παραλληλεπίπεδο)

$$\begin{aligned} &= \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left[\frac{\rho^3}{3} \sin \varphi \right]_{\rho=0}^{\rho=R} d\varphi d\theta = \frac{R^3}{3} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi d\theta \\ &= \frac{R^3}{3} \int_0^{2\pi} [-\cos \varphi]_0^\pi d\theta = \frac{R^3}{3} \int_0^{2\pi} 2 d\theta = 2 \frac{R^3}{3} \cdot 2\pi = \frac{4}{3} \pi R^3. \end{aligned}$$

5) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα της συνάρτησης $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ επί της σφαίρας $B = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$.

Λύση Θα χρησιμοποιήσουμε τον σφαιρικό μετασχηματισμό g .

Η ανοικτή μοναδιαία σφαίρα B είναι εικόνα του ανοικτού ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου $A = (0, 1) \times (0, 2\pi) \times (0, \pi)$ του $r\theta\varphi$ χώρου μέσω της g (με την εξαίρεση του ημιδίσκου $x^2 + z^2 < 1$ με $x \geq 0$ του xz επιπέδου). Αντικαθιστούμε στην $f(x, y, z)$ τις συντεταγμένες x, y, z με $x = \rho \sin \varphi \cos \theta$, $y = \rho \sin \varphi \sin \theta$ και $z = \rho \cos \varphi$ και βρίσκουμε $f(\rho \sin \varphi \cos \theta, \rho \sin \varphi \sin \theta, \rho \cos \varphi) = \rho^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \theta + \rho^2 \cos^2 \varphi = \rho^2 \sin^2 \varphi (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + \rho^2 \cos^2 \varphi = \rho^2 \sin^2 \varphi + \rho^2 \cos^2 \varphi = \rho^2 (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) = \rho^2$.

$$\begin{aligned} \text{Έπεται ότι } \int_B f(x, y, z) d(x, y, z) &= \int_A f(\rho \sin \varphi \cos \theta, \rho \sin \varphi \sin \theta, \rho \cos \varphi) \\ &\cdot \rho^2 \sin \varphi d(\rho, \theta, \varphi) = \int_A \rho^2 \cdot \rho^2 \sin \varphi d(\rho, \theta, \varphi) = \int_A \rho^4 \sin \varphi d(\rho, \theta, \varphi) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \rho^4 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left[\frac{\rho^5}{5} \sin \varphi \right]_{\rho=0}^{\rho=1} d\varphi d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\sin \varphi}{5} d\varphi d\theta \\ &= \frac{1}{5} \int_0^{2\pi} [-\cos \varphi]_0^\pi d\theta = \frac{1}{5} \int_0^{2\pi} 2 d\theta = \frac{4}{5} \pi. \end{aligned}$$

Ασκήσεις

1) Σχεδιάστε το χωρίο D και υπολογίστε το διπλό ολοκλήρωμα $\iint_D f(r, \theta) dr d\theta$ στις ακόλουθες περιπτώσεις:

$$(\alpha) \int_1^{\frac{\pi}{2}} \int_0^3 r e^{-r^2} dr d\theta, \quad (\beta) \int_0^{2\pi} \int_0^4 2r^2 \cos \theta dr d\theta$$

$$(\gamma) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^2 \sqrt{4-r^2} \cdot r dr d\theta, \quad (\delta) \int_0^{\pi} \int_0^{1+\sin\theta} dr d\theta$$

2) Χρησιμοποιείστε ένα διπλό ολοκλήρωμα για να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου D που περικλείουν οι καμπύλες:

(α) $r = 4$, (β) $r = 2 \cos \theta$, (γ) $r = 1$ και $r = 2 \sin \theta$.

3) Χρησιμοποιείστε πολικές συντεταγμένες για τον υπολογισμό των διπλών ολοκληρωμάτων:

(α) $\iint_D y dx dy$ όπου D ο δίσκος $x^2 + y^2 \leq 4$

(β) $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$ όπου D είναι το χωρίο που φράσσεται από τον άξονα των x ,

την ευθεία $y = x$ και τον κύκλο $x^2 + y^2 = 1$

(γ) $\iint_D x dx dy$, όπου D είναι η τιμή των χωρίων που περικλείονται από τις καμπύλες $r = 2 \sin \theta$ και $r = 2 \cos \theta$.

4) Έστω ότι η $T: R^3 \rightarrow R^3$ ορίζεται από την σχέση

$$T(u, v, \omega) = (u \cos v \cos \omega, u \sin v \cos \omega, u \sin \omega)$$

(α) Δείξτε ότι $T(R^3) = S^2$ δηλαδή κάθε (x, y, z) με $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ γράφεται σαν

$(x, y, z) = T(u, v, \omega)$ για κάποιο (u, v, ω)

(β) Δείξτε ότι η T δεν είναι 1-1.

5) (α) Ολοκληρώστε την συνάρτηση $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ πάνω στον κύλινδρο $x^2 + y^2 \leq 2, -2 \leq z \leq 3$.

(β) Δείξτε ότι η επιφάνεια $z = x^2 + y^2$ χωρίζει τον κύλινδρο $x^2 + y^2 \leq a^2, 0 \leq z \leq a^2$ ($a > 0$), σε δύο στερεά χωρία που έχουν ίσους όγκους ($= \frac{1}{2} \pi a^4$).

6) Έστω η μοναδιαία σφαίρα $B = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ του R^3 . Υπολογίστε το

$$\text{ολοκλήρωμα} \int_B \frac{dx dy dz}{\sqrt{2 + x^2 + y^2 + z^2}}.$$

7) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_S \frac{dx dy dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$, όπου S το στερεό που φράσσεται

από τις σφαίρες $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ και $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$, όπου $0 < b < a$. Επίσης

υπολογίστε το ολοκλήρωμα της $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \cdot e^{-(x^2 + y^2 + z^2)}$ επί του S και

ακόμη υπολογίστε (αν υπάρχει) το ολοκλήρωμα $\int_B \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, επί της σφαίρας

$$B = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}.$$

8) Με την χρήση σφαιρικών συντεταγμένων υπολογίστε το ολοκλήρωμα της

$$f(\rho, \theta, \varphi) = \frac{1}{\rho} \text{ πάνω στο χωρίο του πρώτου ογδοημορίου του } R^3 \text{ που φράσσεται}$$

από τους κώνους $\theta = \frac{\pi}{4}$, $\varphi = \arctan 2$ και την σφαίρα $\rho = \sqrt{6}$.

9) Η απεικόνιση $T(u, v) = (u^2 - v^2, 2uv)$ μετασχηματίζει το ορθογώνιο

$1 \leq u \leq 2, 1 \leq v \leq 3$ του επιπέδου uv σε ένα χωρίο \mathfrak{R} του επιπέδου xy .

(α) Δείξτε ότι η T είναι 1-1 στο ανοικτό δεξί ημιεπίπεδο.

(β) Βρείτε το εμβαδόν του \mathfrak{R} χρησιμοποιώντας τον τύπο αλλαγής μεταβλητής.

10) Με την χρήση κυλινδρικών συντεταγμένων υπολογίστε τα ολοκληρώματα:

(α) $\int_{\mathfrak{R}} xy dx dy dz$, όπου \mathfrak{R} είναι ο κύλινδρος $x^2 + y^2 \leq 1$ με $0 \leq z \leq 1$,

(β) $\int_{\mathfrak{R}} (x^4 + 2x^2y^2 + y^4) dx dy dz$, όπου \mathfrak{R} είναι ο κύλινδρος $x^2 + y^2 \leq a^2$ με $0 \leq z \leq \frac{1}{\pi}$

και (γ) $\int_{\mathfrak{R}} z(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} dx dy dz$, όπου \mathfrak{R} είναι το στερεό που φράσσεται από πάνω από

το επίπεδο $z = 2$ και από κάτω από την επιφάνεια $2z = x^2 + y^2$

11) Υπολογίστε τον όγκο $V(\Omega)$ του στερεού

$$\Omega = \{(x, y, z) \in R^3 : x^2 + y^2 \leq 2ax, 0 \leq z \leq \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2}\}, a > 0$$

$$[\text{Απάντηση: } V(\Omega) = \frac{8}{3} a^3 \left(\pi - \frac{4}{3} \right)]$$