Απειροστικός Λογισμός ΙΙΙ

σημειώσεις τηλεμαθήματος

Γεράσιμος Μπαρμπάτης

εαρινό εξάμηνο 2019-20

Στο τελευταίο μάθημα: μερικές παράγωγοι: αν $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ και $\vec{a} \in A$, η μερική παράγωγος ως προς x_k στο σημείο $\vec{a}$ ορίζεται ως

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{a}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\vec{a} + t\vec{e}_k) - f(\vec{a})}{t}$$

όταν το όριο υπάρχει.

Στο τελευταίο μάθημα: μερικές παράγωγοι: αν $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ και $\vec{a} \in A$, η μερική παράγωγος ως προς x_k στο σημείο $\vec{a}$ ορίζεται ως

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{a}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\vec{a} + t\vec{e}_k) - f(\vec{a})}{t}$$

όταν το όριο υπάρχει. Ισοδύναμα, αν ορίσουμε

$$g(s) = f(a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, s, a_{k+1}.a_n),$$

τότε

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{a}) = g'(a_k)$$

Η μερική παράγωγος ως προς x_k δηλώνει το ρυθμό μεταβολής της συνάρτησης στο σημείο $\vec{a}$ όταν κινούμαστε στην κατεύθυνση $\vec{e}_k$.

Το διάνυσμα

$$\nabla f(\vec{a}) = \Big(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{a}), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{a})\Big)$$

ονομάζεται *κλίση* της f στο σημείο $\vec{a}$.

Κατά κατεύθυνση παράγωγος (ή κατευθυνόμενη παράγωγος)

Ορισμός. Κάθε διάνυσμα $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ με $\|\vec{u}\| = 1$ ονομάζεται κατεύθυνση.

Ορισμός. Έστω $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ και $\vec{a} \in A$. Η κατά κατεύθυνση παράγωγος της f στο σημείο $\vec{a}$ στην κατεύθυνση $\vec{u}$ ορίζεται ως

$$D_{\vec{u}} f(\vec{a}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\vec{a} + t\vec{u}) - f(\vec{a})}{t}$$

όταν το όριο υπάρχει.

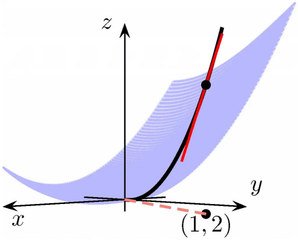
Κατά κατεύθυνση παράγωγος (ή κατευθυνόμενη παράγωγος)

Ορισμός. Κάθε διάνυσμα $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ με $\|\vec{u}\| = 1$ ονομάζεται κατεύθυνση.

Ορισμός. Έστω $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ και $\vec{a} \in A$. Η κατά κατεύθυνση παράγωγος της f στο σημείο $\vec{a}$ στην κατεύθυνση $\vec{u}$ ορίζεται ως

$$D_{\vec{u}} f(\vec{a}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\vec{a} + t\vec{u}) - f(\vec{a})}{t}$$

όταν το όριο υπάρχει.



Η κατά κατεύθυνση παράγωγος ισούται με το ρυθμό μεταβολής της f στο σημείο $\vec{a}$ στην κατεύθυνση $\vec{u}$.

Η κατά κατεύθυνση παράγωγος γενικεύει την έννοια της μερικής παραγώγου: είναι φανερό ότι

$$D_{\vec{e}_k} f(\vec{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{a})$$

Η κατά κατεύθυνση παράγωγος γενικεύει την έννοια της μερικής παραγώγου: είναι φανερό ότι

$$D_{\vec{e}_k} f(\vec{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{a})$$

Παράδειγμα. Έστω $f(x,y) = x^2 y$, $\vec{u} = (\cos\theta, \sin\theta)$ και $\vec{a} = (x_0, y_0)$.

Η κατά κατεύθυνση παράγωγος γενικεύει την έννοια της μερικής παραγώγου: είναι φανερό ότι

$$D_{\vec{e}_k} f(\vec{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{a})$$

Παράδειγμα. Έστω $f(x, y) = x^2 y$, $\vec{u} = (\cos\theta, \sin\theta)$ και $\vec{a} = (x_0, y_0)$. Έχουμε

$$\begin{aligned} & D_{\vec{u}} f(\vec{a}) \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{(x_0 + t\cos\theta)^2 (y_0 + t\sin\theta) - x_0^2 y_0}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{x_0^2 y_0 + (2x_0 y_0 \cos\theta + x_0^2 \sin\theta)t + (2x_0 \cos\theta \sin\theta + y_0 \cos^2\theta)t^2 + \cos^2\theta \sin\theta t^3 - x_0^2 y_0}{t} \\ &= 2x_0 y_0 \cos\theta + x_0^2 \sin\theta\,. \end{aligned}$$

Η κατά κατεύθυνση παράγωγος γενικεύει την έννοια της μερικής παραγώγου: είναι φανερό ότι

$$D_{\vec{e}_k} f(\vec{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{a})$$

Παράδειγμα. Έστω $f(x,y) = x^2 y$, $\vec{u} = (\cos\theta, \sin\theta)$ και $\vec{a} = (x_0, y_0)$. Έχουμε

$$\begin{aligned}
&D_{\vec{u}} f(\vec{a}) \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{(x_0 + t\cos\theta)^2 (y_0 + t\sin\theta) - x_0^2 y_0}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{x_0^2 y_0 + (2x_0 y_0 \cos\theta + x_0^2 \sin\theta)t + (2x_0 \cos\theta \sin\theta + y_0 \cos^2\theta)t^2 + \cos^2\theta \sin\theta t^3 - x_0^2 y_0}{t} \\
&= 2x_0 y_0 \cos\theta + x_0^2 \sin\theta\,.
\end{aligned}$$

Αργότερα θα δούμε ότι υπάρχει πιο εύκολος τρόπος!

Παράδειγμα. Έστω η συνάρτηση

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Έστω $\vec{u} = (\cos\theta, \sin\theta)$. Αν $\sin\theta \neq 0$ τότε

$$\begin{aligned} &\frac{f(t\cos\theta, t\sin\theta) - f(0,0)}{t} \\ &\quad = \frac{t^3 \cos^2\theta \sin\theta}{t^5 \cos^4\theta + t^3 \sin^2\theta} \\ &\quad = \frac{\cos^2\theta \sin\theta}{t^2 \cos^4\theta + \sin^2\theta} \\ &\quad \to \cot\theta \, \cos\theta\,, \end{aligned}$$

Παράδειγμα. Έστω η συνάρτηση

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Έστω $\vec{u} = (\cos\theta, \sin\theta)$. Αν $\sin\theta \neq 0$ τότε

$$\begin{aligned} &\frac{f(t\cos\theta, t\sin\theta) - f(0,0)}{t} \\ &\quad = \frac{t^3 \cos^2\theta \sin\theta}{t^5 \cos^4\theta + t^3 \sin^2\theta} \\ &\quad = \frac{\cos^2\theta \sin\theta}{t^2 \cos^4\theta + \sin^2\theta} \\ &\quad \to \cot\theta \, \cos\theta \,, \end{aligned}$$

δηλαδή $D_{\vec{u}} f(0,0) = \cot\theta \, \cos\theta$. Αν $\sin\theta = 0$ τότε $D_{\vec{u}} f(0,0) = 0$.

Παράδειγμα. Έστω η συνάρτηση

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Έστω $\vec{u} = (\cos\theta, \sin\theta)$. Αν $\sin\theta \neq 0$ τότε

$$\begin{aligned} \frac{f(t\cos\theta, t\sin\theta) - f(0,0)}{t} \\ &= \frac{t^3\cos^2\theta\sin\theta}{t^5\cos^4\theta + t^3\sin^2\theta} \\ &= \frac{\cos^2\theta\sin\theta}{t^2\cos^4\theta + \sin^2\theta} \\ &\to \cot\theta\,\cos\theta\,, \end{aligned}$$

δηλαδή $D_{\vec{u}}f(0,0) = \cot\theta\,\cos\theta$. Αν $\sin\theta = 0$ τότε $D_{\vec{u}}f(0,0) = 0$.

Έχουμε ήδη δει ότι η f είναι ασυνεχής στο $(0,0)$. Συνεπώς η ύπαρξη της κατά κατεύθυνση παραγώγου ακόμα και σε κάθε κατεύθυνση δεν είναι μία ικανοποιητική έννοια διαφορισιμότητας.

Διαφορισιμότητα.

Για να γίνει πιο κατανοητός ο ορισμός της διαφορισιμότητας είναι χρήσιμο να δούμε με λίγο διαφορετικό τρόπο την έννοια της διαφορισιμότητας στη μία διάσταση.

Διαφορισιμότητα.

Για να γίνει πιο κατανοητός ο ορισμός της διαφορισιμότητας είναι χρήσιμο να δούμε με λίγο διαφορετικό τρόπο την έννοια της διαφορισιμότητας στη μία διάσταση.

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και $a \in \mathbb{R}$. Τα ακόλουθα δύο είναι ισοδύναμα :

(1) η f είναι παραγωγίσιμη στο a

(2) υπάρχει $B \in \mathbb{R}$ ώστε $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - B(x-a)}{|x-a|} = 0$

Διαφορισιμότητα.

Για να γίνει πιο κατανοητός ο ορισμός της διαφορισιμότητας είναι χρήσιμο να δούμε με λίγο διαφορετικό τρόπο την έννοια της διαφορισιμότητας στη μία διάσταση.

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και $a \in \mathbb{R}$. Τα ακόλουθα δύο είναι ισοδύναμα :

(1) η f είναι παραγωγίσιμη στο a

(2) υπάρχει $B \in \mathbb{R}$ ώστε $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - B(x-a)}{|x-a|} = 0$

Επιπλέον, αν οι (1), (2) ισχύουν, τότε $f'(a) = B$.

Διαφορισιμότητα.

Για να γίνει πιο κατανοητός ο ορισμός της διαφορισιμότητας είναι χρήσιμο να δούμε με λίγο διαφορετικό τρόπο την έννοια της διαφορισιμότητας στη μία διάσταση.

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και $a \in \mathbb{R}$. Τα ακόλουθα δύο είναι ισοδύναμα :

(1) η f είναι παραγωγίσιμη στο a

(2) υπάρχει $B \in \mathbb{R}$ ώστε $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - B(x-a)}{|x-a|} = 0$

Επιπλέον, αν οι (1), (2) ισχύουν, τότε $f'(a) = B$.

«Η συνάρτηση $f(a) + f'(a)(x-a)$ είναι μία πολύ καλή προσέγγιση της $f(x)$ κοντά στο σημείο a (με την έννοια της (2)) και μάλιστα είναι η μόνη τόσο καλή προσέγγιση από συναρτήσεις της μορφής $A + Bx$»

Διαφορισιμότητα.

Για να γίνει πιο κατανοητός ο ορισμός της διαφορισιμότητας είναι χρήσιμο να δούμε με λίγο διαφορετικό τρόπο την έννοια της διαφορισιμότητας στη μία διάσταση.

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και $a \in \mathbb{R}$. Τα ακόλουθα δύο είναι ισοδύναμα :

(1) η f είναι παραγωγίσιμη στο a

(2) υπάρχει $B \in \mathbb{R}$ ώστε $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a) - B(x-a)}{|x-a|} = 0$

Επιπλέον, αν οι (1), (2) ισχύουν, τότε $f'(a) = B$.

«Η συνάρτηση $f(a) + f'(a)(x-a)$ είναι μία πολύ καλή προσέγγιση της $f(x)$ κοντά στο σημείο a (με την έννοια της (2)) και μάλιστα είναι η μόνη τόσο καλή προσέγγιση από συναρτήσεις της μορφής $A + Bx$»

(Συναρτήσεις της μορφής $Ax + B$ ονομάζονται συχνά αφφινικές συναρτήσεις. Πρόκειται φυσικά για τα πολυώνυμα α΄ βαθμού)

(μικρή, άτυπη αλλά χρήσιμη παρένθεση) Αφφινικές συναρτήσεις στο $\mathbb{R}^n$.

(μικρή, άτυπη αλλά χρήσιμη παρένθεση) Αφφινικές συναρτήσεις στο $\mathbb{R}^n$.

Αφφινικές συναρτήσεις ονομάζονται οι συναρτήσεις $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ της μορφής

$$g(\vec{x}) = \vec{a} \cdot \vec{x} + b = a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n + b \,.$$

(μικρή, άτυπη αλλά χρήσιμη παρένθεση) Αφφινικές συναρτήσεις στο $\mathbb{R}^n$.

Αφφινικές συναρτήσεις ονομάζονται οι συναρτήσεις $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ της μορφής

$$g(\vec{x}) = \vec{a} \cdot \vec{x} + b = a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n + b \,.$$

Ισοδύναμα, είναι ακριβώς τα πολυώνυμα α΄ βαθμού.
Ισοδύναμα, είναι ακριβώς οι συναρτήσεις που είναι άθροισμα μιας γραμμικής συνάρτησης και μίας σταθεράς.

(μικρή, άτυπη αλλά χρήσιμη παρένθεση) Αφφινικές συναρτήσεις στο $\mathbb{R}^n$.

Αφφινικές συναρτήσεις ονομάζονται οι συναρτήσεις $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ της μορφής

$$g(\vec{x}) = \vec{a} \cdot \vec{x} + b = a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n + b\,.$$

Ισοδύναμα, είναι ακριβώς τα πολυώνυμα α΄ βαθμού.
Ισοδύναμα, είναι ακριβώς οι συναρτήσεις που είναι άθροισμα μιας γραμμικής συνάρτησης και μίας σταθεράς.

Λέμε ότι μία συνάρτηση $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ επιδέχεται βέλτιστη αφφινική προσέγγιση στο σημείο $\vec{a} \in A$ αν υπάρχει αφφινική συνάρτηση g ώστε

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{a}} \frac{f(\vec{x}) - g(\vec{x})}{\|\vec{x} - \vec{a}\|} = 0.$$

[**(μικρή, άτυπη αλλά χρήσιμη παρένθεση) Αφφινικές συναρτήσεις στο $\mathbb{R}^n$.**

Αφφινικές συναρτήσεις ονομάζονται οι συναρτήσεις $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ της μορφής

$$g(\vec{x}) = \vec{a} \cdot \vec{x} + b = a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n + b\,.$$

Ισοδύναμα, είναι ακριβώς τα πολυώνυμα α′ βαθμού.
Ισοδύναμα, είναι ακριβώς οι συναρτήσεις που είναι άθροισμα μιας γραμμικής συνάρτησης και μίας σταθεράς.

Λέμε ότι μία συνάρτηση $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ επιδέχεται βέλτιστη αφφινική προσέγγιση στο σημείο $\vec{a} \in A$ αν υπάρχει αφφινική συνάρτηση g ώστε

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{a}} \frac{f(\vec{x}) - g(\vec{x})}{\|\vec{x} - \vec{a}\|} = 0.$$

Αν η f επιδέχεται βέλτιστη αφφινική προσέγγιση στο σημείο $\vec{a}$ τότε η αντίστοιχη αφφινική συνάρτηση g είναι μοναδική (άσκηση) .]

(μικρή, άτυπη αλλά χρήσιμη παρένθεση) Αφφινικές συναρτήσεις στο $\mathbb{R}^n$.

Αφφινικές συναρτήσεις ονομάζονται οι συναρτήσεις $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ της μορφής

$$g(\vec{x}) = \vec{a} \cdot \vec{x} + b = a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n + b\,.$$

Ισοδύναμα, είναι ακριβώς τα πολυώνυμα α΄ βαθμού.
Ισοδύναμα, είναι ακριβώς οι συναρτήσεις που είναι άθροισμα μιας γραμμικής συνάρτησης και μίας σταθεράς.

Λέμε ότι μία συνάρτηση $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ επιδέχεται βέλτιστη αφφινική προσέγγιση στο σημείο $\vec{a} \in A$ αν υπάρχει αφφινική συνάρτηση g ώστε

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{a}} \frac{f(\vec{x}) - g(\vec{x})}{\|\vec{x} - \vec{a}\|} = 0.$$

Αν η f επιδέχεται βέλτιστη αφφινική προσέγγιση στο σημείο $\vec{a}$ τότε η αντίστοιχη αφφινική συνάρτηση g είναι μοναδική (άσκηση) .

Ανάλογα έχουμε

Ορισμός. Έστω $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Η f είναι διαφορίσιμη (ή παραγωγίσιμη) στο $\vec{a} \in A$ αν υπάρχει διάνυσμα $\vec{B} \in \mathbb{R}^n$ ώστε

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{a}} \frac{f(\vec{x}) - f(\vec{a}) - \vec{B} \cdot (\vec{x} - \vec{a})}{\|\vec{x} - \vec{a}\|} = 0$$

Μπορεί να δει κανείς (άσκηση) ότι αν υπάρχει τότε το παραπάνω διάνυσμα $\vec{B}$ είναι μοναδικό. Το ονομάζουμε *παράγωγο* (ή ολική παράγωγο) της f στο $\vec{a}$ και το συμβολίζουμε με $Df(\vec{a})$ ή με $f'(\vec{a})$.

Ανάλογα έχουμε

Ορισμός. Έστω $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Η f είναι διαφορίσιμη (ή παραγωγίσιμη) στο $\vec{a} \in A$ αν υπάρχει διάνυσμα $\vec{B} \in \mathbb{R}^n$ ώστε

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{a}} \frac{f(\vec{x}) - f(\vec{a}) - \vec{B} \cdot (\vec{x} - \vec{a})}{\|\vec{x} - \vec{a}\|} = 0$$

Μπορεί να δει κανείς (άσκηση) ότι αν υπάρχει τότε το παραπάνω διάνυσμα $\vec{B}$ είναι μοναδικό. Το ονομάζουμε *παράγωγο* (ή ολική παράγωγο) της f στο $\vec{a}$ και το συμβολίζουμε με $Df(\vec{a})$ ή με $f'(\vec{a})$.

Παρατήρηση. Άρα η διαφορισιμότητα στο $\vec{a}$ είναι ισοδύναμη εξ ορισμού ισοδύναμη με την ύπαρξη βέλτιστης αφφινικής προσέγγισης στο $\vec{a}$. Η βέλτιστη αφφινική προσέγγιση στο $\vec{a}$ είναι η συνάρτηση η $f(\vec{a}) - f'(\vec{a}) \cdot (\vec{x} - \vec{a})$.

Ανάλογα έχουμε

Ορισμός. Έστω $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Η f είναι διαφορίσιμη (ή παραγωγίσιμη) στο $\vec{a} \in A$ αν υπάρχει διάνυσμα $\vec{B} \in \mathbb{R}^n$ ώστε

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{a}} \frac{f(\vec{x}) - f(\vec{a}) - \vec{B} \cdot (\vec{x} - \vec{a})}{\|\vec{x} - \vec{a}\|} = 0$$

Μπορεί να δει κανείς (άσκηση) ότι αν υπάρχει τότε το παραπάνω διάνυσμα $\vec{B}$ είναι μοναδικό. Το ονομάζουμε *παράγωγο* (ή ολική παράγωγο) της f στο $\vec{a}$ και το συμβολίζουμε με $Df(\vec{a})$ ή με $f'(\vec{a})$.

Παρατήρηση. Άρα η διαφορισιμότητα στο $\vec{a}$ είναι ισοδύναμη εξ ορισμού ισοδύναμη με την ύπαρξη βέλτιστης αφφινικής προσέγγισης στο $\vec{a}$. Η βέλτιστη αφφινική προσέγγιση στο $\vec{a}$ είναι η συνάρτηση η $f(\vec{a}) - f'(\vec{a}) \cdot (\vec{x} - \vec{a})$.

Πρόταση. Αν η $f(\vec{x})$ είναι διαφορίσιμη στο $\vec{a}$ τότε είναι συνεχής στο $\vec{a}$.
Απόδειξη. Εύκολη άσκηση.

Πρόταση. Αν η $f(\vec{x})$ είναι διαφορίσιμη στο σημείο $\vec{a}$ τότε υπάρχουν όλες οι κατά κατεύθυνση παράγωγοι της f στο $\vec{a}$ και μάλιστα

$$(D_{\vec{u}}f)(\vec{a}) = f'(\vec{a}) \cdot \vec{u}$$

για κάθε κατεύθυνση $\vec{u}$.

Απόδειξη. Στο παραπάνω όριο θέτουμε $\vec{x} = \vec{a} + t\vec{u}$ οπότε καθώς $t \to 0$ έχουμε $\vec{x} \to \vec{a}$. Άρα

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{\vec{x}\to\vec{a}} \frac{f(\vec{x}) - f(\vec{a}) - f'(\vec{a}) \cdot (\vec{x} - \vec{a})}{\|\vec{x} - \vec{a}\|} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{f(\vec{a} + t\vec{u}) - f(\vec{a}) - tf'(\vec{a}) \cdot \vec{u}}{|t|} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{f(\vec{a} + t\vec{u}) - f(\vec{a}) - tf'(\vec{a}) \cdot \vec{u}}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{f(\vec{a} + t\vec{u}) - f(\vec{a})}{t} - f'(\vec{a}) \cdot \vec{u}, \end{aligned}$$

και το ζητούμενο έπεται. □

Έπεται από την τελευταία πρόταση ότι αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $\vec{a}$ τότε οι μερικές παράγωγοι της f στο $\vec{a}$ υπάρχουν και

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{a}) = f'(\vec{a}) \cdot \vec{e}_k$$

Έπεται από την τελευταία πρόταση ότι αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $\vec{a}$ τότε οι μερικές παράγωγοι της f στο $\vec{a}$ υπάρχουν και

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{a}) = f'(\vec{a}) \cdot \vec{e}_k$$

Συνεπώς

Πρόταση. Αν η f είναι διαφορίσιμη στο $\vec{a}$ τότε υπάρχει το διάνυσμα $\nabla f(\vec{a})$ και $f'(\vec{a}) = \nabla f(\vec{a})$.

Έπεται από την τελευταία πρόταση ότι αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $\vec{a}$ τότε οι μερικές παράγωγοι της f στο $\vec{a}$ υπάρχουν και

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{a}) = f'(\vec{a}) \cdot \vec{e}_k$$

Συνεπώς

Πρόταση. Αν η f είναι διαφορίσιμη στο $\vec{a}$ τότε υπάρχει το διάνυσμα $\nabla f(\vec{a})$ και $f'(\vec{a}) = \nabla f(\vec{a})$.

Έπεται άμεσα το ακόλουθο κριτήριο διαφορισιμότητας:

Πρόταση. Η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $\vec{a}$ αν και μόνο αν υπάρχουν όλες οι μερικές της παράγωγοι στο $\vec{a}$ και

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{a}} \frac{f(\vec{x}) - f(\vec{a}) - \nabla f(\vec{a}) \cdot (\vec{x} - \vec{a})}{\|\vec{x} - \vec{a}\|} = 0$$

Παράδειγμα. Έστω η συνάρτηση

$$h(x,y) = \begin{cases} \frac{|xy|^\alpha}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Αν $\alpha \leq 1$ τότε η h είναι ασυνεχής στο $(0,0)$, άρα δεν είναι διαφορίσιμη στο σημείο αυτό. Έστω τώρα $\alpha > 1$. Τότε εύκολα βλέπουμε ότι οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial h}{\partial x}$, $\frac{\partial h}{\partial y}$ υπάρχουν στο $(0,0)$ και είναι ίσες με 0. Άρα (για $\alpha > 1$) η h είναι διαφορίσιμη στο $(0,0)$ και μόνο αν

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{h(x,y) - h(0,0) - \nabla h(0,0)\cdot(x,y)}{\|(x,y)\|} = 0$$

Παράδειγμα. Έστω η συνάρτηση

$$h(x,y) = \begin{cases} \frac{|xy|^\alpha}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Αν $\alpha \leq 1$ τότε η h είναι ασυνεχής στο $(0,0)$, άρα δεν είναι διαφορίσιμη στο σημείο αυτό. Έστω τώρα $\alpha > 1$. Τότε εύκολα βλέπουμε ότι οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial h}{\partial x}$, $\frac{\partial h}{\partial y}$ υπάρχουν στο $(0,0)$ και είναι ίσες με 0. Άρα (για $\alpha > 1$) η h είναι διαφορίσιμη στο $(0,0)$ και μόνο αν

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{h(x,y) - h(0,0) - \nabla h(0,0) \cdot (x,y)}{\|(x,y)\|} = 0$$

ισοδύναμα αν και μόνο αν

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|xy|^\alpha}{(x^2+y^2)^{3/2}} = 0$$

δηλαδή (γιατί;) αν και μόνο αν $\alpha > 3/2$.

Το προηγούμενο κριτήριο δεν είναι απαραίτητο για περισσότερο «καλές» συναρτήσεις. Συχνά είναι πιο απλό να χρησιμοποιήσουμε την ακόλουθη

Πρόταση. Έστω ότι οι μερικές παράγωγοι της $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ υπάρχουν σε μια περιοχή του $\vec{a} \in A$ και είναι συνεχείς στο $\vec{a}$. Τότε η f είναι διαφορίσιμη στο $\vec{a}$.
Απόδειξη. Παραλείπεται.

Το προηγούμενο κριτήριο δεν είναι απαραίτητο για περισσότερο «καλές» συνάρτήσεις. Συχνά είναι πιο απλό να χρησιμοποιήσουμε την ακόλουθη

Πρόταση. Έστω ότι οι μερικές παράγωγοι της $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ υπάρχουν σε μια περιοχή του $\vec{a} \in A$ και είναι συνεχείς στο $\vec{a}$. Τότε η f είναι διαφορίσιμη στο $\vec{a}$.
Απόδειξη. Παραλείπεται.

Πόρισμα. Αν η $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι C^1 στο A (δηλαδή οι μερικές της παράγωγοι υπάρχουν και είναι συνεχείς στο A) τότε είναι διαφορίσιμη σε κάθε σημείο του A.

Το προηγούμενο κριτήριο δεν είναι απαραίτητο για περισσότερο «καλές» συναρτήσεις. Συχνά είναι πιο απλό να χρησιμοποιήσουμε την ακόλουθη

Πρόταση. Έστω ότι οι μερικές παράγωγοι της $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ υπάρχουν σε μια περιοχή του $\vec{a} \in A$ και είναι συνεχείς στο $\vec{a}$. Τότε η f είναι διαφορίσιμη στο $\vec{a}$.
Απόδειξη. Παραλείπεται.

Πόρισμα. Αν η $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι C^1 στο A (δηλαδή οι μερικές της παράγωγοι υπάρχουν και είναι συνεχείς στο A) τότε είναι διαφορίσιμη σε κάθε σημείο του A.

Πόρισμα. Αν η $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι C^1 στο A τότε η παράγωγός της κατά την κατεύθυνση $\vec{u}$ στο σημείο $\vec{a}$ δίνεται από τη σχέση

$$D_{\vec{u}} f(\vec{a}) = \nabla f(\vec{a}) \cdot \vec{u}$$

Παράδειγμα. Να βρεθεί η κατά κατεύθυνση παράγωγος της

$$f(x,y,z)=\frac{x^2e^y\log z}{y-1}$$

στο σημείο $(-1,0,e)$ στην κατεύθυνση $\vec{u}=(1/2,-\sqrt{3}/2,0)$.

Η $f(x,y,z)$ ορίζεται στο ανοικτό σύνολο $A=\{(x,y,z):z>0\ ,\ y\neq 1\}$, είναι (προφανώς) C^1 στο σύνολο αυτό και άρα είναι διαφορίσιμη σε κάθε σημείο του.

Παράδειγμα. Να βρεθεί η κατά κατεύθυνση παράγωγος της

$$f(x,y,z) = \frac{x^2 e^y \log z}{y-1}$$

στο σημείο $(-1,0,e)$ στην κατεύθυνση $\vec{u} = (1/2, -\sqrt{3}/2, 0)$.

Η $f(x,y,z)$ ορίζεται στο ανοικτό σύνολο $A = \{(x,y,z) : z > 0\ ,\ y \neq 1\}$, είναι (προφανώς) C^1 στο σύνολο αυτό και άρα είναι διαφορίσιμη σε κάθε σημείο του. Υπολογίζουμε

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2xe^y \log z}{y-1} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x}(-1,0,e) = 2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^2 e^y (y-1)\log z - x^2 e^y \log z}{(y-1)^2} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial y}(-1,0,e) = -2$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{x^2 e^y}{z(y-1)} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial z}(-1,0,e) = -\frac{1}{e}$$

Παράδειγμα. Να βρεθεί η κατά κατεύθυνση παράγωγος της

$$f(x,y,z) = \frac{x^2 e^y \log z}{y-1}$$

στο σημείο $(-1,0,e)$ στην κατεύθυνση $\vec{u} = (1/2, -\sqrt{3}/2, 0)$.

Η $f(x,y,z)$ ορίζεται στο ανοικτό σύνολο $A = \{(x,y,z) : z > 0\ ,\ y \neq 1\}$, είναι (προφανώς) C^1 στο σύνολο αυτό και άρα είναι διαφορίσιμη σε κάθε σημείο του. Υπολογίζουμε

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2xe^y \log z}{y-1} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x}(-1,0,e) = 2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^2 e^y (y-1)\log z - x^2 e^y \log z}{(y-1)^2} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial y}(-1,0,e) = -2$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{x^2 e^y}{z(y-1)} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial z}(-1,0,e) = -\frac{1}{e}$$

Άρα

$$D_{\vec{u}} f(-1,0,e) = (2,-2,-\frac{1}{e}) \cdot (1/2, -\sqrt{3}/2, 0) = 1 + \sqrt{3}\,.$$

Μέγιστος ρυθμός μεταβολής. Είδαμε ότι αν η f είναι διαφορίσιμη τότε

$$D_{\vec{u}} f(\vec{a}) = \nabla f(\vec{a}) \cdot \vec{u}$$

Έπεται ότι αν $\nabla f(\vec{a}) \neq \vec{0}$ τότε:

- ο μέγιστος ρυθμός αύξησης της f στο $\vec{a}$ επιτυγχάνεται στην κατεύθυνση $\frac{\nabla f(\vec{a})}{\|\nabla f(\vec{a})\|}$ και είναι ίσος με $\|\nabla f(\vec{a})\|$
- ο μέγιστος ρυθμός μείωσης της f στο $\vec{a}$ λαμβάνεται στην κατεύθυνση $-\frac{\nabla f(\vec{a})}{\|\nabla f(\vec{a})\|}$

  και είναι ίσος με $\|\nabla f(\vec{a})\|$ (δηλαδή ο ρυθμός αύξησης είναι $-\|\nabla f(\vec{a})\|$)
- ο ρυθμός μεταβολής της f σε οποιαδήποτε κατεύθυνση κάθετη στο $\nabla f(\vec{a})$ είναι μηδέν

Παράδειγμα. Έστω η συνάρτηση $f(x,y) = x^2 + 3y + (\sin x)^{\cos y}$. Αν

$$\lim_{(x,y)\to(\pi/2,0)} \frac{f(x,y) - Ax - By - C}{\sqrt{(x-\pi/4)^2 + (y-\pi/4)^2}} = 0,$$

τι συμπέρασμα βγάζετε για τους αριθμούς A, B, C;

Παράδειγμα. Έστω η συνάρτηση $f(x,y) = x^2 + 3y + (\sin x)^{\cos y}$. Αν

$$\lim_{(x,y)\to(\pi/2,0)} \frac{f(x,y) - Ax - By - C}{\sqrt{(x-\pi/4)^2 + (y-\pi/4)^2}} = 0,$$

τι συμπέρασμα βγάζετε για τους αριθμούς A, B, C;

Η συνάρτηση $f(x,y)$ είναι προφανώς C^1 στο πεδίο ορισμού της και ειδικότερα σε μία περιοχή του σημείου $(\pi/2,0)$. Η $Ax + By + C$ είναι η βέλτιστη αφφινική προσέγγιση της $f(x,y)$ στο σημείο $(\pi/2,0)$, άρα, σύμφωνα με τα παραπάνω, η $Ax + By + C$ συμπίπτει με την

$$f(\pi/2,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(\pi/2,0)(x-\pi/2) + \frac{\partial f}{\partial y}(\pi/2,0)y.$$

Εχουμε $f(\pi/2,0) = \pi^2/4 + 1$. Επίσης

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + \cos y(\sin x)^{\cos y - 1}\cos x \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(\pi/2,0) = \pi$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3 + (\sin x)^{\cos y}\big(\ln(\sin x)\big)(-\sin y) \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(\pi/2,0) = 3\,.$$

Άρα η βέλτιστη αφφινική προσέγγιση είναι η

$$\frac{\pi^2}{4} + 1 + \pi(x-\pi/2) + 3y$$

και άρα $A = \pi$, $B = 3$, $C = 1 - \pi^2/4$.

Γεωμετρική ερμηνεία. Σύνολα στάθμης. Εφαπτόμενο επίπεδο.

Ορισμός. Έστω $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ και $c \in \mathbb{R}$. Το σύνολο

$$f^{-1}(\{c\}) = \{\vec{x} \in A \ : \ f(\vec{x}) = c\}$$

ονομάζεται *σύνολο στάθμης* της συνάρτησης f.

Παράδειγμα. Έστω $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Τότε το σύνολο στάθμης $f^{-1}(\{c\})$ είναι

- η σφαίρα κέντρου $(0, 0, 0)$ και ακτίνας $\sqrt{c}$ αν $c > 0$
- το μονοσύνολο $\{(0, 0, 0)\}$ αν $c = 0$
- το κενό σύνολο αν $c < 0$

Ορισμός. Ονομάζουμε *υπερεπίπεδο* στον $\mathbb{R}^n$ κάθε σύνολο της μορφής

$$\begin{aligned} E &= \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \ : \ \vec{a} \cdot \vec{x} = b\} \\ &= \{(x_1, \ldots, x_n) \ : a_1 x_1 + \ldots a_n x_n = b\} \end{aligned}$$

όπου $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{a} \neq \vec{0}$, και $b \in \mathbb{R}$.

Ορισμός. Ονομάζουμε *υπερεπίπεδο* στον $\mathbb{R}^n$ κάθε σύνολο της μορφής

$$\begin{aligned} E &= \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \ : \ \vec{a} \cdot \vec{x} = b\} \\ &= \{(x_1, \dots, x_n) \ : a_1 x_1 + \dots a_n x_n = b\} \end{aligned}$$

όπου $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{a} \neq \vec{0}$, και $b \in \mathbb{R}$.

Άρα τα υπερεπίπεδα στον $\mathbb{R}^2$ είναι οι ευθείες και τα υπερεπίπεδα στον $\mathbb{R}^3$ είναι τα (συνήθη) επίπεδα. Ένα υπερεπίπεδο στον $\mathbb{R}^n$ είναι μία «επίπεδη επιφάνεια» διάστασης $n-1$.

Ορισμός. Ονομάζουμε *υπερεπίπεδο* στον $\mathbb{R}^n$ κάθε σύνολο της μορφής

$$\begin{aligned} E &= \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \;:\; \vec{a} \cdot \vec{x} = b\} \\ &= \{(x_1, \ldots, x_n) \;: a_1 x_1 + \ldots a_n x_n = b\} \end{aligned}$$

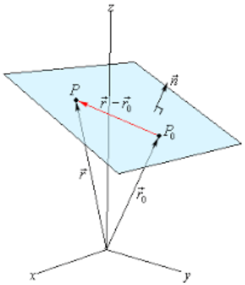
όπου $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{a} \neq \vec{0}$, και $b \in \mathbb{R}$.

Άρα τα υπερεπίπεδα στον $\mathbb{R}^2$ είναι οι ευθείες και τα υπερεπίπεδα στον $\mathbb{R}^3$ είναι τα (συνήθη) επίπεδα. Ένα υπερεπίπεδο στον $\mathbb{R}^n$ είναι μία «επίπεδη επιφάνεια» διάστασης $n-1$.

Αν P_1, P_2 είναι δύο σημεία του υπερεπιπέδου E τότε έχουμε

$$\vec{a} \cdot \overrightarrow{OP_1} = b$$
$$\vec{a} \cdot \overrightarrow{OP_2} = b$$

και αφαιρώντας κατά μελή παίρνουμε $\vec{a} \cdot \overrightarrow{P_1 P_2} = 0$. Άρα το διάνυσμα $\vec{a}$ είναι κάθετο στο υπερεπίπεδο E.



Ορισμός. Έστω $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Το σύνολο

$$\Gamma_f = \{(\vec{x}, y) \in \mathbb{R}^{n+1} : \vec{x} \in A, \;\; y = f(\vec{x})\}$$

ονομάζεται γράφημα της συνάρτησης f.

Ορισμός. Έστω $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Το σύνολο

$$\Gamma_f = \{(\vec{x}, y) \in \mathbb{R}^{n+1} : \vec{x} \in A, \ \ y = f(\vec{x})\}$$

ονομάζεται γράφημα της συνάρτησης f.

Ορισμός. Έστω $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ διαφορίσιμη στο σημείο $\vec{a} \in A$. Το σύνολο

$$E = \big\{(\vec{x}, y) \in \mathbb{R}^{n+1} : y = f(\vec{a}) + \nabla f(\vec{a}) \cdot (\vec{x} - \vec{a})\big\}$$

ονομάζεται εφαπτόμενο υπερεπίπεδο στο γράφημα της f στο σημείο $(\vec{a}, f(\vec{a}))$.

(Άρα το εφαπτόμενο υπερεπίπεδο είναι το γράφημα της βέλτιστης αφφινικής προσέγγισης.)

Ορισμός. Έστω $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Το σύνολο

$$\Gamma_f = \{(\vec{x}, y) \in \mathbb{R}^{n+1} : \vec{x} \in A, \;\; y = f(\vec{x})\}$$

ονομάζεται γράφημα της συνάρτησης f.

Ορισμός. Έστω $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ διαφορίσιμη στο σημείο $\vec{a} \in A$. Το σύνολο

$$E = \left\{(\vec{x}, y) \in \mathbb{R}^{n+1} : y = f(\vec{a}) + \nabla f(\vec{a}) \cdot (\vec{x} - \vec{a})\right\}$$

ονομάζεται εφαπτόμενο υπερεπίπεδο στο γράφημα της f στο σημείο $(\vec{a}, f(\vec{a}))$.

(Άρα το εφαπτόμενο υπερεπίπεδο είναι το γράφημα της βέλτιστης αφφινικής προσέγγισης.)

Ορισμός. Λέμε ότι ένα διάνυσμα $\vec{\nu} \in \mathbb{R}^{n+1}$ είναι κάθετο στο γράφημα της $f(\vec{x})$ στο σημείο $(\vec{a}, f(\vec{a}))$ αν είναι κάθετο στο εφαπτόμενο υπερεπίπεδο.

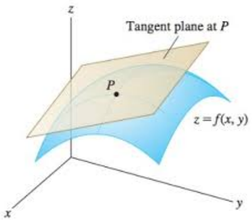
Άρα ένα κάθετο διάνυσμα είναι το $(\nabla f(\vec{a}), -1)$.

Στην περίπτωση μίας διαφορίσιμης συνάρτησης $f(x,y)$ δύο μεταβλητών, το εφαπτόμενο επίπεδο E σε ένα σημείο $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ του γραφήματος έχει εξίσωση

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\,(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\,(y - y_0).$$

Ένα κάθετο διάνυσμα στο γράφημα στο σημείο $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ είναι το

$$\vec{\nu} = \Big(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -1\Big)$$



Οι έννοιες του εφαπτόμενου επίπέδου και κάθετου διανύσματος γενικεύονται σε γενικότερες επιφάνειες, δηλάδή σε επιφάνειες που δεν είναι απαραίτητα γράφημα κάποιας συνάρτησης.

Οι έννοιες του εφαπτόμενου επίπέδου και κάθετου διανύσματος γενικεύονται σε γενικότερες επιφάνειες, δηλάδή σε επιφάνειες που δεν είναι απαραίτητα γράφημα κάποιας συνάρτησης.

Έστω $F(x, y, z)$ μία C^1 συνάρτηση ορισμένη στον $\mathbb{R}^3$ (ή σε ένα υποσύνολο $A \subset \mathbb{R}^3$) και έστω το σύνολο στάθμης

$$S = F^{-1}(\{c\}) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ F(x, y, z) = c\}$$

Ένα σημείο $(x_0, y_0, z_0) \in S$ ονομάζεται ομαλό σημείο του συνόλου S αν $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \neq \vec{0}$.

Οι έννοιες του εφαπτόμενου επίπέδου και κάθετου διανύσματος γενικεύονται σε γενικότερες επιφάνειες, δηλαδή σε επιφάνειες που δεν είναι απαραίτητα γράφημα κάποιας συνάρτησης.

Έστω $F(x, y, z)$ μία C^1 συνάρτηση ορισμένη στον $\mathbb{R}^3$ (ή σε ένα υποσύνολο $A \subset \mathbb{R}^3$) και έστω το σύνολο στάθμης

$$S = F^{-1}(\{c\}) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ F(x, y, z) = c\}$$

Ένα σημείο $(x_0, y_0, z_0) \in S$ ονομάζεται ομαλό σημείο του συνόλου S αν $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \neq \vec{0}$.

Οι έννοιες του εφαπτόμενου επιπέδου και κάθετου διανύσματος γενικεύονται σε γενικότερες επιφάνειες, δηλάδή σε επιφάνειες που δεν είναι απαραίτητα γράφημα κάποιας συνάρτησης.

Έστω $F(x, y, z)$ μία C^1 συνάρτηση ορισμένη στον $\mathbb{R}^3$ (ή σε ένα υποσύνολο $A \subset \mathbb{R}^3$) και έστω το σύνολο στάθμης

$$S = F^{-1}(\{c\}) = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ F(x, y, z) = c\big\}$$

Ένα σημείο $(x_0, y_0, z_0) \in S$ ονομάζεται ομαλό σημείο του συνόλου S αν $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \neq \vec{0}$.

Σε ένα ομαλό σημείο (x_0, y_0, z_0) ορίζεται το εφαπτόμενο επίπεδο στο S ως το επίπεδο με εξίσωση

$$\frac{\partial F}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0,z_0)}(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}\Big|_{(x_0,y_0,z_0)}(y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}\Big|_{(x_0,y_0,z_0)}(z - z_0) = 0$$

Οι έννοιες του εφαπτόμενου επίπέδου και κάθετου διανύσματος γενικεύονται σε γενικότερες επιφάνειες, δηλάδή σε επιφάνειες που δεν είναι απαραίτητα γράφημα κάποιας συνάρτησης.

Έστω $F(x, y, z)$ μία C^1 συνάρτηση ορισμένη στον $\mathbb{R}^3$ (ή σε ένα υποσύνολο $A \subset \mathbb{R}^3$) και έστω το σύνολο στάθμης

$$S = F^{-1}(\{c\}) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ F(x, y, z) = c\}$$

Ένα σημείο $(x_0, y_0, z_0) \in S$ ονομάζεται ομαλό σημείο του συνόλου S αν $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \neq \vec{0}$.

Σε ένα ομαλό σημείο (x_0, y_0, z_0) ορίζεται το εφαπτόμενο επίπεδο στο S ως το επίπεδο με εξίσωση

$$\frac{\partial F}{\partial x}\bigg|_{(x_0,y_0,z_0)}(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}\bigg|_{(x_0,y_0,z_0)}(y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}\bigg|_{(x_0,y_0,z_0)}(z - z_0) = 0$$

Ισοδύναμα, αν $\vec{x} = (x, y, z)$ και $\vec{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$,

$$\nabla F(\vec{x}_0) \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0) = 0 \ .$$

Κάθετο διάνυσμα στο S στο σημείο (x_0, y_0, z_0) ονομάζεται κάθε διάνυσμα που είναι κάθετο στο εφαπτόμενο επίπεδο. Άρα ένα κάθετο διάνυσμα είναι το $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$.

Γενικότερα, έστω $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ μία C^1 συνάρτηση. Ένα σημείο $\vec{x}_0$ του συνόλου

$$S = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : F(\vec{x}) = c\}$$

λέγεται ομαλό αν $\nabla F(\vec{x}_0) \neq \vec{0}$. Σε ένα ομαλό σημείο $\vec{x}_0$ ορίζεται το εφαπτόμενο στο S υπερεπίπεδο ως το υπερεπίπεδο με εξίσωση

$$\nabla F(\vec{x}_0) \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0) = 0.$$

Γενικότερα, έστω $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ μία C^1 συνάρτηση. Ένα σημείο $\vec{x}_0$ του συνόλου

$$S = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : F(\vec{x}) = c\}$$

λέγεται ομαλό αν $\nabla F(\vec{x}_0) \neq \vec{0}$. Σε ένα ομαλό σημείο $\vec{x}_0$ ορίζεται το εφαπτόμενο στο S υπερεπίπεδο ως το υπερεπίπεδο με εξίσωση

$$\nabla F(\vec{x}_0) \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0) = 0.$$

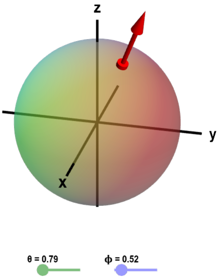
Ένα κάθετο στο S διάνυσμα στο σημείο $\vec{x}_0$ είναι το $\nabla F(\vec{x}_0)$.

Σημείωση. Τα παραπάνω, και ειδικότερα η αιτιολόγησή τους, σχετίζονται άμεσα με το Θεώρημα Πεπλεγμένης Συνάρτησης το οποίο όμως θα δούμε αργότερα.

Παράδειγμα 1. Το σύνολο

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 + z^2 = R^2\right\}$$

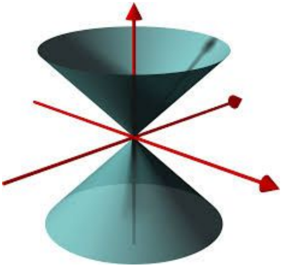
(όπου $R > 0$) είναι η σφαίρα με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα R. Κάθε σημείο της S είναι ομαλό αφού $\nabla(x^2 + y^2 + z^2) = 2(x, y, z) \neq 0$.



Παράδειγμα 2. Το σύνολο

$$C = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 - z^2 = 0\right\}$$

είναι ένας κώνος.



Έχουμε $\nabla(x^2 + y^2 - z^2) = 2(x, y, -z)$, άρα όλα τα σημεία του κώνου είναι ομαλά εκτός από το $(0, 0, 0)$.

Παράδειγμα. Να βρεθεί το εφαπτόμενο επίπεδο στο τυχόν σημείο (x_0, y_0, z_0) του ελλειψοειδούς

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Παράδειγμα. Να βρεθεί το εφαπτόμενο επίπεδο στο τυχόν σημείο (x_0, y_0, z_0) του ελλειψοειδούς

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Έχουμε

$$\nabla F(x, y, z) = \left(\frac{2x}{a^2}, \frac{2y}{b^2}, \frac{2z}{c^2}\right)$$

και άρα το εφαπτόμενο επίπεδο έχει εξίσωση

$$\frac{2x_0}{a^2}(x - x_0) + \frac{2y_0}{b^2}(y - y_0) + \frac{2z_0}{c^2}(z - z_0) = 0$$

Παράδειγμα. Να βρεθεί το εφαπτόμενο επίπεδο στο τυχόν σημείο (x_0, y_0, z_0) του ελλειψοειδούς

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Έχουμε

$$\nabla F(x, y, z) = \left(\frac{2x}{a^2}, \frac{2y}{b^2}, \frac{2z}{c^2}\right)$$

και άρα το εφαπτόμενο επίπεδο έχει εξίσωση

$$\frac{2x_0}{a^2}(x - x_0) + \frac{2y_0}{b^2}(y - y_0) + \frac{2z_0}{c^2}(z - z_0) = 0$$

ισοδύναμα

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} + \frac{z_0 z}{c^2} = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2}$$

Παράδειγμα. Να βρεθεί το εφαπτόμενο επίπεδο στο τυχόν σημείο (x_0, y_0, z_0) του ελλειψοειδούς

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Έχουμε

$$\nabla F(x, y, z) = \left(\frac{2x}{a^2}, \frac{2y}{b^2}, \frac{2z}{c^2}\right)$$

και άρα το εφαπτόμενο επίπεδο έχει εξίσωση

$$\frac{2x_0}{a^2}(x - x_0) + \frac{2y_0}{b^2}(y - y_0) + \frac{2z_0}{c^2}(z - z_0) = 0$$

ισοδύναμα

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} + \frac{z_0 z}{c^2} = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2}$$

ισοδύναμα

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} + \frac{z_0 z}{c^2} = 1$$

Παράγωγοι διανυσματικών συναρτήσεων.

Παράγωγοι διανυσματικών συναρτήσεων.

- Στην παράγραφο αυτή θα συμβολίζουμε τα στοιχεία του $\mathbb{R}^n$ (ή $\mathbb{R}^m$) ως διανύσματα στήλες.

Παράγωγοι διανυσματικών συναρτήσεων.

- Στην παράγραφο αυτή θα συμβολίζουμε τα στοιχεία του $\mathbb{R}^n$ (ή $\mathbb{R}^m$) ως διανύσματα στήλες.

Ορισμός. Έστω $\vec{f} : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\vec{f} = [f_1, \dots, f_m]^{\mathrm{T}}$. Η $\vec{f}$ είναι διαφορίσιμη στο σημείο $\vec{a} \in A$ αν υπάρχει $m \times n$ πίνακας B τέτοιος ώστε

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{a}} \frac{\|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{a}) - B(\vec{x} - \vec{a})\|}{\|\vec{x} - \vec{a}\|} = 0$$

Παράγωγοι διανυσματικών συναρτήσεων.

- Στην παράγραφο αυτή θα συμβολίζουμε τα στοιχεία του $\mathbb{R}^n$ (ή $\mathbb{R}^m$) ως διανύσματα στήλες.

Ορισμός. Έστω $\vec{f} : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\vec{f} = [f_1, \ldots, f_m]^{\mathrm{T}}$. Η $\vec{f}$ είναι διαφορίσιμη στο σημείο $\vec{a} \in A$ αν υπάρχει $m \times n$ πίνακας B τέτοιος ώστε

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{a}} \frac{\|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{a}) - B(\vec{x} - \vec{a})\|}{\|\vec{x} - \vec{a}\|} = 0$$

Η ιδέα του ορισμού είναι η ίδια όπως και για τις πραγματικές συναρτήσεις: μία συνάρτηση είναι διαφορίσιμη σε ένα σημείο αν προσεγγίζεται «πολύ καλά» στο σημείο αυτό από μία αφφινική συνάρτηση.

Παράγωγοι διανυσματικών συναρτήσεων.

- Στην παράγραφο αυτή θα συμβολίζουμε τα στοιχεία του $\mathbb{R}^n$ (ή $\mathbb{R}^m$) ως διανύσματα στήλες.

Ορισμός. Έστω $\vec{f} : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\vec{f} = [f_1, \dots, f_m]^{\mathrm{T}}$. Η $\vec{f}$ είναι διαφορίσιμη στο σημείο $\vec{a} \in A$ αν υπάρχει $m \times n$ πίνακας B τέτοιος ώστε

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{a}} \frac{\|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{a}) - B(\vec{x} - \vec{a})\|}{\|\vec{x} - \vec{a}\|} = 0$$

Η ιδέα του ορισμού είναι η ίδια όπως και για τις πραγματικές συναρτήσεις: μία συνάρτηση είναι διαφορίσιμη σε ένα σημείο αν προσεγγίζεται «πολύ καλά» στο σημείο αυτό από μία αφφινική συνάρτηση.

Αποδεικνύεται εύκολα ότι αν η $\vec{f}$ είναι διαφορίσιμη στο $\vec{a}$ τότε ο πίνακας B είναι μοναδικός. Τον ονομάζουμε παράγωγο της $\vec{f}$ στο $\vec{a}$ και τον συμβολίζουμε με $D\vec{f}(\vec{a})$ ή με $\vec{f}'(\vec{a})$.

Παράγωγοι διανυσματικών συναρτήσεων.

▶ Στην παράγραφο αυτή θα συμβολίζουμε τα στοιχεία του $\mathbb{R}^n$ (ή $\mathbb{R}^m$) ως διανύσματα στήλες.

Ορισμός. Έστω $\vec{f} : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\vec{f} = [f_1, \ldots, f_m]^{\mathrm{T}}$. Η $\vec{f}$ είναι διαφορίσιμη στο σημείο $\vec{a} \in A$ αν υπάρχει $m \times n$ πίνακας B τέτοιος ώστε

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{a}} \frac{\|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{a}) - B(\vec{x} - \vec{a})\|}{\|\vec{x} - \vec{a}\|} = 0$$

Η ιδέα του ορισμού είναι η ίδια όπως και για τις πραγματικές συναρτήσεις: μία συνάρτηση είναι διαφορίσιμη σε ένα σημείο αν προσεγγίζεται «πολύ καλά» στο σημείο αυτό από μία αφφινική συνάρτηση.

Αποδεικνύεται εύκολα ότι αν η $\vec{f}$ είναι διαφορίσιμη στο $\vec{a}$ τότε ο πίνακας B είναι μοναδικός. Τον ονομάζουμε παράγωγο της $\vec{f}$ στο $\vec{a}$ και τον συμβολίζουμε με $D\vec{f}(\vec{a})$ ή με $\vec{f}'(\vec{a})$. Συνεπώς αν η $\vec{f}$ είναι διαφορίσιμη στο $\vec{a}$ τότε

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{a}} \frac{\|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{a}) - D\vec{f}(\vec{a})(\vec{x} - \vec{a})\|}{\|\vec{x} - \vec{a}\|} = 0$$

Πρόταση. Η συνάρτηση $\vec{f} = [f_1, f_2, \ldots, f_m]^{\mathrm{T}}$ είναι διαφορίσιμη στο $\vec{a}$ αν και μόνο αν κάθε f_j είναι διαφορίσιμη στο $\vec{a}$. Στην περίπτωση αυτή έχουμε

$$\vec{f}'(\vec{a}) = \begin{bmatrix} f_1'(\vec{a}) \\ \vdots \\ f_m'(\vec{a}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{a}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\vec{a}) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\vec{a}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\vec{a}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\vec{a}) & \ldots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\vec{a}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\vec{a}) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\vec{a}) & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\vec{a}) \end{bmatrix}$$

Πρόταση. Η συνάρτηση $\vec{f} = [f_1, f_2, \ldots, f_m]^{\mathrm{T}}$ είναι διαφορίσιμη στο $\vec{a}$ αν και μόνο αν κάθε f_j είναι διαφορίσιμη στο $\vec{a}$. Στην περίπτωση αυτή έχουμε

$$\vec{f}'(\vec{a}) = \begin{bmatrix} f_1'(\vec{a}) \\ \vdots \\ f_m'(\vec{a}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{a}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\vec{a}) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\vec{a}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\vec{a}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\vec{a}) & \ldots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\vec{a}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\vec{a}) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\vec{a}) & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\vec{a}) \end{bmatrix}$$

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε τη γνωστή ιδιότητα ότι

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} \frac{\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{a}) - B(\vec{x}-\vec{a})}{\|\vec{x}-\vec{a}\|} = \vec{0}$$

αν και μόνο αν το όριο κάθε συνιστώσας είναι 0. □

Πρόταση. Η συνάρτηση $\vec{f} = [f_1, f_2, \ldots, f_m]^{\mathrm{T}}$ είναι διαφορίσιμη στο $\vec{a}$ αν και μόνο αν κάθε f_j είναι διαφορίσιμη στο $\vec{a}$. Στην περίπτωση αυτή έχουμε

$$\vec{f}'(\vec{a}) = \begin{bmatrix} f_1'(\vec{a}) \\ \vdots \\ f_m'(\vec{a}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{a}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\vec{a}) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\vec{a}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\vec{a}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\vec{a}) & \ldots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\vec{a}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\vec{a}) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\vec{a}) & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\vec{a}) \end{bmatrix}$$

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε τη γνωστή ιδιότητα ότι

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{a}} \frac{\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{a}) - B(\vec{x} - \vec{a})}{\|\vec{x} - \vec{a}\|} = \vec{0}$$

αν και μόνο αν το όριο κάθε συνιστώσας είναι 0. □

Συνεπώς το πρόβλημα της διαφορισιμότητας μιας διανυσματικής συνάρτησης ανάγεται πλήρως σε πρόβλημα διαφορισιμότητας πραγματικών συναρτήσεων.

Το διαφορικό μιας απεικόνισης.

Το διαφορικό μιας απεικόνισης.

Ορισμός. Έστω ότι η συνάρτηση (απεικόνιση) $\vec{f} : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ είναι διαφορίσιμη στο $\vec{a} \in A$. Η γραμμική απεικόνιση που ορίζει ο πίνακας $Df(\vec{a})$ ονομάζεται *διαφορικό* (ή *ολικό διαφορικό*) της συνάρτησης $\vec{f}$ στο σημείο $\vec{a}$.

Το διαφορικό μιας απεικόνισης.

Ορισμός. Έστω ότι η συνάρτηση (απεικόνιση) $\vec{f} : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ είναι διαφορίσιμη στο $\vec{a} \in A$. Η γραμμική απεικόνιση που ορίζει ο πίνακας $Df(\vec{a})$ ονομάζεται *διαφορικό* (ή *ολικό διαφορικό*) της συνάρτησης $\vec{f}$ στο σημείο $\vec{a}$.

Το διαφορικό της $\vec{f}$ στο σημείο $\vec{a}$ συμβολίζεται με $d\vec{f}(\vec{a})$. Άρα

$$d\vec{f}(\vec{a}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \,, \qquad d\vec{f}(\vec{a})(\vec{u}) = Df(\vec{a})\vec{u} \,.$$

Το διαφορικό μιας απεικόνισης.

Ορισμός. Έστω ότι η συνάρτηση (απεικόνιση) $\vec{f}: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ είναι διαφορίσιμη στο $\vec{a} \in A$. Η γραμμική απεικόνιση που ορίζει ο πίνακας $Df(\vec{a})$ ονομάζεται *διαφορικό* (ή *ολικό διαφορικό*) της συνάρτησης $\vec{f}$ στο σημείο $\vec{a}$.

Το διαφορικό της $\vec{f}$ στο σημείο $\vec{a}$ συμβολίζεται με $d\vec{f}(\vec{a})$. Άρα

$$d\vec{f}(\vec{a}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \, , \qquad d\vec{f}(\vec{a})(\vec{u}) = Df(\vec{a})\vec{u} \, .$$

Παρατήρηση. Το διαφορικό $d\vec{f}(\vec{a})$ είναι μία γραμμική απεικόνιση από το $\mathbb{R}^n$ στο $\mathbb{R}^m$. Η παράγωγος $D\vec{f}(\vec{a})$ είναι ο πίνακας της απεικόνισης αυτής ως προς τις κανονικές βάσεις των $\mathbb{R}^n$ και $\mathbb{R}^m$. Συνεπώς έχουμε

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{a}} \frac{\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{a}) - d\vec{f}(\vec{a})(\vec{x} - \vec{a})}{\|\vec{x} - \vec{a}\|} = \vec{0}$$

Κανόνας αλυσίδας.

Κανόνας αλυσίδας.

$$\mathbb{R}^n \quad \xrightarrow{\vec{f}} \quad \mathbb{R}^m \quad \xrightarrow{\vec{g}} \quad \mathbb{R}^k \quad , \qquad \vec{h} = \vec{g} \circ \vec{f}$$

Πρόταση (κανόνας αλυσίδας). Αν η $\vec{f}$ είναι διαφορίσιμη στο $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ και η $\vec{g}$ είναι διαφορίσιμη στο $\vec{b} = \vec{f}(\vec{a})$ τότε η σύνθεση $\vec{h} = \vec{g} \circ \vec{f}$ είναι διαφορίσιμη στο $\vec{a}$ και

$$D\vec{h}(\vec{a}) = D\vec{g}(\vec{b})\, D\vec{f}(\vec{a}) \qquad \big(\text{ ισοδύναμα } d\vec{h}(\vec{a}) = d\vec{g}(\vec{b}) \circ d\vec{f}(\vec{a})\big)$$

Απόδειξη. Στην απόδειξη θα χρησιμοποιήσουμε την ακόλουθη ιδιότητα (άσκηση): για κάθε $p \times q$ πίνακα D, υπάρχει $c > 0$ ώστε

$$\|D\vec{u}\| \leq c\|\vec{u}\| \text{ , για κάθε } \vec{u} \in \mathbb{R}^q \qquad (*)$$

Κανόνας αλυσίδας.

$$\mathbb{R}^n \quad \xrightarrow{\vec{f}} \quad \mathbb{R}^m \quad \xrightarrow{\vec{g}} \quad \mathbb{R}^k \quad , \qquad \vec{h} = \vec{g} \circ \vec{f}$$

Πρόταση (κανόνας αλυσίδας). Αν η $\vec{f}$ είναι διαφορίσιμη στο $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ και η $\vec{g}$ είναι διαφορίσιμη στο $\vec{b} = \vec{f}(\vec{a})$ τότε η σύνθεση $\vec{h} = \vec{g} \circ \vec{f}$ είναι διαφορίσιμη στο $\vec{a}$ και

$$D\vec{h}(\vec{a}) = D\vec{g}(\vec{b})\, D\vec{f}(\vec{a}) \qquad \big(\text{ ισοδύναμα } d\vec{h}(\vec{a}) = d\vec{g}(\vec{b}) \circ d\vec{f}(\vec{a})\big)$$

Απόδειξη. Στην απόδειξη θα χρησιμοποιήσουμε την ακόλουθη ιδιότητα (άσκηση): για κάθε $p \times q$ πίνακα D, υπάρχει $c > 0$ ώστε

$$\|D\vec{u}\| \leq c\|\vec{u}\| \text{ , για κάθε } \vec{u} \in \mathbb{R}^q \qquad (*)$$

Το γεγονός ότι η $\vec{f}$ είναι διαφορίσιμη στο $\vec{a}$ συνεπάγεται ότι υπάρχει συνάρτηση $\vec{\phi}_1(\vec{x})$ από το $\mathbb{R}^n$ στο $\mathbb{R}^m$ ώστε

$$\vec{f}(\vec{x}) = \vec{f}(\vec{a}) + (D\vec{f})(\vec{a})(\vec{x} - \vec{a}) + \vec{\phi}_1(\vec{x}) \quad \text{ και } \lim_{\vec{x} \to \vec{a}} \frac{\|\vec{\phi}_1(\vec{x})\|}{\|\vec{x} - \vec{a}\|} = 0 \qquad (1)$$

Ομοίως, η διαφορισιμότητα της $\vec{g}$ στο $\vec{b} = \vec{f}(\vec{a})$ σημαίνει ότι υπάρχει συνάρτηση $\vec{\phi}_2(\vec{y})$ από το $\mathbb{R}^m$ στο $\mathbb{R}^k$ ώστε

$$\vec{g}(\vec{y}) = \vec{g}(\vec{b}) + (D\vec{g})(\vec{b})(\vec{y} - \vec{b}) + \vec{\phi}_2(\vec{y}) \quad \text{ και } \lim_{\vec{y} \to \vec{b}} \frac{\|\vec{\phi}_2(\vec{y})\|}{\|\vec{y} - \vec{b}\|} = 0. \qquad (2)$$

Από τα παραπάνω, με $\vec{y} = \vec{f}(\vec{x})$ έπεται ότι

$$\begin{aligned}
\vec{h}(\vec{x}) &= \vec{g}\big(\vec{f}(\vec{x})\big) \\
&= \vec{g}\big(\vec{f}(\vec{a})\big) + (D\vec{g})\big(\vec{f}(\vec{a})\big)\big(\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{a})\big) + \vec{\phi}_2\big(\vec{f}(\vec{x})\big) \\
&= \vec{g}\big(\vec{f}(\vec{a})\big) + (D\vec{g})\big(\vec{f}(\vec{a})\big)\Big[(D\vec{f})(\vec{a})(\vec{x} - \vec{a}) + \vec{\phi}_1(\vec{x})\Big] + \vec{\phi}_2\big(\vec{f}(\vec{x})\big) \\
&= \vec{g}\big(\vec{f}(\vec{a})\big) + (D\vec{g})\big(\vec{f}(\vec{a})\big)(D\vec{f})(\vec{a})(\vec{x} - \vec{a}) + \vec{\phi}_3(\vec{x}),
\end{aligned}$$

όπου

$$\vec{\phi}_3(\vec{x}) = (D\vec{g})\big(\vec{f}(\vec{a})\big)\vec{\phi}_1(\vec{x}) + \vec{\phi}_2\big(\vec{f}(\vec{x})\big)\,.$$

Αρκεί να αποδειχθεί ότι

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} \frac{\|\vec{\phi}_3(\vec{x})\|}{\|\vec{x} - \vec{a}\|} = 0\,.$$

Για τον πρώτο από τους δύο όρους που σχηματίζουν την $\vec{\phi}_3$ το ζητούμενο έπεται άμεσα από την δεύτερη σχέση της (1), χρησιμοποιώντας και την $(*)$.

Πρέπει ακόμη να δείξουμε ότι

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} \frac{\vec{\phi}_2\big(\vec{f}(\vec{x})\big)}{\|\vec{x}-\vec{a}\|} = 0$$

Έστω $\vec{x}$ κοντά στο $\vec{a}$. Αν $\vec{f}(\vec{x}) = \vec{f}(\vec{a})$ τότε $\vec{\phi}_2(\vec{x}) = 0$ και είμαστε εντάξει. Έστω ότι $\vec{f}(\vec{x}) \neq \vec{f}(\vec{a})$. Τότε γράφουμε

$$\frac{\vec{\phi}_2\big(\vec{f}(\vec{x})\big)}{\|\vec{x}-\vec{a}\|} = \frac{\vec{\phi}_2\big(\vec{f}(\vec{x})\big)}{\|\vec{f}(\vec{x})-\vec{f}(\vec{a})\|}\,\frac{\|\vec{f}(\vec{x})-\vec{f}(\vec{a})\|}{\|\vec{x}-\vec{a}\|}$$

Λόγω της συνέχειας της $\vec{f}$ στο $\vec{a}$ και της δεύτερης από τις (2) έχουμε

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} \frac{\vec{\phi}_2\big(\vec{f}(\vec{x})\big)}{\|\vec{f}(\vec{x})-\vec{f}(\vec{a})\|} = 0.$$

Πρέπει ακόμη να δείξουμε ότι

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} \frac{\vec{\phi}_2\big(\vec{f}(\vec{x})\big)}{\|\vec{x}-\vec{a}\|} = 0$$

Έστω $\vec{x}$ κοντά στο $\vec{a}$. Αν $\vec{f}(\vec{x}) = \vec{f}(\vec{a})$ τότε $\vec{\phi}_2(\vec{x}) = 0$ και είμαστε εντάξει. Έστω ότι $\vec{f}(\vec{x}) \neq \vec{f}(\vec{a})$. Τότε γράφουμε

$$\frac{\vec{\phi}_2\big(\vec{f}(\vec{x})\big)}{\|\vec{x}-\vec{a}\|} = \frac{\vec{\phi}_2\big(\vec{f}(\vec{x})\big)}{\|\vec{f}(\vec{x})-\vec{f}(\vec{a})\|} \frac{\|\vec{f}(\vec{x})-\vec{f}(\vec{a})\|}{\|\vec{x}-\vec{a}\|}$$

Λόγω της συνέχειας της $\vec{f}$ στο $\vec{a}$ και της δεύτερης από τις (2) έχουμε

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} \frac{\vec{\phi}_2\big(\vec{f}(\vec{x})\big)}{\|\vec{f}(\vec{x})-\vec{f}(\vec{a})\|} = 0.$$

Επίσης έχουμε

$$\frac{\|\vec{f}(\vec{x})-\vec{f}(\vec{a})\|}{\|\vec{x}-\vec{a}\|} = \frac{\|D\vec{f}(\vec{a})(\vec{x}-\vec{a}) + \vec{\phi}_1(\vec{x})\|}{\|\vec{x}-\vec{a}\|} \leq \frac{\|D\vec{f}(\vec{a})(\vec{x}-\vec{a})\|}{\|\vec{x}-\vec{a}\|} + \frac{\|\vec{\phi}_1(\vec{x})\|}{\|\vec{x}-\vec{a}\|}.$$

Ο πρώτος όρος είναι φραγμένη συνάρτηση λόγω της $(*)$ ενώ ο δεύτερος τείνει στο μηδέν. Άρα έχουμε το ζητούμενο. $\square$

Παράδειγμα. Να επαληθευτεί ο κανόνας της αλυσίδας στο σημείο $(2,0)$ για τις συναρτήσεις

$$\vec{f}(x,y) = (x^2 y, x + 2y, x\cos y)\ , \qquad g(u,v,w) = u^2 v + uvw + vw^2$$

Παράδειγμα. Να επαληθευτεί ο κανόνας της αλυσίδας στο σημείο $(2,0)$ για τις συναρτήσεις

$$\vec{f}(x,y) = (x^2 y, x+2y, x\cos y)\ , \qquad g(u,v,w) = u^2 v + uvw + vw^2$$

Έχουμε

$$D\vec{f}(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2xy & x^2 \\ 1 & 2 \\ \cos y & -x\sin y \end{bmatrix} \Longrightarrow Df(2,0) = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα. Να επαληθευτεί ο κανόνας της αλυσίδας στο σημείο $(2,0)$ για τις συναρτήσεις

$$\vec{f}(x,y) = (x^2y, x+2y, x\cos y)\ , \qquad g(u,v,w) = u^2v + uvw + vw^2$$

Έχουμε

$$D\vec{f}(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2xy & x^2 \\ 1 & 2 \\ \cos y & -x\sin y \end{bmatrix} \Longrightarrow Df(2,0) = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Επίσης $\vec{f}(2,0) = (0,2,2)$. Άρα

$$Dg(u,v,w) = [\frac{\partial g}{\partial u} \ \ \frac{\partial g}{\partial v} \ \ \frac{\partial g}{\partial w}] = \begin{bmatrix}2uv+vw & u^2+uw+w^2 & uv+2vw\end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow \qquad Dg(0,2,2) = \begin{bmatrix}4 & 4 & 8\end{bmatrix}$$

Επίσης έχουμε

$$
\begin{aligned}
h(x,y) &= g\big(\vec{f}(x,y)\big) = f_1^2 f_2 + f_1 f_2 f_3 + f_2 f_3^2 \\
&= (x^2y)^2(x+2y) + x^2y(x+2y)x\cos y + (x+2y)(x\cos y)^2 \\
&= x^5y^2 + 2x^4y^3 + x^4y\cos y + 2x^3y^2\cos y + x^3\cos^2 y + 2x^2y\cos^2 y
\end{aligned}
$$

και άρα

$$
\begin{aligned}
Dh(x,y) =& \begin{bmatrix} \dfrac{\partial h}{\partial x} & \dfrac{\partial h}{\partial y} \end{bmatrix} \\
=& \big[5x^4y^2 + 8x^3y^3 + 4x^3y\cos y + 6x^2y^2\cos y + 3x^2\cos^2 y + 4xy\cos^2 y \,\big| \\
& 2x^5y + 6x^4y^2 + x^4\cos y - x^4y\sin y + 4x^3y\cos y - 2x^3y^2\sin y \\
& -2x^3\cos y\sin y + 2x^2\cos^2 y - 4x^2y\cos y\sin y \big]
\end{aligned}
$$

$$\Longrightarrow \quad Dh(2,0) = [12 \quad 24]$$

Επίσης έχουμε

$$\begin{aligned} h(x,y) &= g\big(\vec{f}(x,y)\big) = f_1^2 f_2 + f_1 f_2 f_3 + f_2 f_3^2 \\ &= (x^2y)^2(x+2y) + x^2y(x+2y)x\cos y + (x+2y)(x\cos y)^2 \\ &= x^5y^2 + 2x^4y^3 + x^4y\cos y + 2x^3y^2\cos y + x^3\cos^2 y + 2x^2y\cos^2 y \end{aligned}$$

και άρα

$$\begin{aligned} Dh(x,y) =& [\frac{\partial h}{\partial x} \quad \frac{\partial h}{\partial y}] \\ =& \big[5x^4y^2 + 8x^3y^3 + 4x^3y\cos y + 6x^2y^2\cos y + 3x^2\cos^2 y + 4xy\cos^2 y \big| \\ & 2x^5y + 6x^4y^2 + x^4\cos y - x^4y\sin y + 4x^3y\cos y - 2x^3y^2\sin y \\ & - 2x^3\cos y\sin y + 2x^2\cos^2 y - 4x^2y\cos y\sin y\big] \end{aligned}$$

$$\implies \quad Dh(2,0) = [12 \quad 24]$$

Σύμφωνα με τον κανόνα της αλυσίδας θα πρέπει

$$Dh(2,0) = Dg(0,2,2)\,Df(2,0)$$

Επίσης έχουμε

$$\begin{aligned} h(x,y) &= g\big(\vec{f}(x,y)\big) = f_1^2 f_2 + f_1 f_2 f_3 + f_2 f_3^2 \\ &= (x^2y)^2(x+2y) + x^2y(x+2y)x\cos y + (x+2y)(x\cos y)^2 \\ &= x^5y^2 + 2x^4y^3 + x^4y\cos y + 2x^3y^2\cos y + x^3\cos^2 y + 2x^2y\cos^2 y \end{aligned}$$

και άρα

$$\begin{aligned} Dh(x,y) =& [\frac{\partial h}{\partial x} \quad \frac{\partial h}{\partial y}] \\ =& \big[5x^4y^2 + 8x^3y^3 + 4x^3y\cos y + 6x^2y^2\cos y + 3x^2\cos^2 y + 4xy\cos^2 y \big| \\ & 2x^5y + 6x^4y^2 + x^4\cos y - x^4y\sin y + 4x^3y\cos y - 2x^3y^2\sin y \\ & - 2x^3\cos y\sin y + 2x^2\cos^2 y - 4x^2y\cos y\sin y\big] \end{aligned}$$

$$\implies \quad Dh(2,0) = [12 \quad 24]$$

Σύμφωνα με τον κανόνα της αλυσίδας θα πρέπει

$$Dh(2,0) = Dg(0,2,2)\, Df(2,0)$$

δηλαδή

$$[12 \quad 24] = \big[4 \;\; 4 \;\; 8\big] \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

το οποίο πράγματι ισχύει.

Μία ειδική περίπτωση του κανόνα της αλυσίδας που εμφανίζεται συχνά στην πράξη και τις εφαρμογές είναι η εξής: θεωρούμε μία διαφορίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ και μία διαφορίσιμη καμπύλη $\vec{\gamma} : [0,1] \to \mathbb{R}^n$. Έστω $g(t) = f(\vec{\gamma}(t))$. Τότε ο κανόνας της αλυσίδας μας λέει ότι η $g(t)$ είναι παραγωγίσιμη και

$$\begin{aligned} g'(t) &= \nabla f\big(\vec{\gamma}(t)\big) \cdot \vec{\gamma}'(t) \\ &= \sum_{k=1}^{n} f_{x_k}\big(\vec{\gamma}(t)\big)\gamma_k'(t)\,. \end{aligned}$$

Μία ειδική περίπτωση του κανόνα της αλυσίδας που εμφανίζεται συχνά στην πράξη και τις εφαρμογές είναι η εξής: θεωρούμε μία διαφορίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ και μία διαφορίσιμη καμπύλη $\vec{\gamma} : [0, 1] \to \mathbb{R}^n$. Έστω $g(t) = f(\vec{\gamma}(t))$. Τότε ο κανόνας της αλυσίδας μας λέει ότι η $g(t)$ είναι παραγωγίσιμη και

$$
\begin{aligned}
g'(t) &= \nabla f\big(\vec{\gamma}(t)\big) \cdot \vec{\gamma}'(t) \\
&= \sum_{k=1}^{n} f_{x_k}\big(\vec{\gamma}(t)\big)\gamma_k'(t)\,.
\end{aligned}
$$

Παράδειγμα. Έστω $f = f(x, y)$, μία C^1 συνάρτηση και έστω $\hat{f}(r, \theta)$ συνάρτηση τέτοια ώστε

$$\hat{f}(r, \theta) = f(x, y)\ , \quad x = r\cos\theta\ , \ \ y = r\sin\theta$$

Να δειχθεί ότι

$$|\nabla f|^2 = \Big(\frac{\partial \hat{f}}{\partial r}\Big)^2 + \frac{1}{r^2}\Big(\frac{\partial \hat{f}}{\partial \theta}\Big)^2$$

Παράδειγμα. Έστω $f = f(x,y)$, μία C^1 συνάρτηση και έστω $\hat{f}(r,\theta)$ συνάρτηση τέτοια ώστε

$$\hat{f}(r,\theta) = f(x,y)\ , \quad x = r\cos\theta\ , \ \ y = r\sin\theta$$

Να δειχθεί ότι

$$|\nabla f|^2 = \Big(\frac{\partial \hat{f}}{\partial r}\Big)^2 + \frac{1}{r^2}\Big(\frac{\partial \hat{f}}{\partial \theta}\Big)^2$$

Έχουμε $\hat{f} = f \circ T$ όπου

$$T(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta) = (x,y).$$

Από τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \cos\theta\frac{\partial f}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}$$

και άρα

$$\Big(\frac{\partial \hat{f}}{\partial r}\Big)^2 = \cos^2\theta\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big)^2 + \sin^2\theta\Big(\frac{\partial f}{\partial y}\Big)^2 + 2\cos\theta\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}\ .$$

Παρόμοια

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} = -r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x} + r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}$$

και άρα

$$\frac{1}{r^2}\Big(\frac{\partial \hat{f}}{\partial \theta}\Big)^2 = \sin^2\theta\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big)^2 + \cos^2\theta\Big(\frac{\partial f}{\partial y}\Big)^2 - 2\cos\theta\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}\ .$$

Άρα

$$\Big(\frac{\partial \hat{f}}{\partial r}\Big)^2 + \frac{1}{r^2}\Big(\frac{\partial \hat{f}}{\partial \theta}\Big)^2 = \Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial f}{\partial y}\Big)^2 = |\nabla f|^2$$

Παρατήρηση. Συχνά γράφουμε καταχρηστικά $f(r,\theta)$ αντί για $\hat{f}(r,\theta)$. Λέμε για παράδειγμα ότι η συνάρτηση

$$f(x,y) = x + y$$

εκφράζεται σε πολικές συντεταγμένες ως

$$f(r,\theta) = r(\cos\theta + \sin\theta)\,.$$

Έστω για παράδειγμα η συνάρτηση

$$f(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}\,.$$

Σε πολικές συντεταγμένες έχουμε

$$f(x,y) = f(r) = \ln r\ .$$

Άρα

$$|\nabla f|^2 = f'(r)^2 = \frac{1}{r^2} = \frac{1}{x^2+y^2}\,.$$

Απεικονίσεις από το $\mathbb{R}^n$ στο $\mathbb{R}^n$.

Απεικονίσεις από το $\mathbb{R}^n$ στο $\mathbb{R}^n$.

Ορισμός. Έστω $\vec{f} : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Ο πίνακας

$$J\vec{f} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

ονομάζεται Ιακωβιανός πίνακας της $\vec{f}$. Η ορίζουσα $\det(J\vec{f})$ ονομάζεται Ιακωβιανή ορίζουσα της $\vec{f}$.

Απεικονίσεις από το $\mathbb{R}^n$ στο $\mathbb{R}^n$.

Ορισμός. Έστω $\vec{f}: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Ο πίνακας

$$J\vec{f} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

ονομάζεται Ιακωβιανός πίνακας της $\vec{f}$. Η ορίζουσα $\det(J\vec{f})$ ονομάζεται Ιακωβιανή ορίζουσα της $\vec{f}$.

Εναλλακτικός συμβολισμός: αν $(u, v) = \vec{f}(x, y)$ τότε γράφουμε επίσης

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$$

Απεικονίσεις από το $\mathbb{R}^n$ στο $\mathbb{R}^n$.

Ορισμός. Έστω $\vec{f} : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Ο πίνακας

$$J\vec{f} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

ονομάζεται Ιακωβιανός πίνακας της $\vec{f}$. Η ορίζουσα $\det(J\vec{f})$ ονομάζεται Ιακωβιανή ορίζουσα της $\vec{f}$.

Εναλλακτικός συμβολισμός: αν $(u, v) = \vec{f}(x, y)$ τότε γράφουμε επίσης

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$$

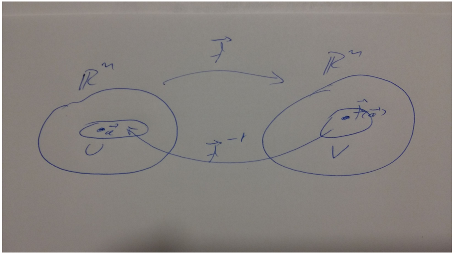
Παρατήρηση. Ο όρος Ιακωβιανός πίνακας χρησιμοποιείται πολύ συχνά και για απεικονίσεις από το $\mathbb{R}^n$ στο $\mathbb{R}^m$.

Θεώρημα Αντίστροφής Συνάρτησης. Έστω $\vec{f} : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ μία C^1 απεικόνιση και $\vec{a} \in A$. Αν $\det[J\vec{f}(\vec{a})] \neq 0$ τότε η $\vec{f}$ είναι τοπικά αντιστρέψιμη στο $\vec{a}$, δηλαδή υπάρχουν ανοικτά σύνολα $U, V \subset \mathbb{R}^n$ με $\vec{a} \in U \subset A$, $\vec{f}(\vec{a}) \in V$ ώστε ο περιορισμός $\vec{f}|_U$ να είναι ένα 1-1 και επί από το U στο V. Επιπλέον η αντίστροφη απεικόνιση $\vec{f}^{-1} : V \to U$ (ακριβέστερα $(\vec{f}|_U)^{-1} : V \to U$) είναι διαφορίσιμη και η παράγωγός της στο τυχόν $\vec{y} \in V$ δίνεται από τη σχέση

$$D\vec{f}^{-1}(\vec{y}) = (D\vec{f}(\vec{x}))^{-1}$$

όπου $\vec{x}$ είναι το μοναδικό $\vec{x} \in U$ ώστε $\vec{f}(\vec{x}) = \vec{y}$.
[Δηλαδή $D\vec{f}^{-1}(\vec{y}) = (D\vec{f}(\vec{f}^{-1}(y)))^{-1}$]
Επιπλέον, αν η $\vec{f}$ είναι τάξης C^k τότε και η $\vec{f}^{-1}$ είναι τάξης C^k.

Απόδειξη. Παραλείπεται.



Παρατήρηση. Το θεώρημα αντίστροφης συνάρτησης μας λέει ότι για $\vec{x}$ κοντά στο $\vec{a}$ και $\vec{y}$ κοντά στο $\vec{f}(\vec{a})$ η σχέση $\vec{y} = \vec{f}(\vec{x})$ μπορεί να λυθεί μονοσήμαντα ως προς $\vec{x}$.

Παρατήρηση. Σε αντίθεση με την περίπτωση $n = 1$, όταν $n \geq 2$ η τοπική αντιστρεψιμότητα σε κάθε σημείο δεν συναπάγεται ολική αντιστριψιμότητα. Για παράδειγμα ας θεωρήσουμε την

$$\vec{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad , \qquad \vec{f}(x,y) = (e^x \cos y, e^x \sin y) = (u,v).$$

Έχουμε τότε

$$J\vec{f}(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{bmatrix}$$

και άρα $\det(J\vec{f}(x,y)) = e^{2x} \neq 0$.

Συνεπώς η $\vec{f}$ είναι τοπικά αντιστρέψιμη σε κάθε σημείο. Δεν είναι όμως ολικά αντιστρέψιμη αφού δεν είναι 1-1 (είναι περιοδική ως προς y).

Το θεώρημα αντίστροφής συνάρτησης είναι ειδική περίπτωση ενός γενικότερου θεωρήματος, του Θεωρήματος Πεπλεγμένης Συνάρτησης, το οποίο αφορά συναρτήσεις μεταξύ χώρων που δεν έχουν απαραίτητα την ίδια διάσταση.

Το θεώρημα αντίστροφής συνάρτησης είναι ειδική περίπτωση ενός γενικότερου θεωρήματος, του Θεωρήματος Πεπλεγμένης Συνάρτησης, το οποίο αφορά συναρτήσεις μεταξύ χώρων που δεν έχουν απαραίτητα την ίδια διάσταση.

Εδώ θα δούμε μόνο δύο ειδικές περιπτώσεις. Το πρώτο θεώρημα μας δίνει μία συνθήκη υπό την οποία μία σχέση $F(x, y) = 0$ μπορεί να λυθεί ως προς y.

Το θεώρημα αντίστροφής συνάρτησης είναι ειδική περίπτωση ενός γενικότερου θεωρήματος, του Θεωρήματος Πεπλεγμένης Συνάρτησης, το οποίο αφορά συναρτήσεις μεταξύ χώρων που δεν έχουν απαραίτητα την ίδια διάσταση.

Εδώ θα δούμε μόνο δύο ειδικές περιπτώσεις. Το πρώτο θεώρημα μας δίνει μία συνθήκη υπό την οποία μία σχέση $F(x, y) = 0$ μπορεί να λυθεί ως προς y.

Θεώρημα Πεπλεγμένης Συνάρτησης Ι. Έστω $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ μία C^1 συνάρτηση και $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ σημείο τέτοιο ώστε $F(x_0, y_0) = 0$. Αν

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$$

τότε υπάρχει $\delta > 0$ και C^1 συνάρτηση $g : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \to \mathbb{R}$ με $g(x_0) = y_0$ ώστε

$$F\big(x, g(x)\big) = 0 \ , \qquad \text{για κάθε } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta). \tag{3}$$

Επιπλέον ισχύει

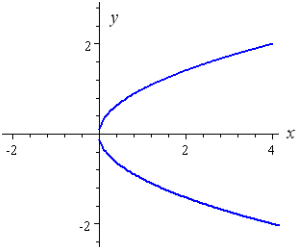
$$g'(x_0) = -\frac{\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{(x_0, y_0)}}{\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{(x_0, y_0)}} \, . \tag{4}$$

Απόδειξη. Αποδεικνύουμε μόνο την (4). Παραγωγίζουμε τη σχέση (3). Χρησιμοποιώντας τον κανόνα της αλυσίδας (3) παίρνουμε

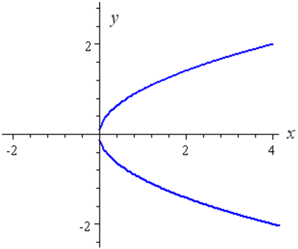
$$0 = \frac{d}{dx} F\big(x, g(x)\big) = \left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{(x, g(x))} + \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{(x, g(x))} g'(x)$$

και η (4) έπεται θέτοντας $x = x_0$. □

Παράδειγμα. Έστω $F(x, y) = x - y^2$.



Παράδειγμα. Έστω $F(x,y) = x - y^2$.

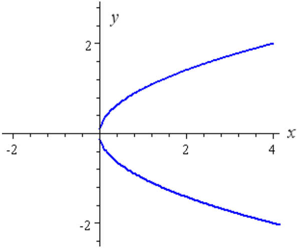


Ισχύει

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -2y \ ,$$

το οποίο είναι διάφορο του μηδενός σε κάθε σημείο της παραβολής εκτός του $(0,0)$.

Παράδειγμα. Έστω $F(x,y) = x - y^2$.



Ισχύει

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -2y \ ,$$

το οποίο είναι διάφορο του μηδενός σε κάθε σημείο της παραβολής εκτός του $(0,0)$.

Η σχέση $F(x,y) = 0$ λύνεται τοπικά ως προς y σε μία περιοχή οποιουδήποτε σημείου της παραβολής εκτός από το $(0,0)$. Ισοδύναμα, η παραβολή είναι τοπικά γράφημα μίας συνάρτησης $y = y(x)$ τοπικά σε μία περιοχή οποιουδήποτε σημείου της εκτός από το $(0,0)$.

Το επόμενο θεώρημα μας δίνει μία συνθήκη υπό την οποία μία σχέση $F(x, y, z) = 0$ μπορεί να λυθεί ως προς z.

Το επόμενο θεώρημα μας δίνει μία συνθήκη υπό την οποία μία σχέση $F(x,y,z)=0$ μπορεί να λυθεί ως προς z.

Θεώρημα Πεπλεγμένης Συνάρτησης ΙΙ. Έστω $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ μία C^1 συνάρτηση και $(x_0,y_0,z_0)\in\mathbb{R}^3$ σημείο τέτοιο ώστε $F(x_0,y_0,z_0)=0$. Αν

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\neq 0$$

τότε υπάρχει περιοχή $U\subset\mathbb{R}^2$ του (x_0,y_0) και C^1 συνάρτηση $g:U\to\mathbb{R}$ με $g(x_0,y_0)=z_0$ ώστε

$$F\big(x,y,g(x,y)\big)=0\ , \qquad \text{για κάθε } (x,y)\in U\,. \tag{5}$$

Επιπλέον ισχύει

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0)=-\frac{\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}}{\left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}}\ , \qquad \frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0)=-\frac{\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}}{\left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}} \tag{6}$$

Το επόμενο θεώρημα μας δίνει μία συνθήκη υπό την οποία μία σχέση $F(x, y, z) = 0$ μπορεί να λυθεί ως προς z.

Θεώρημα Πεπλεγμένης Συνάρτησης ΙΙ. Έστω $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ μία C^1 συνάρτηση και $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ σημείο τέτοιο ώστε $F(x_0, y_0, z_0) = 0$. Αν

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$$

τότε υπάρχει περιοχή $U \subset \mathbb{R}^2$ του (x_0, y_0) και C^1 συνάρτηση $g : U \to \mathbb{R}$ με $g(x_0, y_0) = z_0$ ώστε

$$F\big(x, y, g(x, y)\big) = 0 \;, \qquad \text{για κάθε } (x, y) \in U \,. \tag{5}$$

Επιπλέον ισχύει

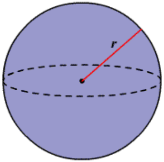
$$\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0,z_0)}}{\frac{\partial F}{\partial z}\Big|_{(x_0,y_0,z_0)}} \;, \qquad \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}\Big|_{(x_0,y_0,z_0)}}{\frac{\partial F}{\partial z}\Big|_{(x_0,y_0,z_0)}} \tag{6}$$

Απόδειξη. Αποδεικνύουμε μόνο την (6). Παραγωγίζουμε τη σχέση (5) ως προς x. Χρησιμοποιώντας τον κανόνα της αλυσίδας παίρνουμε

$$0 = \frac{\partial}{\partial x} F\big(x, y, g(x, y)\big) = \frac{\partial F}{\partial x}\Big|_{(x,y,g(x,y))} + \frac{\partial F}{\partial z}\Big|_{(x,y,g(x,y))} \frac{\partial g}{\partial x}\Big|_{(x,y)} \,,$$

και η (6) έπεται θέτοντας $(x, y) = (x_0, y_0)$. □

Παράδειγμα. Έστω $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - r^2$.

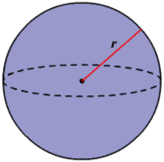


Ισχύει

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 2z \ ,$$

το οποίο είναι διάφορο του μηδενός σε κάθε σημείο της σφαίρας εκτός του ισημερινού.

Παράδειγμα. Έστω $F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - r^2$.



Ισχύει

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 2z \ ,$$

το οποίο είναι διάφορο του μηδενός σε κάθε σημείο της σφαίρας εκτός του ισημερινού.

Η σχέση $F(x,y,z) = 0$ λύνεται λοιπόν τοπικά ως προς z σε μία περιοχή οποιουδήποτε σημείου της σφαίρας εκτός από αυτά του ισημερινού. Ισοδύναμα, η σφαίρα είναι τοπικά γράφημα μίας συνάρτησης $z = z(x,y)$ τοπικά σε μία περιοχή οποιουδήποτε σημείου της εκτός από τα σημεία του ισημερινού.

Παράγωγοι ανώτερης τάξης.

Οι μερικές παράγωγοι β′ τάξης ορίζονται κατά φυσικό τρόπο.

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\frac{\partial f}{\partial x_k}\Big) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} = f_{kj} \quad , \qquad \frac{\partial}{\partial x_k}\Big(\frac{\partial f}{\partial x_k}\Big) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2} = f_{kk}$$

Παράγωγοι ανώτερης τάξης.

Οι μερικές παράγωγοι β′ τάξης ορίζονται κατά φυσικό τρόπο.

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\frac{\partial f}{\partial x_k}\Big) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} = f_{kj} \quad , \qquad \frac{\partial}{\partial x_k}\Big(\frac{\partial f}{\partial x_k}\Big) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2} = f_{kk}$$

Ανάλογα ορίζονται και οι μερικές παράγωγοι ανώτερης τάξης.

Παράγωγοι ανώτερης τάξης.

Οι μερικές παράγωγοι β′ τάξης ορίζονται κατά φυσικό τρόπο.

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\frac{\partial f}{\partial x_k}\Big) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} = f_{kj} \quad , \qquad \frac{\partial}{\partial x_k}\Big(\frac{\partial f}{\partial x_k}\Big) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2} = f_{kk}$$

Ανάλογα ορίζονται και οι μερικές παράγωγοι ανώτερης τάξης.

Ορισμός. Μία συνάρτηση $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι τάξης C^k αν υπάρχουν όλες οι μερικές της παράγωγοι τάξης k και είναι συνεχείς.

Παράδειγμα. Έστω $g(x, y) = x^2 \sin y$. Τότε

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 2x \sin y \ , \qquad \frac{\partial g}{\partial y} = x^2 \cos y$$

Παράγωγοι ανώτερης τάξης.

Οι μερικές παράγωγοι β′ τάξης ορίζονται κατά φυσικό τρόπο.

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\frac{\partial f}{\partial x_k}\Big) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} = f_{kj} \quad , \qquad \frac{\partial}{\partial x_k}\Big(\frac{\partial f}{\partial x_k}\Big) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2} = f_{kk}$$

Ανάλογα ορίζονται και οι μερικές παράγωγοι ανώτερης τάξης.

Ορισμός. Μία συνάρτηση $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι τάξης C^k αν υπάρχουν όλες οι μερικές της παράγωγοι τάξης k και είναι συνεχείς.

Παράδειγμα. Έστω $g(x, y) = x^2 \sin y$. Τότε

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 2x \sin y \,, \qquad \frac{\partial g}{\partial y} = x^2 \cos y$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = 2 \sin y \ , \quad \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} = 2x \cos y \ , \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = 2x \cos y \ , \quad \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = -x^2 \sin y \,.$$

Παράγωγοι ανώτερης τάξης.

Οι μερικές παράγωγοι β′ τάξης ορίζονται κατά φυσικό τρόπο.

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\frac{\partial f}{\partial x_k}\Big) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} = f_{kj} \quad , \qquad \frac{\partial}{\partial x_k}\Big(\frac{\partial f}{\partial x_k}\Big) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2} = f_{kk}$$

Ανάλογα ορίζονται και οι μερικές παράγωγοι ανώτερης τάξης.

Ορισμός. Μία συνάρτηση $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι τάξης C^k αν υπάρχουν όλες οι μερικές της παράγωγοι τάξης k και είναι συνεχείς.

Παράδειγμα. Έστω $g(x, y) = x^2 \sin y$. Τότε

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 2x \sin y \,, \qquad \frac{\partial g}{\partial y} = x^2 \cos y$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = 2 \sin y \quad , \quad \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} = 2x \cos y \quad , \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = 2x \cos y \quad , \quad \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = -x^2 \sin y \,.$$

Παρατηρούμε ότι $f_{xy} = f_{yx}$.

Πρόταση. Έστω $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Αν όλες οι μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης υπάρχουν σε μία περιοχή του $\vec{x}_0 \in A$ και είναι συνεχείς στο x_0 τότε

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(\vec{x}_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(\vec{x}_0)\ , \qquad \text{για κάθε } 1 \le j, k \le n.$$

Απόδειξη. Παραλείπεται.

Πρόταση. Έστω $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Αν όλες οι μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης υπάρχουν σε μία περιοχή του $\vec{x}_0 \in A$ και είναι συνεχείς στο x_0 τότε

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(\vec{x}_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(\vec{x}_0)\ , \qquad \text{για κάθε } 1 \leq j, k \leq n.$$

Απόδειξη. Παραλείπεται.

Συνεπώς για C^2 συναρτήσεις οι (μεικτές) μερικές παράγωγοι β′ τάξης είναι ανεξάρτητες της σειράς παραγώγισης.

Πρόταση. Έστω $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Αν όλες οι μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης υπάρχουν σε μία περιοχή του $\vec{x}_0 \in A$ και είναι συνεχείς στο x_0 τότε

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(\vec{x}_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(\vec{x}_0)\ , \qquad \text{για κάθε } 1 \leq j, k \leq n.$$

Απόδειξη. Παραλείπεται.

Συνεπώς για C^2 συναρτήσεις οι (μεικτές) μερικές παράγωγοι β′ τάξης είναι ανεξάρτητες της σειράς παραγώγισης.

Επαγωγικά έπεται ότι αν μία συνάρτηση είναι τάξης C^k τότε όλες οι μεικτές μερικές παράγωγοι τάξης k είναι ανεξάρτητες της σειράς παραγώγισης.

Τύπος του Taylor.

Τύπος του Taylor.

Έστω ότι η συνάρτηση $f : A \subset \mathbb{R}^n \to A$ είναι τάξης C^m και έστω $\vec{x}_0 \in A$. Για $1 \leq j \leq m$ ορίζουμε τη συνάρτηση $D_j f(\vec{x}_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} D_j f(\vec{x}_0)(\vec{h}) &= \sum_{k_1=1}^{n} \sum_{k_2=1}^{n} \dots \sum_{k_j=1}^{n} \frac{\partial^j f(\vec{x}_0)}{\partial x_{k_1} \partial x_{k_2} \dots \partial x_{k_j}} h_{k_1} h_{k_2} \dots h_{k_j} \\ &= \sum_{k_1=1}^{n} \sum_{k_2=1}^{n} \dots \sum_{k_j=1}^{n} f_{k_1 k_2 \dots k_j}(\vec{x}_0) h_{k_1} h_{k_2} \dots h_{k_j} \end{aligned}$$

Συνεπώς παραγωγίζουμε διαδοχικά j φορές, παίρνοντας όλους τους δυνατούς συνδυασμούς: n επίλογές για την πρώτη παραγώγιση ($k_1 = 1, 2, \dots, n$), n για τη δεύτερη κ.ο.κ.

Ειδικότερα έχουμε:

- $j = 1: \quad D_1 f(\vec{x}_0)(\vec{h}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{x}_0) h_k = \nabla f(\vec{x}_0) \cdot \vec{h}$

  (άρα $D_1 f(\vec{x}_0) = df(\vec{x}_0)$, το διαφορικό της f στο $\vec{x}_0$)

- $j = 2: \quad D_2 f(\vec{x}_0)(\vec{h}) = \sum_{k_1=1}^{n} \sum_{k_2=1}^{n} \frac{\partial^2 f(\vec{x}_0)}{\partial x_{k_1} \partial x_{k_2}} h_{k_1} h_{k_2}$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 f(\vec{x}_0)}{\partial x_k^2} h_k^2 + 2 \sum_{1 \leq k < l \leq n} \frac{\partial^2 f(\vec{x}_0)}{\partial x_k \partial x_l} h_k h_l$$

Τύπος του Taylor.

Έστω ότι η συνάρτηση $f : A \subset \mathbb{R}^n \to A$ είναι τάξης C^m και έστω $\vec{x}_0 \in A$. Για $1 \le j \le m$ ορίζουμε τη συνάρτηση $D_j f(\vec{x}_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} D_j f(\vec{x}_0)(\vec{h}) &= \sum_{k_1=1}^{n} \sum_{k_2=1}^{n} \cdots \sum_{k_j=1}^{n} \frac{\partial^j f(\vec{x}_0)}{\partial x_{k_1} \partial x_{k_2} \ldots \partial x_{k_j}} h_{k_1} h_{k_2} \ldots h_{k_j} \\ &= \sum_{k_1=1}^{n} \sum_{k_2=1}^{n} \cdots \sum_{k_j=1}^{n} f_{k_1 k_2 \ldots k_j}(\vec{x}_0) h_{k_1} h_{k_2} \ldots h_{k_j} \end{aligned}$$

Συνεπώς παραγωγίζουμε διαδοχικά j φορές, παίρνοντας όλους τους δυνατούς συνδυασμούς: n επίλογές για την πρώτη παραγώγιση ($k_1 = 1, 2, \ldots, n$), n για τη δεύτερη κ.ο.κ.

Ειδικότερα έχουμε:

- $j = 1 :\quad D_1 f(\vec{x}_0)(\vec{h}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{x}_0) h_k = \nabla f(\vec{x}_0) \cdot \vec{h}$

  (άρα $D_1 f(\vec{x}_0) = df(\vec{x}_0)$, το διαφορικό της f στο $\vec{x}_0$)

- $j = 2 :\quad D_2 f(\vec{x}_0)(\vec{h}) = \sum_{k_1=1}^{n} \sum_{k_2=1}^{n} \frac{\partial^2 f(\vec{x}_0)}{\partial x_{k_1} \partial x_{k_2}} h_{k_1} h_{k_2}$

  $$= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 f(\vec{x}_0)}{\partial x_k^2} h_k^2 + 2 \sum_{1 \le k < l \le n} \frac{\partial^2 f(\vec{x}_0)}{\partial x_k \partial x_l} h_k h_l$$

Η $D_1 f(\vec{x}_0)$ είναι μία γραμμική απεικόνιση από το $\mathbb{R}^n$ στο $\mathbb{R}$ (μία γραμμική μορφή) ενώ η $D_2 f(\vec{x}_0)$ είναι μία τετραγωνική μορφή στον $\mathbb{R}^n$.

Η περίπτωση $n = 2$.

Η περίπτωση $n = 2$.

Όταν $n = 2$, $f = f(x, y)$, τότε έχουμε στο τυχόν (x_0, y_0):

- $D_1 f(x_0, y_0)(\vec{h}) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \vec{h} = f_x(x_0, y_0)h_1 + f_y(x_0, y_0)h_2$
- $D_2 f(x_0, y_0)(\vec{h}) = f_{xx}h_1^2 + 2f_{xy}h_1h_2 + f_{yy}h_2^2$
- $D_3 f(x_0, y_0)(\vec{h}) = f_{xxx}h_1^3 + 3f_{xxy}h_1^2h_2 + 3f_{xyy}h_1h_2^2 + f_{yyy}h_2^3$

όπου όλες οι μερικές παράγωγοι είναι υπολογισμένες στο (x_0, y_0).

Η περίπτωση $n = 2$.

Όταν $n = 2$, $f = f(x, y)$, τότε έχουμε στο τυχόν (x_0, y_0):

- $D_1 f(x_0, y_0)(\vec{h}) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \vec{h} = f_x(x_0, y_0)h_1 + f_y(x_0, y_0)h_2$
- $D_2 f(x_0, y_0)(\vec{h}) = f_{xx}h_1^2 + 2f_{xy}h_1h_2 + f_{yy}h_2^2$
- $D_3 f(x_0, y_0)(\vec{h}) = f_{xxx}h_1^3 + 3f_{xxy}h_1^2h_2 + 3f_{xyy}h_1h_2^2 + f_{yyy}h_2^3$

όπου όλες οι μερικές παράγωγοι είναι υπολογισμένες στο (x_0, y_0).

Οι συντελεστές που εμφανίζονται είναι οι συντελεστές του διωνυμικού αναπτύγματος. Σχηματικά ισχύει η σχέση

$$\begin{aligned} D_k f(x_0, y_0)(\vec{h}) &= \Big(\frac{\partial}{\partial x}h_1 + \frac{\partial}{\partial y}h_2\Big)^k f\Big|_{(x_0,y_0)} \\ &= \sum_{j=0}^{k} \frac{k!}{j!(k-j)!} \frac{\partial^k f}{\partial_x^{k-j}\partial_y^j}\Big|_{(x_0,y_0)} h_1^{k-j}h_2^j \end{aligned}$$

Η περίπτωση $n = 2$.

Όταν $n = 2$, $f = f(x, y)$, τότε έχουμε στο τυχόν (x_0, y_0):

- $D_1 f(x_0, y_0)(\vec{h}) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \vec{h} = f_x(x_0, y_0)h_1 + f_y(x_0, y_0)h_2$
- $D_2 f(x_0, y_0)(\vec{h}) = f_{xx}h_1^2 + 2f_{xy}h_1h_2 + f_{yy}h_2^2$
- $D_3 f(x_0, y_0)(\vec{h}) = f_{xxx}h_1^3 + 3f_{xxy}h_1^2h_2 + 3f_{xyy}h_1h_2^2 + f_{yyy}h_2^3$

όπου όλες οι μερικές παράγωγοι είναι υπολογισμένες στο (x_0, y_0).

Οι συντελεστές που εμφανίζονται είναι οι συντελεστές του διωνυμικού αναπτύγματος. Σχηματικά ισχύει η σχέση

$$\begin{aligned} D_k f(x_0, y_0)(\vec{h}) &= \Big(\frac{\partial}{\partial x}h_1 + \frac{\partial}{\partial y}h_2\Big)^k f\Big|_{(x_0,y_0)} \\ &= \sum_{j=0}^{k} \frac{k!}{j!(k-j)!}\,\frac{\partial^k f}{\partial_x^{k-j}\partial_y^j}\Big|_{(x_0,y_0)} h_1^{k-j}h_2^j \end{aligned}$$

Ανάλογη ιδιότητα ισχύει όταν η συνάρτηση είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$: μπορούμε σχηματικά να γράψουμε

$$D_k f(\vec{x}_0)(\vec{h}) = \big(\nabla \cdot \vec{h}\big)^k f\Big|_{(x_0,y_0)},$$

οπότε εμφανίζονται οι συντελεστές του αναπτύγματος του $(a_1 + \ldots + a_n)^k$.

Η περίπτωση $n = 2$.

Όταν $n = 2$, $f = f(x, y)$, τότε έχουμε στο τυχόν (x_0, y_0):

- $D_1 f(x_0, y_0)(\vec{h}) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \vec{h} = f_x(x_0, y_0)h_1 + f_y(x_0, y_0)h_2$
- $D_2 f(x_0, y_0)(\vec{h}) = f_{xx}h_1^2 + 2f_{xy}h_1h_2 + f_{yy}h_2^2$
- $D_3 f(x_0, y_0)(\vec{h}) = f_{xxx}h_1^3 + 3f_{xxy}h_1^2h_2 + 3f_{xyy}h_1h_2^2 + f_{yyy}h_2^3$

όπου όλες οι μερικές παράγωγοι είναι υπολογισμένες στο (x_0, y_0).

Οι συντελεστές που εμφανίζονται είναι οι συντελεστές του διωνυμικού αναπτύγματος. Σχηματικά ισχύει η σχέση

$$\begin{aligned} D_k f(x_0, y_0)(\vec{h}) &= \Big(\frac{\partial}{\partial x}h_1 + \frac{\partial}{\partial y}h_2\Big)^k f\Big|_{(x_0,y_0)} \\ &= \sum_{j=0}^{k} \frac{k!}{j!(k-j)!} \frac{\partial^k f}{\partial_x^{k-j}\partial_y^j}\Big|_{(x_0,y_0)} h_1^{k-j}h_2^j \end{aligned}$$

Ανάλογη ιδιότητα ισχύει όταν η συνάρτηση είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$: μπορούμε σχηματικά να γράψουμε

$$D_k f(\vec{x}_0)(\vec{h}) = \big(\nabla \cdot \vec{h}\big)^k f\Big|_{(x_0,y_0)},$$

οπότε εμφανίζονται οι συντελεστές του αναπτύγματος του $(a_1 + \ldots + a_n)^k$.

Σύμβαση. Για $k = 0$ θέτουμε $D_0 f(\vec{x}_0)(\vec{h}) = f(\vec{x}_0)$ (σταθερή συνάρτηση)

Θεώρημα (τύπος του Taylor) Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ κυρτό και $f : A \to \mathbb{R}$ τάξης C^{m+1}. Έστω $\vec{x}_0 \in A$. Για κάθε $\vec{x} \in A$ υπάρχει $\vec{\xi}$ στο ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα $\vec{x}_0$, $\vec{x}$ ώστε

$$
\begin{aligned}
f(\vec{x}) = & f(\vec{x}_0) + D_1 f(\vec{x}_0)(\vec{x} - \vec{x}_0) + \frac{1}{2!} D_2 f(\vec{x}_0)(\vec{x} - \vec{x}_0) + \ldots + \frac{1}{m!} D_m f(\vec{x}_0)(\vec{x} - \vec{x}_0) \\
& + \frac{1}{(m+1)!} D_{m+1} f(\vec{\xi})(\vec{x} - \vec{x}_0) \, .
\end{aligned}
$$

Θεώρημα (τύπος του Taylor) Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ κυρτό και $f : A \to \mathbb{R}$ τάξης C^{m+1}. Έστω $\vec{x}_0 \in A$. Για κάθε $\vec{x} \in A$ υπάρχει $\vec{\xi}$ στο ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα $\vec{x}_0$, $\vec{x}$ ώστε

$$\begin{aligned} f(\vec{x}) =& f(\vec{x}_0) + D_1 f(\vec{x}_0)(\vec{x} - \vec{x}_0) + \frac{1}{2!} D_2 f(\vec{x}_0)(\vec{x} - \vec{x}_0) + \ldots + \frac{1}{m!} D_m f(\vec{x}_0)(\vec{x} - \vec{x}_0) \\ &+ \frac{1}{(m+1)!} D_{m+1} f(\vec{\xi})(\vec{x} - \vec{x}_0)\,. \end{aligned}$$

Παρατήρηση. Το πολυώνυμο

$$P_{f,m,\vec{x}_0}(\vec{x}) = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} D_k f(\vec{x}_0)(\vec{x} - \vec{x}_0)$$

ονομάζεται πολυώνυμο Taylor βαθμού m της f με κέντρο το $\vec{x}_0$.

Θεώρημα (τύπος του Taylor) Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ κυρτό και $f : A \to \mathbb{R}$ τάξης C^{m+1}. Έστω $\vec{x}_0 \in A$. Για κάθε $\vec{x} \in A$ υπάρχει $\vec{\xi}$ στο ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα $\vec{x}_0$, $\vec{x}$ ώστε

$$\begin{aligned} f(\vec{x}) =& f(\vec{x}_0) + D_1 f(\vec{x}_0)(\vec{x}-\vec{x}_0) + \frac{1}{2!} D_2 f(\vec{x}_0)(\vec{x}-\vec{x}_0) + \ldots + \frac{1}{m!} D_m f(\vec{x}_0)(\vec{x}-\vec{x}_0) \\ &+ \frac{1}{(m+1)!} D_{m+1} f(\vec{\xi})(\vec{x}-\vec{x}_0) \, . \end{aligned}$$

Παρατήρηση. Το πολυώνυμο

$$P_{f,m,\vec{x}_0}(\vec{x}) = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} D_k f(\vec{x}_0)(\vec{x}-\vec{x}_0)$$

ονομάζεται πολυώνυμο Taylor βαθμού m της f με κέντρο το $\vec{x}_0$.

Απόδειξη. Έστω $\vec{x} \in A$. Το ευθύγραμμα τμήμα με άκρα $\vec{x}_0, \vec{x}$ παραμετροποιείται ως

$$\vec{x}_t = \vec{x}_0 + t(\vec{x}-\vec{x}_0) \, , \qquad t \in [0,1].$$

Θέτουμε

$$g(t) = f(\vec{x}_t) = f\big(\vec{x}_0 + t(\vec{x}-\vec{x}_0)\big)$$

για $t \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\vec{x}_t \in A$. Η συνάρτηση g ορίζεται λοιπόν σε ένω διάστημα που περιέχει γνήσια το $[0,1]$ και είναι τάξης C^{m+1}.

Ισχυρισμός. Για κάθε $k = 1, \ldots, m + 1$ έχουμε

$$g^{(k)}(t) = D_k f(\vec{x}_t)(\vec{x} - \vec{x}_0) \tag{7}$$

Ισχυρισμός. Για κάθε $k = 1, \ldots, m+1$ έχουμε

$$g^{(k)}(t) = D_k f(\vec{x}_t)(\vec{x} - \vec{x}_0) \tag{7}$$

Απόδειξη του ισχυρισμού. Χρησιμοποιούμε επαγωγή. Για $k = 0$ το ζητούμενο είναι άμεσο. Για $k = 1$ εφαρμόαζουμε τον κανόνα της αλυσίδας:

$$g'(t) = \frac{d}{dt} f(\vec{x}_t) = \nabla f(\vec{x}_t) \cdot \frac{d\vec{x}_t}{dt} = \sum_{k=1}^{n} f_{x_k}(\vec{x}_t)(x_k - x_{0,k}) = D_1 f(\vec{x}_t)(\vec{x} - \vec{x}_0)$$

Ισχυρισμός. Για κάθε $k = 1, \ldots, m+1$ έχουμε

$$g^{(k)}(t) = D_k f(\vec{x}_t)(\vec{x} - \vec{x}_0) \tag{7}$$

Απόδειξη του ισχυρισμού. Χρησιμοποιούμε επαγωγή. Για $k = 0$ το ζητούμενο είναι άμεσο. Για $k = 1$ εφαρμόαζουμε τον κανόνα της αλυσίδας:

$$g'(t) = \frac{d}{dt} f(\vec{x}_t) = \nabla f(\vec{x}_t) \cdot \frac{d\vec{x}_t}{dt} = \sum_{k=1}^{n} f_{x_k}(\vec{x}_t)(x_k - x_{0,k}) = D_1 f(\vec{x}_t)(\vec{x} - \vec{x}_0)$$

Υποθέτουμε ότι η (7) ισχύει για $k = j$ και θα αποδείξουμε ότι ισχύει για $k = j+1$. Θέτουμε για απλότητα $\vec{h} = \vec{x} - \vec{x}_0$ και έχουμε

$$\begin{aligned}
g^{(j+1)}(t) &= \frac{d}{dt} D_j f(\vec{x}_t)(\vec{h}) \\
&= \frac{d}{dt} \sum_{k_1=1}^{n} \sum_{k_2=1}^{n} \cdots \sum_{k_j=1}^{n} f_{x_{k_1} x_{k_2} \ldots x_{k_j}}(\vec{x}_t) h_{k_1} h_{k_2} \ldots h_{k_j} \\
&= \sum_{k_1=1}^{n} \sum_{k_2=1}^{n} \cdots \sum_{k_j=1}^{n} h_{k_1} h_{k_2} \ldots h_{k_j} \frac{d}{dt} f_{x_{k_1} x_{k_2} \ldots x_{k_j}}(\vec{x}_t) \\
&= \sum_{k_1=1}^{n} \sum_{k_2=1}^{n} \cdots \sum_{k_j=1}^{n} h_{k_1} h_{k_2} \ldots h_{k_j} \sum_{k_{j+1}=1}^{n} f_{x_{k_1} x_{k_2} \ldots x_{k_j} x_{k_{j+1}}}(\vec{x}_t) h_{k_{j+1}} \\
&= D_{j+1} f(\vec{x}_t)(\vec{h})
\end{aligned}$$

κι ο ισχυρισμός αποδείχθηκε.

Συνέχεια της απόδειξης.

Συνέχεια της απόδειξης.

Εφαρμόζουμε τον τύπο του Taylor για συναρτήσεις μίας μεταβλητής για την συνάρτηση $g(t)$. Παίρνουμε ως κέντρο το $t = 0$ έχουμε ότι υπάρχει $\eta \in (0, 1)$ ώστε

$$g(1) = g(0) + g'(0) + \frac{g''(0)}{2!} + \ldots + \frac{g^{(m)}(0)}{m!} + \frac{g^{(m+1)}(\eta)}{(m+1)!}$$

Ισχύει

$$g(1) = f(\vec{x}) \ , \qquad g^{(k)}(0) = D_k f(\vec{x}_0)(\vec{x} - \vec{x}_0),$$

οπότε θέτοντας $\xi = \vec{x}_\eta = \vec{x}_0 + \eta(\vec{x} - \vec{x}_0)$ παίρνουμε

$$\begin{aligned} f(\vec{x}) =& f(\vec{x}_0) + D_1 f(\vec{x}_0)(\vec{x} - \vec{x}_0) + \frac{1}{2!} D_2 f(\vec{x}_0)(\vec{x} - \vec{x}_0) + \ldots + \frac{1}{m!} D_m f(\vec{x}_0)(\vec{x} - \vec{x}_0) \\ &+ \frac{1}{(m+1)!} D_{m+1} f(\vec{\xi})(\vec{x} - \vec{x}_0) \end{aligned}$$

που είναι το ζητούμενο. $\square$

Παρατήρηση. Το $P_{f,1,\vec{x}_0}$ είναι ακριβώς η βέλτιστη αφφινική προσέγγιση της f στο σημείο $\vec{x}_0$.

Παρατήρηση. Το $P_{f,1,\vec{x}_0}$ είναι ακριβώς η βέλτιστη αφφινική προσέγγιση της f στο σημείο $\vec{x}_0$.

Παρατήρηση. Αν η $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ είναι C^2 τότε το πολυώνυμο Taylor β′ βαθμού με κέντρο το (a, b) είναι το

$$\begin{aligned} P_{f,2,(a,b)} &= f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(x-a) + f_{xx}(a,b)(x-a)^2 + \\ &\quad +2f_{xy}(a,b)(x-a)(x-b) + f_{yy}(a,b)(x-b)^2 \end{aligned}$$

Αν η f είναι C^m τότε το πολυώνυμο Taylor $P_{f,m,\vec{x}_0}$ είναι η βέλτιστη προσέγγιση της f κοντά στο $\vec{x}_0$ από πολυώνυμο βαθμού το πολύ m. Συγκεκριμένα έχουμε την εξής

Αν η f είναι C^m τότε το πολυώνυμο Taylor $P_{f,m,\vec{x}_0}$ είναι η βέλτιστη προσέγγιση της f κοντά στο $\vec{x}_0$ από πολυώνυμο βαθμού το πολύ m. Συγκεκριμένα έχουμε την εξής

Πρόταση. Έστω ότι η $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι τάξης C^m και έστω $\vec{x}_0 \in A$. Ισχύει

$$\lim_{\vec{x}-\vec{x}_0} \frac{f(\vec{x}) - P_{f,m,\vec{x}_0}(\vec{x})}{\|\vec{x} - \vec{x}_0\|^m} = 0\,. \tag{8}$$

Επιπλέον το $P_{f,m,\vec{x}_0}$ είναι το μοναδικό πολυώνυμο βαθμού το πολύ m για το οποίο ισχύει η (8).

Απόδειξη. Έστω $\vec{x} \in A$ ένα σημείο κοντά στο $\vec{x}_0$. Από τον τύπο του Taylor έχουμε ότι υπάρχει $\vec{\xi}$ στο ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα $\vec{x}_0$, $\vec{x}$ ώστε

$$f(\vec{x}) = P_{f,m-1,\vec{x}_0} + \frac{1}{m!} D_m f(\vec{\xi})(\vec{x} - \vec{x}_0)$$

Συνεπώς έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{f(\vec{x}) - P_{f,m,\vec{x}_0}(\vec{x})}{\|\vec{x} - \vec{x}_0\|^m} &= \frac{P_{f,m-1,\vec{x}_0}(\vec{x}) + \frac{1}{m!} D_m f(\vec{\xi})(\vec{x} - \vec{x}_0) - P_{f,m,\vec{x}_0}(\vec{x})}{\|\vec{x} - \vec{x}_0\|^m} \\ &= \frac{\frac{1}{m!} D_m f(\vec{\xi})(\vec{x} - \vec{x}_0) - \frac{1}{m!} D_m f(\vec{x}_0)(\vec{x} - \vec{x}_0)}{\|\vec{x} - \vec{x}_0\|^m}. \end{aligned}$$

Θέτοντας για συντομία (όπως και παραπάνω) $\vec{h} = \vec{x} - \vec{x}_0$ αρκεί να δείξουμε ότι

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{x}_0} \frac{D_m f(\vec{\xi})(\vec{h}) - D_m f(\vec{x}_0)(\vec{h})}{\|\vec{h}\|^m},$$

όπου τα $\vec{\xi}, \vec{h}$ εξαρτώνται κι από το $\vec{x}$.

Ο αριθμητής του κλάσματος είναι άθροισμα όρων της μορφής

$$f_{x_{k_1}x_{k_2}\ldots x_{k_m}}(\vec{\xi})h_{k_1}h_{k_2}\ldots h_{k_m} - f_{x_{k_1}x_{k_2}\ldots x_{k_m}}(\vec{x}_0)h_{k_1}h_{k_2}\ldots h_{k_m}$$

όπου $k_j \in \{1,\ldots,n\}$. Για κάθε τέτοιο όρο έχουμε

$$\begin{aligned}
&\frac{\left|f_{x_{k_1}x_{k_2}\ldots x_{k_m}}(\vec{\xi})h_{k_1}h_{k_2}\ldots h_{k_m} - f_{x_{k_1}x_{k_2}\ldots x_{k_m}}(\vec{x}_0)h_{k_1}h_{k_2}\ldots h_{k_m}\right|}{\|\vec{h}\|^m} \\
\leq&\frac{\left|f_{x_{k_1}x_{k_2}\ldots x_{k_m}}(\vec{\xi}) - f_{x_{k_1}x_{k_2}\ldots x_{k_m}}(\vec{x}_0)\right| |h_{k_1}||h_{k_2}|\ldots|h_{k_m}|}{\|\vec{h}\|^m} \\
\leq&\frac{\left|f_{x_{k_1}x_{k_2}\ldots x_{k_m}}(\vec{\xi}) - f_{x_{k_1}x_{k_2}\ldots x_{k_m}}(\vec{x}_0)\right| \|\vec{h}\|\|\vec{h}\|\ldots\|\vec{h}\|}{\|\vec{h}\|^m} \\
=&\left|f_{x_{k_1}x_{k_2}\ldots x_{k_m}}(\vec{\xi}) - f_{x_{k_1}x_{k_2}\ldots x_{k_m}}(\vec{x}_0)\right|,
\end{aligned}$$

το οποίο τείνει στο μηδέν καθώς $\vec{x} \to \vec{x}_0$ λόγω της συνέχειας της $f_{x_{k_1}x_{k_2}\ldots x_{k_m}}$.
Άρα αποδείχθηκε η (8).

Ο αριθμητής του κλάσματος είναι άθροισμα όρων της μορφής

$$f_{x_{k_1}x_{k_2}\dots x_{k_m}}(\vec{\xi})h_{k_1}h_{k_2}\dots h_{k_m} - f_{x_{k_1}x_{k_2}\dots x_{k_m}}(\vec{x}_0)h_{k_1}h_{k_2}\dots h_{k_m}$$

όπου $k_j \in \{1, \dots, n\}$. Για κάθε τέτοιο όρο έχουμε

$$\begin{aligned}
&\frac{\left|f_{x_{k_1}x_{k_2}\dots x_{k_m}}(\vec{\xi})h_{k_1}h_{k_2}\dots h_{k_m} - f_{x_{k_1}x_{k_2}\dots x_{k_m}}(\vec{x}_0)h_{k_1}h_{k_2}\dots h_{k_m}\right|}{\|\vec{h}\|^m} \\
\leq &\frac{\left|f_{x_{k_1}x_{k_2}\dots x_{k_m}}(\vec{\xi}) - f_{x_{k_1}x_{k_2}\dots x_{k_m}}(\vec{x}_0)\right| |h_{k_1}||h_{k_2}|\dots|h_{k_m}|}{\|\vec{h}\|^m} \\
\leq &\frac{\left|f_{x_{k_1}x_{k_2}\dots x_{k_m}}(\vec{\xi}) - f_{x_{k_1}x_{k_2}\dots x_{k_m}}(\vec{x}_0)\right| \|\vec{h}\|\|\vec{h}\|\dots\|\vec{h}\|}{\|\vec{h}\|^m} \\
= &\left|f_{x_{k_1}x_{k_2}\dots x_{k_m}}(\vec{\xi}) - f_{x_{k_1}x_{k_2}\dots x_{k_m}}(\vec{x}_0)\right|,
\end{aligned}$$

το οποίο τείνει στο μηδέν καθώς $\vec{x} \to \vec{x}_0$ λόγω της συνέχειας της $f_{x_{k_1}x_{k_2}\dots x_{k_m}}$. Άρα αποδείχθηκε η (8).

Όσον αφορά τη μοναδικότητα, αρκεί να αποδειχθεί ο εξής
Ισχυρισμός. Αν $P(\vec{x})$ είναι πολυώνυμο βαθμού το πολύ m τέτοιο ώστε

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} \frac{P(\vec{x})}{\|\vec{x} - \vec{x}_0\|^m} = 0\,,$$

τότε $P(\vec{x}) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ (βλ. το Παράρτημα στο τέλος αυτών των σημειώσεων) .

Τοπικά ακρότατα.

Υποθέτουμε πάντα ότι A είναι ένα μη-κενό, ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$.

Τοπικά ακρότατα.

Υποθέτουμε πάντα ότι A είναι ένα μη-κενό, ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$.

Ορισμός. Έστω $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Λέμε ότι η f έχει τοπικό μέγιστο στο $\vec{x}_0 \in A$ αν υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

$$f(\vec{x}_0) \geq f(\vec{x}) \quad , \qquad \text{για κάθε } \vec{x} \in B(\vec{x}_0, \delta)$$

Αν επιπλέον το $\delta > 0$ μπορεί να επιλεγεί ώστε να ισχύει

$$f(\vec{x}_0) > f(\vec{x}) \quad , \qquad \text{για κάθε } \vec{x} \in B(\vec{x}_0, \delta) \setminus \{\vec{x}_0\}$$

τότε λέμε ότι η f έχει γνήσιο τοπικό μέγιστο στο $\vec{x}_0$.

Τοπικά ακρότατα.

Υποθέτουμε πάντα ότι A είναι ένα μη-κενό, ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$.

Ορισμός. Έστω $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Λέμε ότι η f έχει τοπικό μέγιστο στο $\vec{x}_0 \in A$ αν υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

$$f(\vec{x}_0) \geq f(\vec{x}) \ , \qquad \text{για κάθε } \vec{x} \in B(\vec{x}_0, \delta)$$

Αν επιπλέον το $\delta > 0$ μπορεί να επιλεγεί ώστε να ισχύει

$$f(\vec{x}_0) > f(\vec{x}) \ , \qquad \text{για κάθε } \vec{x} \in B(\vec{x}_0, \delta) \setminus \{\vec{x}_0\}$$

τότε λέμε ότι η f έχει γνήσιο τοπικό μέγιστο στο $\vec{x}_0$.

Ανάλογα ορίζεται το (γνήσιο) τοπικό ελάχιστο.

Τοπικά ακρότατα.

Υποθέτουμε πάντα ότι A είναι ένα μη-κενό, ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$.

Ορισμός. Έστω $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Λέμε ότι η f έχει τοπικό μέγιστο στο $\vec{x}_0 \in A$ αν υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

$$f(\vec{x}_0) \geq f(\vec{x}) \;\; , \qquad \text{για κάθε } \vec{x} \in B(\vec{x}_0, \delta)$$

Αν επιπλέον το $\delta > 0$ μπορεί να επιλεγεί ώστε να ισχύει

$$f(\vec{x}_0) > f(\vec{x}) \;\; , \qquad \text{για κάθε } \vec{x} \in B(\vec{x}_0, \delta) \setminus \{\vec{x}_0\}$$

τότε λέμε ότι η f έχει γνήσιο τοπικό μέγιστο στο $\vec{x}_0$.

Ανάλογα ορίζεται το (γνήσιο) τοπικό ελάχιστο.

Πρόταση. Αν η f είναι διαφορίσιμη στο $\vec{x}_0$ και έχει τοπικό μέγιστο στο $\vec{x}_0$ τότε $\nabla f(\vec{x}_0) = 0$.

Τοπικά ακρότατα.

Υποθέτουμε πάντα ότι A είναι ένα μη-κενό, ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$.

Ορισμός. Έστω $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Λέμε ότι η f έχει τοπικό μέγιστο στο $\vec{x}_0 \in A$ αν υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

$$f(\vec{x}_0) \geq f(\vec{x}) \ , \qquad \text{για κάθε } \vec{x} \in B(\vec{x}_0, \delta)$$

Αν επιπλέον το $\delta > 0$ μπορεί να επιλεγεί ώστε να ισχύει

$$f(\vec{x}_0) > f(\vec{x}) \ , \qquad \text{για κάθε } \vec{x} \in B(\vec{x}_0, \delta) \setminus \{\vec{x}_0\}$$

τότε λέμε ότι η f έχει γνήσιο τοπικό μέγιστο στο $\vec{x}_0$.

Ανάλογα ορίζεται το (γνήσιο) τοπικό ελάχιστο.

Πρόταση. Αν η f είναι διαφορίσιμη στο $\vec{x}_0$ και έχει τοπικό μέγιστο στο $\vec{x}_0$ τότε $\nabla f(\vec{x}_0) = 0$.

Απόδειξη. Έστω $\vec{u}$ τυχούσα κατεύθυνση. Η συνάρτηση

$$g(t) = f(\vec{x}_0 + t\vec{u})$$

είναι ορισμένη σε μια περιοχή του μηδενός, είναι παραγωγίσιμη στο $t = 0$ και έχει τοπικό μέγιστο στο $t = 0$. Άρα $g'(0) = 0$. Όμως $g'(0) = \nabla f(\vec{x}_0) \cdot \vec{u}$. Άρα το διάνυσμα $\nabla f(\vec{x}_0)$ είναι κάθετο σε κάθε κατεύθυνση, άρα είναι το μηδενικό διάνυσμα. $\square$

Τοπικά ακρότατα.

Υποθέτουμε πάντα ότι A είναι ένα μη-κενό, ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$.

Ορισμός. Έστω $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Λέμε ότι η f έχει τοπικό μέγιστο στο $\vec{x}_0 \in A$ αν υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

$$f(\vec{x}_0) \geq f(\vec{x}) \quad , \qquad \text{για κάθε } \vec{x} \in B(\vec{x}_0, \delta)$$

Αν επιπλέον το $\delta > 0$ μπορεί να επιλεγεί ώστε να ισχύει

$$f(\vec{x}_0) > f(\vec{x}) \quad , \qquad \text{για κάθε } \vec{x} \in B(\vec{x}_0, \delta) \setminus \{\vec{x}_0\}$$

τότε λέμε ότι η f έχει γνήσιο τοπικό μέγιστο στο $\vec{x}_0$.

Ανάλογα ορίζεται το (γνήσιο) τοπικό ελάχιστο.

Πρόταση. Αν η f είναι διαφορίσιμη στο $\vec{x}_0$ και έχει τοπικό μέγιστο στο $\vec{x}_0$ τότε $\nabla f(\vec{x}_0) = 0$.

Απόδειξη. Έστω $\vec{u}$ τυχούσα κατεύθυνση. Η συνάρτηση

$$g(t) = f(\vec{x}_0 + t\vec{u})$$

είναι ορισμένη σε μια περιοχή του μηδενός, είναι παραγωγίσιμη στο $t = 0$ και έχει τοπικό μέγιστο στο $t = 0$. Άρα $g'(0) = 0$. Όμως $g'(0) = \nabla f(\vec{x}_0) \cdot \vec{u}$. Άρα το διάνυσμα $\nabla f(\vec{x}_0)$ είναι κάθετο σε κάθε κατεύθυνση, άρα είναι το μηδενικό διάνυσμα. □

Ορισμός. Έστω $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ μία C^1 συνάρτηση. Το $\vec{x}_0$ λέγεται κρίσιμο σημείο για την f αν $\nabla f(\vec{x}_0) = 0$.

Άρα τα τοπικά ακρότατα πρέπει να αναζητηθούν ανάμεσα στα κρίσιμα σημεία. Για τον χαρακτηρισμό των κρίσιμων σημείων πρέπει κανείς να δει τις μερικές παραγώγους β′ τάξης.

Άρα τα τοπικά ακρότατα πρέπει να αναζητηθούν ανάμεσα στα κρίσιμα σημεία. Για τον χαρακτηρισμό των κρίσιμων σημείων πρέπει κανείς να δει τις μερικές παραγώγους β′ τάξης.

Ορισμός. Έστω $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ μία C^2 συνάρτηση. Ο πίνακας

$$Hf(\vec{x}) = \begin{bmatrix} f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} & \cdots & f_{x_1x_n} \\ f_{x_2x_1} & f_{x_2x_2} & \cdots & f_{x_2x_n} \\ \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_nx_1} & f_{x_nx_2} & \cdots & f_{x_nx_n} \end{bmatrix}$$

(όπου $f_{x_ix_j} = f_{x_ix_j}(\vec{x})$) ονομάζεται *Εσσιανός πίνακας* της f στο $\vec{x} \in A$.

Άρα τα τοπικά ακρότατα πρέπει να αναζητηθούν ανάμεσα στα κρίσιμα σημεία. Για τον χαρακτηρισμό των κρίσιμων σημείων πρέπει κανείς να δει τις μερικές παραγώγους β′ τάξης.

Ορισμός. Έστω $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ μία C^2 συνάρτηση. Ο πίνακας

$$Hf(\vec{x}) = \begin{bmatrix} f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} & \dots & f_{x_1x_n} \\ f_{x_2x_1} & f_{x_2x_2} & \dots & f_{x_2x_n} \\ \dots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_nx_1} & f_{x_nx_2} & \dots & f_{x_nx_n} \end{bmatrix}$$

(όπου $f_{x_ix_j} = f_{x_ix_j}(\vec{x})$) ονομάζεται *Εσσιανός πίνακας* της f στο $\vec{x} \in A$.

Άρα ο Εσσιανός πίνακας είναι ένας συμμετρικός $n \times n$ πίνακας ο οποίος εξαρτάται από το $\vec{x}$.

Παρατήρηση. Έχουμε

$$Hf(\vec{x})\vec{u} \cdot \vec{u} = \sum_{i,j=1}^{n} f_{x_ix_j} u_i u_j = D_2 f(\vec{x})(\vec{u}),$$

δηλαδή η τετραγωνική μορφή που αντιστοιχεί στον πίνακα $Hf(\vec{x})$ είναι η συνάρτηση $D_2 f(\vec{x})$.

Κάποια στοιχεία από τη Γραμμική Άλγεβρα.

Κάποια στοιχεία από τη Γραμμική Άλγεβρα.

Ορισμός. Ένας $n \times n$ συμμετρικός πίνακας B λέγεται

- θετικά ορισμένος αν $B\vec{x} \cdot \vec{x} > 0$ για κάθε $\vec{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$
- θετικά ημιορισμένος αν $B\vec{x} \cdot \vec{x} \geq 0$ για κάθε $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$
- αρνητικά ορισμένος αν $B\vec{x} \cdot \vec{x} < 0$ για κάθε $\vec{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$
- αρνητικά ημιορισμένος αν $B\vec{x} \cdot \vec{x} \leq 0$ για κάθε $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$
- μη ορισμένος αν υπάρχουν $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ ώστε $B\vec{x} \cdot \vec{x} > 0$ και $B\vec{y} \cdot \vec{y} < 0$

Κάποια στοιχεία από τη Γραμμική Άλγεβρα.

Ορισμός. Ένας $n \times n$ συμμετρικός πίνακας B λέγεται

- θετικά ορισμένος αν $B\vec{x} \cdot \vec{x} > 0$ για κάθε $\vec{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$
- θετικά ημιορισμένος αν $B\vec{x} \cdot \vec{x} \geq 0$ για κάθε $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$
- αρνητικά ορισμένος αν $B\vec{x} \cdot \vec{x} < 0$ για κάθε $\vec{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$
- αρνητικά ημιορισμένος αν $B\vec{x} \cdot \vec{x} \leq 0$ για κάθε $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$
- μη ορισμένος αν υπάρχουν $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ ώστε $B\vec{x} \cdot \vec{x} > 0$ και $B\vec{y} \cdot \vec{y} < 0$

Είναι γνωστό από τη Γραμμική Άλγεβρα ότι:

- ο B είναι θετικά ορισμένος αν και μόνο αν όλες οι ιδιοτιμές του είναι θετικές
- ο B είναι αρνητικά ορισμένος αν και μόνο αν όλες οι ιδιοτιμές του είναι αρνητικές
- ο B είναι θετικά ημιορισμένος αν και μόνο αν όλες οι ιδιοτιμές του είναι μη αρνητικές
- ο B είναι αρνητικά ημιορισμένος αν και μόνο αν όλες οι ιδιοτιμές του είναι μη θετικές
- ο B είναι μη ορισμένος αν και μόνο αν έχει δύο ετερόσημες ιδιοτιμές

Πρόταση (χαρακτηρισμός κρίσιμων σημείων) Έστω ότι η συνάρτηση $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι C^2.

A. (Αναγκαίες συνθήκες) Αν η f παρουσιάζει

(i) τοπικό μέγιστο στο $\vec{x}_0$ τότε ο $Hf(\vec{x}_0)$ είναι αρνητικά ημιορισμένος

(ii) τοπικό ελάχιστο στο $\vec{x}_0$ τότε ο $Hf(\vec{x}_0)$ είναι θετικά ημιορισμένος

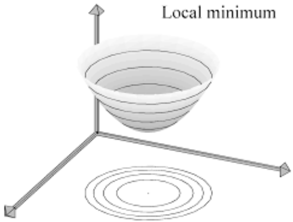
B. (Ικανές συνθήκες) Έστω $\vec{x}_0$ κρίσιμο σημείο της f.

(i) αν ο $Hf(\vec{x}_0)$ είναι αρνητικά ορισμένος τότε η f έχει γνήσιο τοπικό μέγιστο στο $\vec{x}_0$

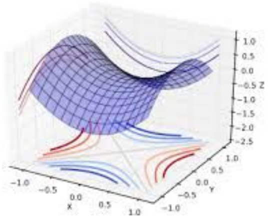
(ii) αν ο $Hf(\vec{x}_0)$ είναι θετικά ορισμένος τότε η f έχει γνήσιο τοπικό ελάχιστο στο $\vec{x}_0$

(iii) αν ο $Hf(\vec{x}_0)$ είναι μη ορισμένος τότε η f δεν έχει τοπικό ακρότατο στο $\vec{x}_0$

Στην τελευταία περίπτωση λέμε ότι το $\vec{x}_0$ είναι *σαγματικό σημείο* για την f.



τοπικό ελάχιστο



σαγματικό σημείο

Απόδειξη. Σε όλες τις παραπάνω περιπτώσεις έχουμε ότι $\nabla f(\vec{x}_0) = \vec{0}$. Άρα ο τύπος του Taylor μας δίνει ότι αν το $\vec{x}$ είναι αρκετά κοντά στο $\vec{x}_0$ τότε υπάρχει $\vec{\xi}$ στο ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα $\vec{x}_0$, $\vec{x}$ ώστε

$$f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + \frac{1}{2} D_2 f(\xi)(\vec{x} - \vec{x}_0) = f(\vec{x}_0) + \frac{1}{2} H f(\xi)(\vec{x} - \vec{x}_0) \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0)$$

A (i). Έστω αντίθετα ότι ο $Hf(\vec{x}_0)$ δεν είναι αρνητικά ημιορισμένος. Τότε έχει μία τουλάχιστον θετική ιδιοτιμή λ. Έστω $\vec{u}$ ένα αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα μοναδιαίου μέτρου,

$$Hf(\vec{x}_0)\vec{u} = \lambda \vec{u} \;\; , \qquad \|\vec{u}\| = 1\,.$$

Τότε $Hf(\vec{x}_0)\vec{u} \cdot \vec{u} = \lambda > 0$. Λόγω της συνέχειας των δεύτερων μερικών παραγώγων, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

$$Hf(\vec{y})\vec{u} \cdot \vec{u} > 0 \;\; , \qquad \text{για κάθε } \vec{y} \in B(\vec{x}_0, \delta)$$

Το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα $\vec{x}_0$ και $\vec{x}_0 + \delta\vec{u}$ παραμετροποιείται ως $\vec{x}_t = \vec{x}_0 + t\delta\vec{u}$, $t \in [0, 1]$.

Απόδειξη. Σε όλες τις παραπάνω περιπτώσεις έχουμε ότι $\nabla f(\vec{x}_0) = \vec{0}$. Άρα ο τύπος του Taylor μας δίνει ότι αν το $\vec{x}$ είναι αρκετά κοντά στο $\vec{x}_0$ τότε υπάρχει $\vec{\xi}$ στο ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα $\vec{x}_0$, $\vec{x}$ ώστε

$$f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + \frac{1}{2}D_2 f(\xi)(\vec{x} - \vec{x}_0) = f(\vec{x}_0) + \frac{1}{2}Hf(\xi)(\vec{x} - \vec{x}_0) \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0)$$

A (i). Έστω αντίθετα ότι ο $Hf(\vec{x}_0)$ δεν είναι αρνητικά ημιορισμένος. Τότε έχει μία τουλάχιστον θετική ιδιοτιμή λ. Έστω $\vec{u}$ ένα αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα μοναδιαίου μέτρου,

$$Hf(\vec{x}_0)\vec{u} = \lambda\vec{u} \ , \qquad \|\vec{u}\| = 1 \, .$$

Τότε $Hf(\vec{x}_0)\vec{u} \cdot \vec{u} = \lambda > 0$. Λόγω της συνέχειας των δεύτερων μερικών παραγώγων, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

$$Hf(\vec{y})\vec{u} \cdot \vec{u} > 0 \ , \qquad \text{για κάθε } \vec{y} \in B(\vec{x}_0, \delta)$$

Το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα $\vec{x}_0$ και $\vec{x}_0 + \delta\vec{u}$ παραμετροποιείται ως $\vec{x}_t = \vec{x}_0 + t\delta\vec{u}$, $t \in [0, 1]$. Για κάθε $t \in (0, 1)$ έχουμε

$$\begin{aligned} f(\vec{x}_t) &= f(\vec{x}_0) + \frac{1}{2}Hf(\vec{\xi}_t)(\vec{x}_t - \vec{x}_0) \cdot (\vec{x}_t - \vec{x}_0) \\ &= f(\vec{x}_0) + \frac{1}{2}Hf(\vec{\xi}_t)(t\delta\vec{u}) \cdot (t\delta\vec{u}) \\ &= f(\vec{x}_0) + \frac{t^2\delta^2}{2}Hf(\xi_t)\vec{u} \cdot \vec{u} \\ &> f(\vec{x}_0) \end{aligned}$$

Άρα το $\vec{x}_0$ δεν είναι σημείο τοπικού μεγίστου της f, άτοπο.

A (ii). Παρόμοια με το προηγούμενο.

Β (i) Ας συμβολίσουμε με $\lambda_{\max}(\vec{y})$ τη μεγαλύτερη ιδιοτιμή του Εσσιανού πίνακα $Hf(\vec{y})$. Είναι γνωστό από τη Γραμμική Άλγεβρα ότι ισχύει

$$Hf(\vec{y})\vec{u} \cdot \vec{u} \leq \lambda_{\max}(\vec{y})\|\vec{u}\|^2 \quad , \qquad \text{για κάθε } \vec{u} \in \mathbb{R}^n.$$

B (i) Ας συμβολίσουμε με $\lambda_{\max}(\vec{y})$ τη μεγαλύτερη ιδιοτιμή του Εσσιανού πίνακα $Hf(\vec{y})$. Είναι γνωστό από τη Γραμμική Άλγεβρα ότι ισχύει

$$Hf(\vec{y})\vec{u}\cdot\vec{u} \leq \lambda_{\max}(\vec{y})\|\vec{u}\|^2 \ , \qquad \text{για κάθε } \vec{u}\in\mathbb{R}^n.$$

Αφού ο $Hf(\vec{x}_0)$ είναι αρνητικά ορισμένος ισχύει $\lambda_{\max}(\vec{x}_0) < 0$. Η $\lambda_{\max}$ είναι συνεχής συνάρτηση, άρα υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

$$\lambda_{\max}(\vec{y}) < \frac{\lambda_{\max}(\vec{x}_0)}{2} \ , \qquad \text{για κάθε } \vec{y}\in B(\vec{x}_0,\delta)$$

και άρα

$$Hf(\vec{y})\vec{u}\cdot\vec{u} \leq \lambda_{\max}(\vec{y})\|\vec{u}\|^2 \leq \frac{\lambda_{\max}(\vec{x}_0)}{2}\|\vec{u}\|^2 \ , \quad \text{για κάθε } \vec{y}\in B(\vec{x}_0,\delta) \text{ και } \vec{u}\in\mathbb{R}^n.$$

B (i) Ας συμβολίσουμε με $\lambda_{\max}(\vec{y})$ τη μεγαλύτερη ιδιοτιμή του Εσσιανού πίνακα $Hf(\vec{y})$. Είναι γνωστό από τη Γραμμική Άλγεβρα ότι ισχύει

$$Hf(\vec{y})\vec{u}\cdot\vec{u} \leq \lambda_{\max}(\vec{y})\|\vec{u}\|^2 \ , \qquad \text{για κάθε } \vec{u}\in\mathbb{R}^n.$$

Αφού ο $Hf(\vec{x}_0)$ είναι αρνητικά ορισμένος ισχύει $\lambda_{\max}(\vec{x}_0)<0$. Η $\lambda_{\max}$ είναι συνεχής συνάρτηση, άρα υπάρχει $\delta>0$ ώστε

$$\lambda_{\max}(\vec{y}) < \frac{\lambda_{\max}(\vec{x}_0)}{2} \ , \qquad \text{για κάθε } \vec{y}\in B(\vec{x}_0,\delta)$$

και άρα

$$Hf(\vec{y})\vec{u}\cdot\vec{u} \leq \lambda_{\max}(\vec{y})\|\vec{u}\|^2 \leq \frac{\lambda_{\max}(\vec{x}_0)}{2}\|\vec{u}\|^2 \ , \quad \text{για κάθε } \vec{y}\in B(\vec{x}_0,\delta) \text{ και } \vec{u}\in\mathbb{R}^n.$$

Έστω τώρα $\|\vec{x}-\vec{x}_0\|<\delta$, $\vec{x}\neq\vec{x}_0$. Υπάρχει $\vec{\xi}$ με $\|\vec{\xi}-\vec{x}_0\|<\delta$, $\vec{\xi}\neq\vec{x}_0$, ώστε

$$\begin{aligned} f(\vec{x}) &= f(\vec{x}_0) + \frac{1}{2}Hf(\vec{\xi})(\vec{x}-\vec{x}_0)\cdot(\vec{x}-\vec{x}_0) \\ &\leq f(\vec{x}_0) + \frac{1}{2}\frac{\lambda_{\max}(\vec{x}_0)}{2}\|\vec{x}-\vec{x}_0\|^2 \\ &< f(\vec{x}_0). \end{aligned}$$

Άρα η f έχει γνήσιο τοπικό μέγιστο στο $\vec{x}_0$.

Β (i) Ας συμβολίσουμε με $\lambda_{\max}(\vec{y})$ τη μεγαλύτερη ιδιοτιμή του Εσσιανού πίνακα $Hf(\vec{y})$. Είναι γνωστό από τη Γραμμική Άλγεβρα ότι ισχύει

$$Hf(\vec{y})\vec{u}\cdot\vec{u} \leq \lambda_{\max}(\vec{y})\|\vec{u}\|^2 \;, \qquad \text{για κάθε } \vec{u}\in\mathbb{R}^n.$$

Αφού ο $Hf(\vec{x}_0)$ είναι αρνητικά ορισμένος ισχύει $\lambda_{\max}(\vec{x}_0) < 0$. Η $\lambda_{\max}$ είναι συνεχής συνάρτηση, άρα υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

$$\lambda_{\max}(\vec{y}) < \frac{\lambda_{\max}(\vec{x}_0)}{2} \;, \qquad \text{για κάθε } \vec{y}\in B(\vec{x}_0,\delta)$$

και άρα

$$Hf(\vec{y})\vec{u}\cdot\vec{u} \leq \lambda_{\max}(\vec{y})\|\vec{u}\|^2 \leq \frac{\lambda_{\max}(\vec{x}_0)}{2}\|\vec{u}\|^2 \;, \quad \text{για κάθε } \vec{y}\in B(\vec{x}_0,\delta) \text{ και } \vec{u}\in\mathbb{R}^n.$$

Έστω τώρα $\|\vec{x}-\vec{x}_0\| < \delta$, $\vec{x}\neq\vec{x}_0$. Υπάρχει $\vec{\xi}$ με $\|\vec{\xi}-\vec{x}_0\| < \delta$, $\vec{\xi}\neq\vec{x}_0$, ώστε

$$\begin{aligned} f(\vec{x}) &= f(\vec{x}_0) + \frac{1}{2}Hf(\vec{\xi})(\vec{x}-\vec{x}_0)\cdot(\vec{x}-\vec{x}_0) \\ &\leq f(\vec{x}_0) + \frac{1}{2}\frac{\lambda_{\max}(\vec{x}_0)}{2}\|\vec{x}-\vec{x}_0\|^2 \\ &< f(\vec{x}_0). \end{aligned}$$

Άρα η f έχει γνήσιο τοπικό μέγιστο στο $\vec{x}_0$.

Β (ii). Παρόμοια.

B (i) Ας συμβολίσουμε με $\lambda_{\max}(\vec{y})$ τη μεγαλύτερη ιδιοτιμή του Εσσιανού πίνακα $Hf(\vec{y})$. Είναι γνωστό από τη Γραμμική Άλγεβρα ότι ισχύει

$$Hf(\vec{y})\vec{u}\cdot\vec{u} \le \lambda_{\max}(\vec{y})\|\vec{u}\|^2 \quad , \qquad \text{για κάθε } \vec{u}\in\mathbb{R}^n.$$

Αφού ο $Hf(\vec{x}_0)$ είναι αρνητικά ορισμένος ισχύει $\lambda_{\max}(\vec{x}_0) < 0$. Η $\lambda_{\max}$ είναι συνεχής συνάρτηση, άρα υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

$$\lambda_{\max}(\vec{y}) < \frac{\lambda_{\max}(\vec{x}_0)}{2} \quad , \qquad \text{για κάθε } \vec{y}\in B(\vec{x}_0,\delta)$$

και άρα

$$Hf(\vec{y})\vec{u}\cdot\vec{u} \le \lambda_{\max}(\vec{y})\|\vec{u}\|^2 \le \frac{\lambda_{\max}(\vec{x}_0)}{2}\|\vec{u}\|^2 \ , \quad \text{για κάθε } \vec{y}\in B(\vec{x}_0,\delta) \text{ και } \vec{u}\in\mathbb{R}^n.$$

Έστω τώρα $\|\vec{x}-\vec{x}_0\| < \delta$, $\vec{x}\neq\vec{x}_0$. Υπάρχει $\vec{\xi}$ με $\|\vec{\xi}-\vec{x}_0\| < \delta$, $\vec{\xi}\neq\vec{x}_0$, ώστε

$$\begin{aligned} f(\vec{x}) &= f(\vec{x}_0) + \frac{1}{2}Hf(\vec{\xi})(\vec{x}-\vec{x}_0)\cdot(\vec{x}-\vec{x}_0) \\ &\le f(\vec{x}_0) + \frac{1}{2}\frac{\lambda_{\max}(\vec{x}_0)}{2}\|\vec{x}-\vec{x}_0\|^2 \\ &< f(\vec{x}_0). \end{aligned}$$

Άρα η f έχει γνήσιο τοπικό μέγιστο στο $\vec{x}_0$.

B (ii). Παρόμοια.

B (iii). Είδαμε στην απόδειξη του A. ότι αν ο $Hf(\vec{x}_0)$ έχει μία τουλάχιστον θετική ιδιοτιμή τότε το κρίσιμο σημείο $\vec{x}_0$ δεν είναι τοπικό μέγιστο, ενώ αν έχει μία τουλάχιστον αρνητική ιδιοτιμή τότε το $\vec{x}_0$ δεν είναι τοπικό ελάχιστο. Συνεπώς αν ο $Hf(\vec{x}_0)$ είναι μη ορισμένος τότε το $\vec{x}_0$ δεν είναι τοπικό ακρότατο. $\square$

Παρατήρηση. Για τον χαρακτηρισμό των κρίσιμων είναι το χρήσιμα τα ακόλουθα δύο κριτήρια τα οποία θεωρούνται γνωστά από τη Γραμμική Άλγεβρα.

Κριτήριο για 2×2 **πίνακες.** Θεωρούμε τον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

Έχουμε ότι

- ο A είναι θετικά ορισμένος αν και μόνο αν $ac - b^2 > 0$ και $a > 0$
- ο A είναι αρνητικά ορισμένος αν και μόνο αν $ac - b^2 > 0$ και $a < 0$
- ο A είναι μη ορισμένος αν και μόνό αν $ac - b^2 < 0$

Παρατήρηση. Για τον χαρακτηρισμό των κρίσιμων είναι το χρήσιμα τα ακόλουθα δύο κριτήρια τα οποία θεωρούνται γνωστά από τη Γραμμική Άλγεβρα.

Κριτήριο για 2×2 **πίνακες.** Θεωρούμε τον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

Έχουμε ότι

- ο A είναι θετικά ορισμένος αν και μόνο αν $ac - b^2 > 0$ και $a > 0$
- ο A είναι αρνητικά ορισμένος αν και μόνο αν $ac - b^2 > 0$ και $a < 0$
- ο A είναι μη ορισμένος αν και μόνό αν $ac - b^2 < 0$

Κριτήριο για 3×3 **πίνακες.** Θεωρούμε τον συμμετρικό πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Έστω

$$\Delta_1 = a_{11} \ , \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} \ , \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Έχουμε ότι:

- ο A είναι θετικά ορισμένος αν και μόνο αν $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 > 0$
- ο A είναι αρνητικά ορισμένος αν και μόνο αν $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 < 0$
- αν $\Delta_j \neq 0$, $j = 1, 2, 3$ και δεν ισχύει ένα από τα δύο παραπάνω τότε ο A είναι μη ορισμένος

Ακρότατα υπό συνθήκη.

Ακρότατα υπό συνθήκη.

Ορισμός. Έστω g και f δύο C^1 πραγματικές συναρτήσεις ορισμένες στο ανοικτό σύνολο $A \subset \mathbb{R}^n$. Λέμε ότι η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $\vec{x}_0 \in A$ υπό τον περιορισμό $g(\vec{x}) = 0$ αν

(i) $g(\vec{x}_0) = 0$

(ii) υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $f(\vec{x}_0) \geq f(\vec{x})$ για κάθε $x \in A$ τέτοιο ώστε $g(\vec{x}) = 0$ και $\|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta$

Ανάλογα ορίζεται και το τοπικό ελάχιστο υπό περιορισμό.

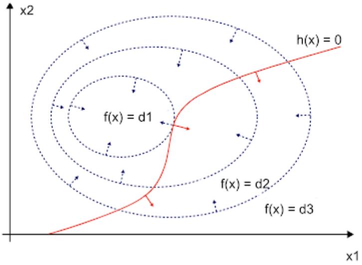
Ακρότατα υπό συνθήκη.

Ορισμός. Έστω g και f δύο C^1 πραγματικές συναρτήσεις ορισμένες στο ανοικτό σύνολο $A \subset \mathbb{R}^n$. Λέμε ότι η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $\vec{x}_0 \in A$ υπό τον περιορισμό $g(\vec{x}) = 0$ αν

(i) $g(\vec{x}_0) = 0$

(ii) υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $f(\vec{x}_0) \geq f(\vec{x})$ για κάθε $x \in A$ τέτοιο ώστε $g(\vec{x}) = 0$ και $\|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta$

Ανάλογα ορίζεται και το τοπικό ελάχιστο υπό περιορισμό.



$$d_1 > d_2 > d_3$$

Το σχήμα φαίνεται να δηλώνει ότι αν το $\vec{x}_0$ είναι σημείο τοπικού μεγίστου υπό περιορισμό τότε τα διανύσματα $\nabla f(\vec{x}_0)$ και $\nabla g(\vec{x}_0)$ είναι παράλληλα.

Πρόταση. Έστω g και f δύο C^1 πραγματικές συναρτήσεις ορισμένες στο ανοικτό σύνολο $A \subset \mathbb{R}^n$. Αν η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $\vec{x}_0 \in A$ υπό τον περιορισμό $g(\vec{x}) = 0$ τότε υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\nabla f(\vec{x}_0) = \lambda \nabla g(\vec{x}_0)$$

Παρατήρηση. Ο αριθμός λ ονομάζεται πολλαπλασιαστής Lagrange και η μέθοδος εύρεσης ακροτάτων υπό περιορισμό με χρήση της παραπάνω πρότασης ονομάζεται μέθοδος των πολλαπλαστιαστών Lagrange.

Πρόταση. Έστω g και f δύο C^1 πραγματικές συναρτήσεις ορισμένες στο ανοικτό σύνολο $A \subset \mathbb{R}^n$. Αν η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $\vec{x}_0 \in A$ υπό τον περιορισμό $g(\vec{x}) = 0$ τότε υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\nabla f(\vec{x}_0) = \lambda \nabla g(\vec{x}_0)$$

Παρατήρηση. Ο αριθμός λ ονομάζεται πολλαπλασιαστής Lagrange και η μέθοδος εύρεσης ακροτάτων υπό περιορισμό με χρήση της παραπάνω πρότασης ονομάζεται μέθοδος των πολλαπλαστιαστών Lagrange.

Ορισμός. Έστω g και f δύο C^1 πραγματικές συναρτήσεις ορισμένες στο ανοικτό σύνολο $A \subset \mathbb{R}^n$. Το $\vec{x}_0 \in A$ λέγεται κρισιμο σημείο της f υπό τον περιορισμό $g(\vec{x}) = 0$ αν $g(\vec{x}_0) = 0$ και υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε $\nabla f(\vec{x}_0) = \lambda \nabla g(\vec{x}_0)$.

Πρόταση. Έστω g και f δύο C^1 πραγματικές συναρτήσεις ορισμένες στο ανοικτό σύνολο $A \subset \mathbb{R}^n$. Αν η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $\vec{x}_0 \in A$ υπό τον περιορισμό $g(\vec{x}) = 0$ τότε υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\nabla f(\vec{x}_0) = \lambda \nabla g(\vec{x}_0)$$

Παρατήρηση. Ο αριθμός λ ονομάζεται πολλαπλασιαστής Lagrange και η μέθοδος εύρεσης ακροτάτων υπό περιορισμό με χρήση της παραπάνω πρότασης ονομάζεται μέθοδος των πολλαπλαστιαστών Lagrange.

Ορισμός. Έστω g και f δύο C^1 πραγματικές συναρτήσεις ορισμένες στο ανοικτό σύνολο $A \subset \mathbb{R}^n$. Το $\vec{x}_0 \in A$ λέγεται κρισιμο σημείο της f υπό τον περιορισμό $g(\vec{x}) = 0$ αν $g(\vec{x}_0) = 0$ και υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε $\nabla f(\vec{x}_0) = \lambda \nabla g(\vec{x}_0)$.

Συνεπώς τα ακρότατα υπό περιορισμό πρέπει να αναζητηθούν ανάμεσα στα κρίσιμα σημεία υπό περιορισμό. Υπάρχουν κριτήρια, ανάλογα με αυτά που είδαμε νωρίτερα για τοπικά ακρότατα χωρίς περιορισμό, με χρήση των οποίων μπορούμε να αποφανθούμε για το αν ένα κρίσιμο σημείο υπό περιορισμό είναι τοπικό ακρότατο υπό περιορισμό. Δεν θα δούμε αυτά τα κριτήρια και στην πράξη θα χρησιμοποιούμε κατά περίπτωση τα δεδομένα που έχουμε ώστε να φτάνουμε στο ζητούμενο.

Παράρτημα. Στο παράρτημα αυτό θα αποδείξουμε τον ισχυρισμό που διατυπώθηκε στο τέλος της παραγράφου που αφορά τα πολυώνυμα Taylor.

Ο χειρισμός πολυωνύμων στον $\mathbb{R}^n$ γίνεται πολύ πιο εύκολος με τη χρήση *πολυδεικτών*

Ορισμός. Ονομάζουμε πολυδείκτη κάθε $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, όπου $\alpha_k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Σχετικά με έναν πολυδείκτη α έχουμε τους ακόλουθους επιπλέον ορισμούς / συμβολισμούς:

- ο αριθμός $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$ ονομάζεται μήκος του πολυδείκτη
- για κάθε $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ συμβολίζουμε με $\vec{x}^\alpha$ το μονώνυμο $x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$

Συνεπώς ένα πολυώνυμο βαθμού m στον $\mathbb{R}^n$ έχει τη μορφή

$$P(\vec{x}) = \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha \vec{x}^\alpha$$

για κάποιους συντελεστές $c_\alpha \in \mathbb{R}$. Το $P(\vec{x})$ λέγεται ομογενές πολυώνυμο αν έχει τη μορφή $P(\vec{x}) = \sum_{|\alpha|=m} c_\alpha \vec{x}^\alpha$. Αν το P είναι ομογενές τότε $P(\lambda\vec{x}) = \lambda^m P(\vec{x})$.

Παρατήρηση. Ας ορίσουμε για μια C^m συνάρτηση f

$$D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_2}^{\alpha_2} \dots \partial_{x_n}^{\alpha_n}} \quad , \qquad \alpha! = \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n! \qquad (|\alpha| \le m)$$

Δεν είναι δύσκολο να δει κανείς ότι το πολυώνυμο Taylor βαθμού m της f με κέντρο το $\vec{x}_0$ δίνεται από τη σχέση

$$P_{f,m,\vec{x}_0}(\vec{x}) = \sum_{|\alpha| \le m} \frac{D^\alpha f(\vec{x}_0)}{\alpha!} (\vec{x} - \vec{x}_0)^\alpha$$

Παρατήρηση. Ας ορίσουμε για μια C^m συνάρτηση f

$$D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial_{x_1}^{\alpha_1}\partial_{x_2}^{\alpha_2}\dots\partial_{x_n}^{\alpha_n}} \quad , \qquad \alpha! = \alpha_1!\alpha_2!\dots\alpha_n! \qquad (|\alpha| \leq m)$$

Δεν είναι δύσκολο να δει κανείς ότι το πολυώνυμο Taylor βαθμού m της f με κέντρο το $\vec{x}_0$ δίνεται από τη σχέση

$$P_{f,m,\vec{x}_0}(\vec{x}) = \sum_{|\alpha|\leq m} \frac{D^\alpha f(\vec{x}_0)}{\alpha!}(\vec{x}-\vec{x}_0)^\alpha$$

Λήμμα. Έστω $P(\vec{x})$ ομογενές πολυώνυμο βαθμού m. Υπάρχει τότε σταθερά $M > 0$ ώστε $|P(\vec{x})| \leq M\|\vec{x}\|^m$ για κάθε $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

Παρατήρηση. Ας ορίσουμε για μια C^m συνάρτηση f

$$D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_2}^{\alpha_2} \dots \partial_{x_n}^{\alpha_n}} \quad , \qquad \alpha! = \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n! \qquad (|\alpha| \leq m)$$

Δεν είναι δύσκολο να δει κανείς ότι το πολυώνυμο Taylor βαθμού m της f με κέντρο το $\vec{x}_0$ δίνεται από τη σχέση

$$P_{f,m,\vec{x}_0}(\vec{x}) = \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{D^\alpha f(\vec{x}_0)}{\alpha!} (\vec{x} - \vec{x}_0)^\alpha$$

Λήμμα. Έστω $P(\vec{x})$ ομογενές πολυώνυμο βαθμού m. Υπάρχει τότε σταθερά $M > 0$ ώστε $|P(\vec{x})| \leq M \|\vec{x}\|^m$ για κάθε $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

Απόδειξη. Έστω $M = \max\{|P(\vec{x})| : \|\vec{x}\| = 1\}$. Για κάθε $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{x} \neq 0$, έχουμε

$$|P(\vec{x})| = \left| P\big(\|\vec{x}\| \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} \big) \right| = \|\vec{x}\|^m \left| P\big(\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} \big) \right| \leq M \|\vec{x}\|^m \,.$$

Πρόταση. Έστω $P(\vec{x})$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, πολυώνυμο βαθμού το πολύ m. Αν

$$\lim_{\vec{x}\to 0} \frac{P(\vec{x})}{\|\vec{x}\|^m} = 0\,,$$

τότε το $P(\vec{x})$ είναι το μηδενικό πολυώνυμο.

Πρόταση. Έστω $P(\vec{x})$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, πολυώνυμο βαθμού το πολύ m. Αν

$$\lim_{\vec{x}\to 0} \frac{P(\vec{x})}{\|\vec{x}\|^m} = 0\,,$$

τότε το $P(\vec{x})$ είναι το μηδενικό πολυώνυμο.

Απόδειξη. Θα χρησιμοποίσουμε επαγωγή στο m. Για $m = 1$ βλέπουμε εύκολα ότι ο ισχυρισμός ισχύει (άσκηση). Υποθέτουμε ότι ο ισχυρισμός ισχύει για $m = k$ και θα αποδειξουμε ότι ισχύει για $m = k + 1$. Έστω λοιπόν

$$P(\vec{x}) = \sum_{|\alpha| \le k+1} c_\alpha \vec{x}^\alpha$$

για το οποίο ισχύει

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{0}} \frac{P(\vec{x})}{\|\vec{x}\|^{k+1}} = 0\,. \tag{9}$$

Γράφουμε το $P(\vec{x})$ ως άθροισμα $P = Q + H$ όπου

$$Q(\vec{x}) = \sum_{|\alpha| \le k} c_\alpha \vec{x}^\alpha \quad , \qquad H(\vec{x}) = \sum_{|\alpha| = k+1} c_\alpha \vec{x}^\alpha$$

Από το προηγούμενο λήμμα υπάρχει $M > 0$ ώστε $|H(\vec{x})| \le M\|\vec{x}\|^{k+1}$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Έπεται ότι

$$\begin{aligned}
\frac{|Q(\vec{x})|}{\|\vec{x}\|^k} &\le \frac{|P(\vec{x})| + |H(\vec{x})|}{\|\vec{x}\|^k} \\
&\le \frac{|P(\vec{x})|}{\|\vec{x}\|^{k+1}}\|\vec{x}\| + M\|\vec{x}\| \\
&\to 0 \quad \text{καθώς } \vec{x} \to \vec{0}.
\end{aligned}$$

Από την υπόθεση της επαγωγής έπεται ότι το $Q(\vec{x})$ είναι το μηδενικό πολυώνυμο. Άρα $P(\vec{x}) = H(\vec{x})$, δηλαδή το P είναι ομογενές πολυώνυμο.

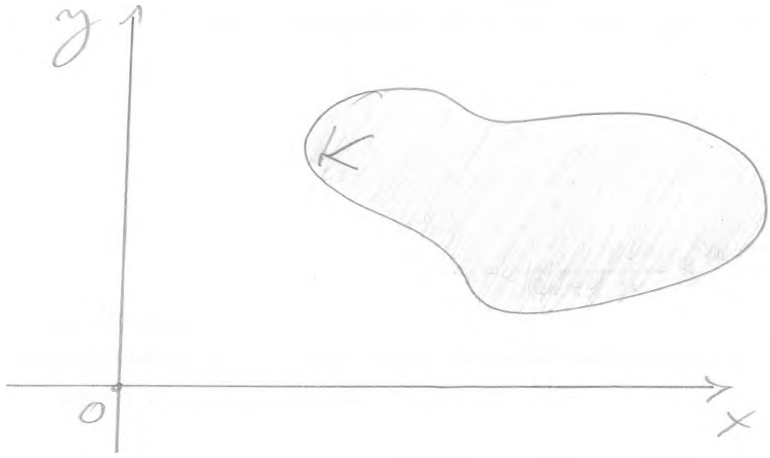
Από την υπόθεση της επαγωγής έπεται ότι το $Q(\vec{x})$ είναι το μηδενικό πολυώνυμο. Άρα $P(\vec{x}) = H(\vec{x})$, δηλαδή το P είναι ομογενές πολυώνυμο.

Έστω τώρα $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$, $\|\vec{u}\| = 1$. Από την (9) έχουμε

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{t \to 0+} \frac{P(t\vec{u})}{\|t\vec{u}\|^{k+1}} \\ &= \lim_{t \to 0+} \frac{t^{k+1} P(\vec{u})}{t^{k+1} \|\vec{u}\|^{k+1}} \\ &= P(\vec{u}) \,. \end{aligned}$$

Άρα το P είναι το μηδενικό πολυώνυμο. □

Διπλά Ολοκληρώματα



$K \subseteq \mathbb{R}^2$

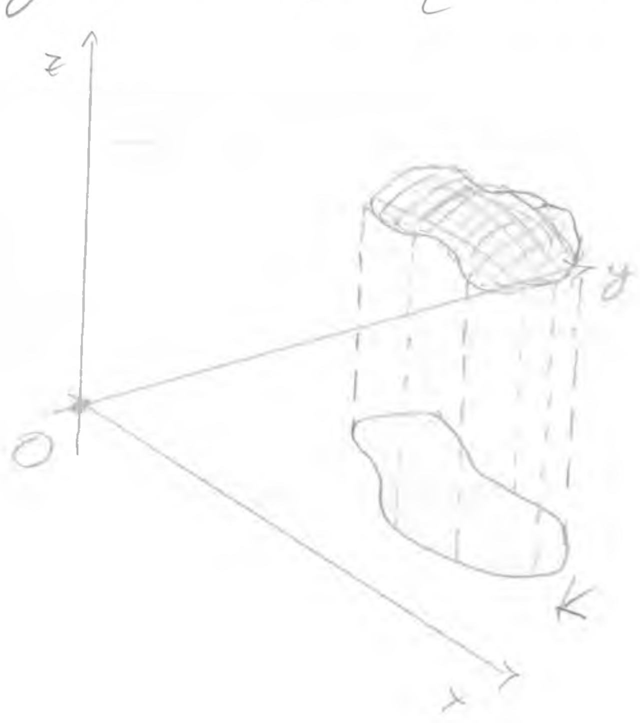
$f : K \to \mathbb{R}$

Θέλουμε να ορίσουμε το

$$\iint_K f(x,y)\,dA \quad \left(\text{ή } \iint_K f(x,y)\,dx\,dy \right)$$

Ο ορισμός πρέπει να είναι τέτοιος ώστε

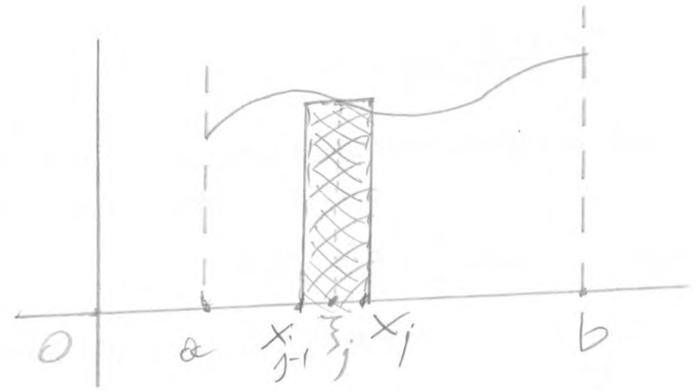
$$\iint_K f(x,y)\,dA = \text{όγκος}\left\{ (x,y,z) : (x,y) \in K,\ 0 \le z \le f(x,y) \right\}$$



$(f \ge 0)$

Όταν $f:[a,b] \to \mathbb{R}$

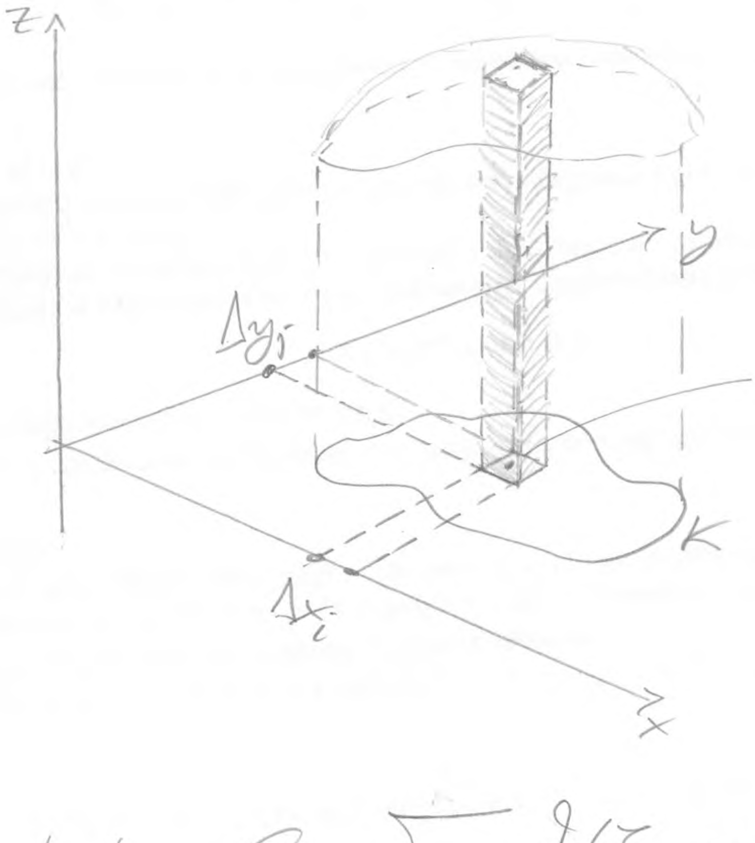
$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim \sum_{j=1}^{k} f(\xi_j)\Delta x_j$$



$\Delta x_j = x_j - x_{j-1}$

$\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$

Ανάλογα όταν $f: K \to \mathbb{R}$, $K \subseteq \mathbb{R}^2$



$$\iint_K f(x,y)\,dx\,dy = \lim \sum_{i,j} f(\xi_i, \eta_j)\,\Delta x_i\,\Delta y_j$$

Η περίπτωση του ορθογωνίου

Έστω $R=[a,b]\times[c,d]$ και $f:R\to\mathbb{R}$ φραγμ.

Έστω

$$P=\{a=x_0<x_1<\dots<x_n=b\}$$

και

$$Q=\{c=y_0<y_1<\dots<y_m=d\}$$

διαμερίσεις των $[a,b]$ και $[c,d]$.

Το σύνολο

$$P\times Q=\Big\{\underbrace{[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j]}_{R_{ij}}\ :\ \begin{array}{l} i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,m\end{array}\Big\}$$

ονομάζεται διαμέριση του R που αντιστοιχεί στις διαμερίσεις P, Q.

Ονομάζουμε επιλογή σημείων για τη διαμέριση $P\times Q$ κάθε σύνολο της μορφής

$$E_{P\times Q}=\Big\{(\xi_i,\eta_j)\in R_{ij}\ :\ \begin{array}{l} i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,m\end{array}\Big\}$$

<u>Ορισμός</u> Έστω $f: R \to \mathbb{R}$ φραγμένη, $P\times Q$ μία διαμέριση του R και $E_{P\times Q}$ μία επιλογή σημείων για τη διαμέριση $P\times Q$. Το άθροισμα

$$R(f, P\times Q, E_{P\times Q}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(\xi_i, \eta_j)\,(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

ονομάζεται <u>άθροισμα Riemann</u> της f που αντιστοιχεί στη διαμέριση $P\times Q$ και στην επιλογή σημείων $E_{P\times Q}$.

Θέτουμε

$$\delta(R_{ij}) = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_j - y_{j-1})^2} \qquad \begin{pmatrix} i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m \end{pmatrix}$$

και ονομάζουμε <u>λεπτότητα</u> της διαμέρισης $P\times Q$ τον αριθμό

$$\|P\times Q\| = \max\{\delta(R_{ij}) : i=1,\dots,n,\ j=1,\dots,m\}$$

<u>Ορισμός</u> Μία φραγμένη συνάρτηση $f: R \to \mathbb{R}$ λέγεται ολοκληρώσιμη κατά Riemann αν υπάρχει $I \in \mathbb{R}$ ώστε:

για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε αν $P \times Q$ είναι διαμέριση του R με $\|P \times Q\| < \delta$ τότε

$$\left| R(f, P \times Q, E_{P \times Q}) - I \right| < \varepsilon$$

για κάθε επιλογή σημείων $E_{P \times Q}$ για τη διαμέριση $P \times Q$.

Αν η f είναι ολοκληρώσιμη τότε το παραπάνω I είναι μοναδικό και γράφουμε

$$I = \iint_R f(x,y)\, dA \quad \text{ή} \quad \iint_R f(x,y)\, dx\, dy$$

$\longrightarrow$ ολοκλήρωμα της f στο R.

Έστω $P \times Q$ μία διαμέριση του,

$$P \times Q = \{R_{ij} \; ; \; i=1,\dots,n, \; j=1,\dots,m\}$$

Θέτουμε

$$m_{ij} = \inf_{R_{ij}} f(x,y) \; , \quad M_{ij} = \sup_{R_{ij}} f(x,y)$$

και

$$L(f, P \times Q) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} m_{ij} \, \Delta x_i \, \Delta y_j$$

$$U(f, P \times Q) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} M_{ij} \, \Delta x_i \, \Delta y_j$$

Αυτά ονομάζονται άνω και κάτω αθροίσματα της f ως προς τη διαμέριση $P \times Q$.

Ορίζουμε

$$\underline{\iint_R} f(x,y)\,dA = \sup L(f, P \times Q)$$

$$\overline{\iint_R} f(x,y)\,dA = \inf U(f, P \times Q)$$

κάτω/άνω ολοκλήρωμα της f στο R.

Ισχύει

$$\underline{\iint_R} f(x,y)\,dA \le \overline{\iint_R} f(x,y)\,dA$$

<u>Πρόταση</u> (κριτήριο Darboux).
Έστω $f: R \to \mathbb{R}$ φραγμένη. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα

(i) f ολοκληρώσιμη στο R

(ii) $\underline{\iint_R} f(x,y)\,dA = \overline{\iint_R} f(x,y)\,dA$

(iii) για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει διαμέριση $P \times Q$ του R ώστε

$$U(f, P\times Q) - L(f, P\times Q) < \varepsilon.$$

Αν οι (i)-(iii) ισχύουν τότε

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \underline{\iint_R} f(x,y)\,dA = \overline{\iint_R} f(x,y)\,dA$$

<u>Ορισμός</u> Ένα σύνολο $A \subset \mathbb{R}^2$ είναι σύνολο μηδενικού μέτρου αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν ορθογώνια Π_j ώστε

$$A \subset \bigcup_j \Pi_j \quad , \quad \sum_j \varepsilon\mu(\Pi_j) < \varepsilon$$

<u>Παράδειγμα</u> Μία C^1 καμπύλη ή γενικότερα μία αριθμήσιμη ένωση C^1 καμπυλών είναι σύνολο μηδενικού μέτρου.

<u>Θεώρημα</u> Έστω $f : R \to \mathbb{R}$ (R ορθογώνιο) φραγμένη. Αν το σύνολο των σημείων ασυνέχειας της f είναι σύνολο μηδενικού μέτρου τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο R.

Για τον υπολογισμό ενός ολοκληρώματος πάνω σε ένα ορθογώνιο $R=[a,b]\times[c,d]$ είναι πολύ χρήσιμο το ακόλουθο

<u>Θεώρημα</u> (Θ. Fubini για ορθογώνια)
Έστω ότι η $f(x,y)$ είναι ολοκληρώσιμη στο $R=[a,b]\times[c,d]$.

(1) Αν το $\int_a^b f(x,y)\,dx$ υπάρχει για κάθε $y\in[c,d]$ τότε υπάρχει και το διαδοχικό ολοκλήρωμα
$$\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)dy$$
και ισχύει
$$\iint_R f(x,y)\,dA=\int_c^d\int_a^b f(x,y)\,dx\,dy$$

(2) Ανάλογα: αν το $\int_c^d f(x,y)\,dy$ υπάρχει για κάθε $x\in[a,b]$ τότε
$$\iint_R f(x,y)\,dA=\int_a^b\int_c^d f(x,y)\,dy\,dx$$

<u>Πόρισμα:</u> Αν η f είναι συνεχής στο R τότε υπάρχουν και τα δύο διαδοχικά ολοκληρώματα και ισχύει

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_c^d\int_a^b f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b\int_c^d f(x,y)\,dy\,dx$$

<u>Παράδειγμα</u> Να υπολογιστεί το

$$\iint_R (x+y)^2\,dA$$

όπου $R=[0,1]\times[1,2]$.

Έχουμε

$$\iint_R (x+y)^2\,dA = \int_1^2\int_0^1 (x^2+2xy+y^2)\,dx\,dy$$

$$= \int_1^2 \left[\frac{x^3}{3}+x^2y+xy^2\right]_0^1 dy$$

$$= \int_1^2 \left(\frac{1}{3}+y+y^2\right) dy$$

$$= \left[\frac{y}{3}+\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}\right]_1^2 = \frac{25}{6}$$

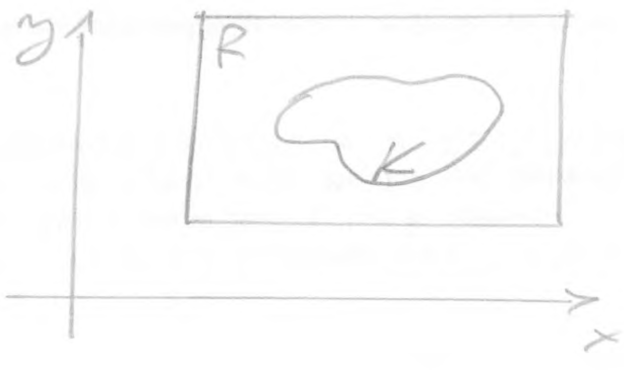
Επέκταση του ορισμού σε πιο γενικά χωρία ολοκλήρωσης.

Ορισμός Έστω $K \subset \mathbb{R}^2$ φραγμένο και $f: K \to \mathbb{R}$ φραγμένη. Έστω R ορθογώνιο τέτοιο ώστε $K \subset R$. Έστω $\tilde{f}: R \to \mathbb{R}$,

$$\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & , \text{ αν } (x,y) \in K \\ 0 & , \text{ αν } (x,y) \notin K \end{cases}$$

Η f λέγεται ολοκληρώσιμη στο K αν η $\tilde{f}$ είναι ολοκληρώσιμη στο R, και στην περίπτωση αυτή ορίζουμε

$$\iint_K f(x,y)\,dA = \iint_R \tilde{f}(x,y)\,dA$$



Παρατήρηση Αποδεικνύεται ότι ο ορισμός δεν εξαρτάται από την επιλογή του συγκεκριμένου $R \supset K$.

<u>Ορισμός</u> Το σύνολο $D \subseteq \mathbb{R}^2$ λέγεται <u>μετρήσιμο</u> αν η σταθερή συνάρτηση $f(x,y)=1$, $(x,y)\in D$, είναι ολοκληρώσιμη στο D. Στην περίπτωση αυτή ορίζεται το <u>εμβαδόν</u> του D ως

$$\varepsilon\mu(D) = \iint_D dA$$

<u>Παρατήρηση</u>. Η ανωτέρω έννοια μετρησιμότητας είναι διαφορετική από αυτήν της κατά Lebesgue μετρησιμότητας, την οποία συναντά κανείς σε μεγαλύτερα έτη.

Πρόταση (ιδιότητες ολοκληρώματος)

Έστω ότι οι συναρτήσεις f, g είναι ολοκληρώσιμες στο D. Τότε

(1) $$\iint_D (\lambda f + \mu g)\, dA = \lambda \iint_D f\, dA + \mu \iint_D g\, dA$$

(2) Το γινόμενο fg είναι ολοκληρώσιμο στο D

(3) Αν $f \le g$ στο D τότε $\iint_D f\, dA \le \iint_D g\, dA$

Ειδικότερα, αν $m \le f \le M$ στο D τότε

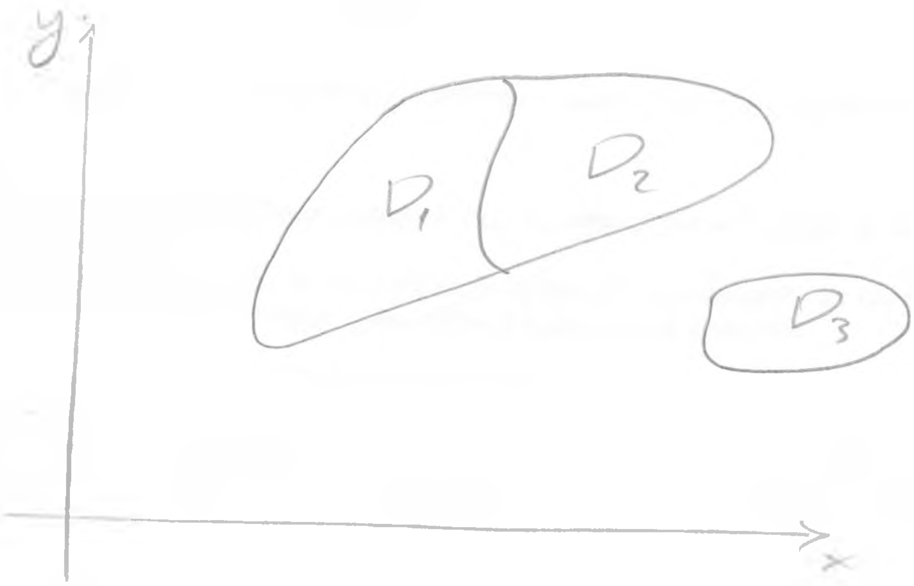
$$m\, \text{εμ}(D) \le \iint_D f\, dA \le M\, \text{εμ}(D)$$

(4) Η συνάρτηση $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη και

$$\left| \iint_D f(x,y)\, dA \right| \le \iint_D |f(x,y)|\, dA$$

<u>Πρόταση</u>. Αν η $f(x,y)$ είναι ολοκληρώσιμη στα $D_1, D_2, \dots, D_m$ και τα D_j είναι ξένα ανά δύο (ή η τομή τους ανά δύο είναι σύνολο μηδενικού μέτρου) τότε είναι ολοκληρώσιμη και στο $D = D_1 \cup \dots \cup D_m$ και

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \iint_{D_1} f(x,y)\,dA + \dots + \iint_{D_m} f(x,y)\,dA$$



<u>Ορισμός</u> Έστω ότι η $f(x,y)$ είναι ολοκληρώσιμη στο D. Ο αριθμός

$$\mu(f,D)=\frac{1}{\text{εμ}(D)}\iint_D f(x,y)\,dA$$

ονομάζεται <u>μέση τιμή</u> της f στο D.

<u>Πρόταση</u> (Θ. Μέσης Τιμής) Έστω ότι το D είναι κλειστό, φραγμένο, κατά τόξα συνεκτικό. Αν η f είναι συνεχής τότε υπάρχει $(x_0,y_0)\in D$ ώστε $f(x_0,y_0)=\mu(f,D)$.

<u>Απόδειξη</u> Αφού το D είναι συμπαγές και η f συνεχής, υπάρχουν $\vec{x}_{min}, \vec{x}_{max}$ στο D ώστε

$$f(\vec{x}_{min})\le f(x,y)\le f(\vec{x}_{max}),\quad (x,y)\in D.$$

Ολοκληρώνοντας και διαιρώντας με εμ(D) παίρνουμε

$$f(\vec{x}_{min})\le \mu(f,D)\le f(\vec{x}_{max})$$

Αφού το D είναι κατά τόξα συνεκτικό το ζητούμενο έπεται από το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών

και η f είναι συνεχής

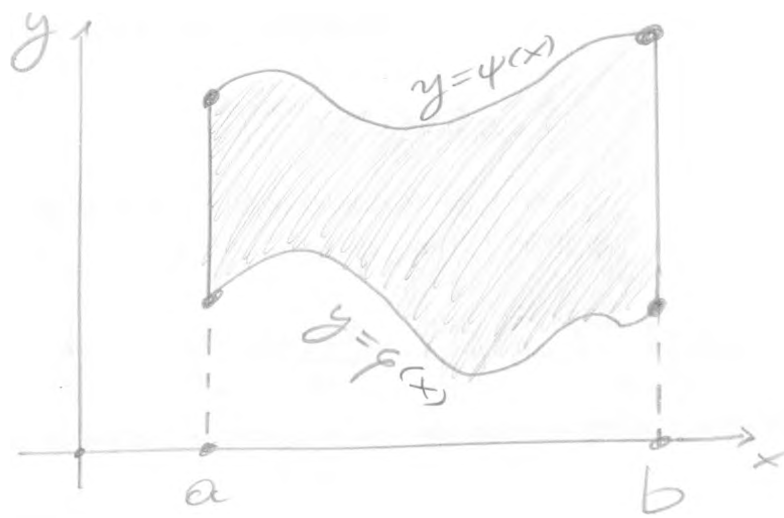
Στην πράξη είναι χρήσιμο το ακόλουθο κριτήριο ολοκληρωσιμότητας:

<u>Πρόταση</u> Έστω ότι το σύνορο ∂K του φραγμένου συνόλου $K \subset \mathbb{R}^2$ είναι πεπερασμένη ένωση C^1 καμπυλών. Έστω ακόμη ότι η φραγμένη συνάρτηση $f: K \to \mathbb{R}$ είτε είναι συνεχής είτε το σύνολο των σημείων ασυνέχειας της είναι πεπερασμένη ένωση C^1 καμπυλών. Τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο K.

<u>Ορισμός</u> Ένα σύνολο $D \subset \mathbb{R}^2$ ονομάζεται x-απλό αν υπάρχει διάστημα $[a,b] \subset \mathbb{R}$ και συνεχείς συναρτήσεις $\varphi, \psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ ώστε

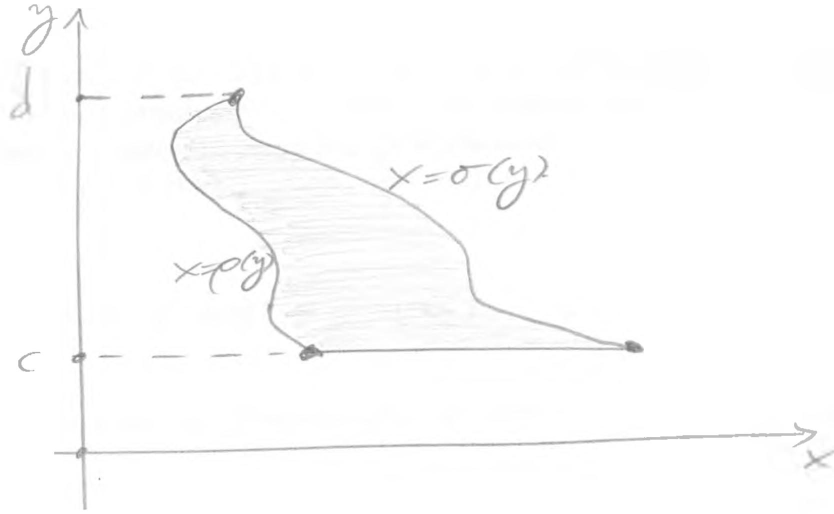
$$D = \{(x,y) : a \le x \le b,\ \varphi(x) \le y \le \psi(x)\}$$

x-απλό



Ανάλογα ορίζονται τα y-απλά σύνολα:

$$D = \{(x,y) : c \le y \le d,\ \rho(y) \le x \le \sigma(y)\}$$



<u>Θεώρημα</u> (Θ. Fubini για x-απλά χωρία)
Έστω ότι το χωρίο D είναι x-απλό:

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b,\ \varphi(x) \le y \le \psi(x)\}$$

Αν η $f: D \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής τότε είναι ολοκληρώσιμη στο D και

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_a^b \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy\,dx$$

διαδοχικά ολοκληρώματα.

Ανάλογα έχουμε ότι αν το D είναι y-απλό

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : c \le y \le d,\ \varphi(y) \le x \le \psi(y)\}$$

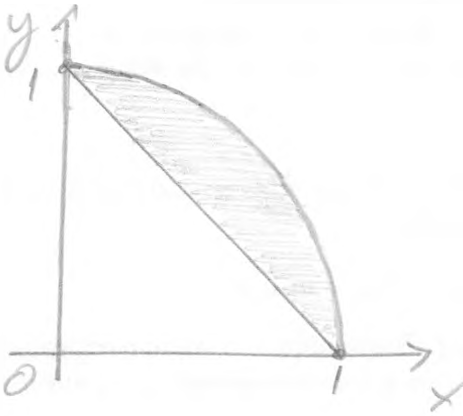
τότε για $f: D \to \mathbb{R}$ συνεχή έχουμε

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_c^d \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,dx\,dy$$

Παράδειγμα

Να υπολογιστεί το $\iint_D (x+y)\,dA$ όπου

$$D=\{(x,y) : x+y\geq 1 \;,\; x^2+y^2\leq 1\}$$



Το χωρίο είναι x-απλό:

$$D=\{(x,y) : 0\leq x\leq 1 \;,\; 1-x\leq y\leq \sqrt{1-x^2}\}$$

Άρα

$$\iint_D (x+y)\,dA = \int_0^1 \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} (x+y)\,dy\,dx$$

$$= \int_0^1 \left[xy + \frac{y^2}{2} \right]_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= \int_0^1 \left(x\sqrt{1-x^2} + \frac{1-x^2}{2} - x(1-x) - \frac{(1-x)^2}{2} \right) dx$$

$$= \int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

<u>Παράδειγμα</u> Να υπολογιστεί το διαδοχικό ολοκλήρωμα

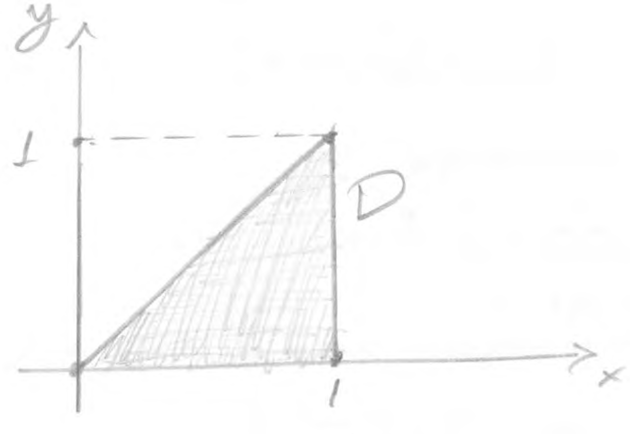
$$I = \int_0^1 \int_y^1 e^{-x^2} dx\, dy.$$

Το $\int e^{-x^2} dx$ δεν εκφράζεται βάσει στοιχειωδών συναρτήσεων. Παρατηρούμε ότι αν ορίσουμε

$$D = \{(x,y) : 0 \le y \le 1 ,\ y \le x \le 1\}$$

(y-απλό). τότε

$$I = \iint_D e^{-x^2} dA$$



Το D είναι επίσης x-απλό:

$$D = \{(x,y) : 0 \le x \le 1 ,\ 0 \le y \le x\}$$

Aea

$$I = \int_0^1 \int_0^x e^{-x^2} \, dy \, dx$$

$$= \int_0^1 x e^{-x^2} \, dx$$

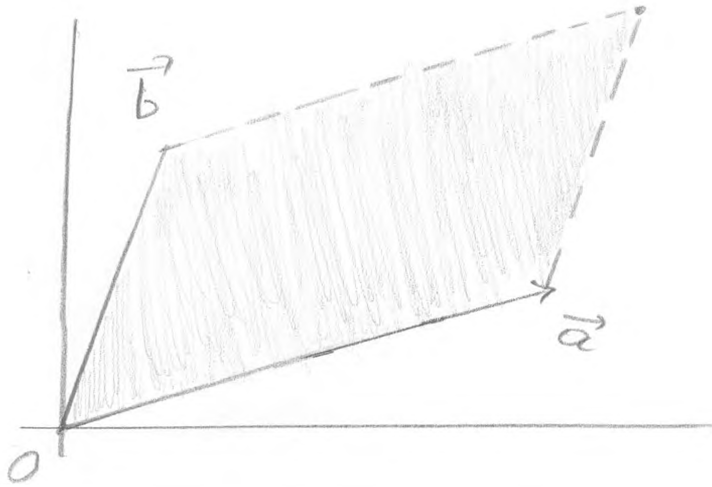
$$= \left[-\frac{1}{2} e^{-x^2} \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{e}\right)$$

Αλλαγή μεταβλητών

Πρόταση: Το εμβαδόν του παραλληλογράμμου που ορίζουν δύο διανύσματα $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^2$ είναι

$$E = |\det[\vec{a}, \vec{b}]| = \left| \det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \right|$$

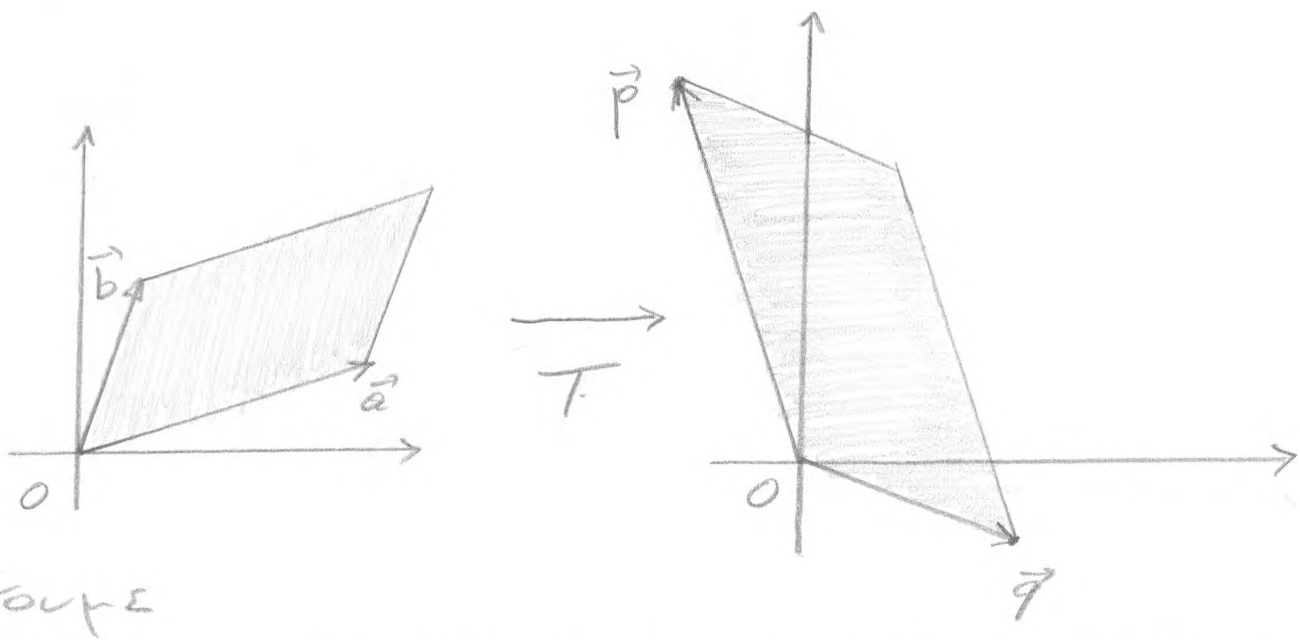


Έστω $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ ένας γραμμικός μετασχηματισμός. Συμβολίζουμε επίσης με T τον πίνακα του μετασχηματισμού ως προς την κανονική βάση $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}\}$ του $\mathbb{R}^2$.

<u>Πρόταση</u>. Για κάθε παραλληλόγραμμο Π ισχύει

$$\varepsilon\mu(T(\Pi)) = |\det T| \cdot \varepsilon\mu(\Pi)$$

<u>Απόδειξη</u>. Έστω ότι το Π ορίζεται από τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{b}$, οπότε η εικόνα $T(\Pi)$ ορίζεται από τα διανύσματα $\vec{p} = T\vec{a}$, $\vec{q} = T\vec{b}$.

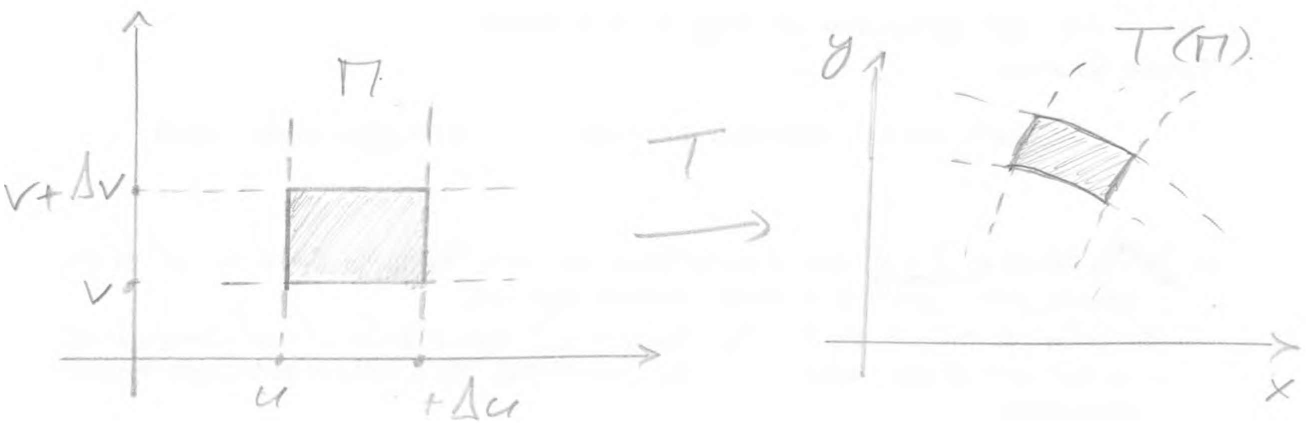


Έχουμε

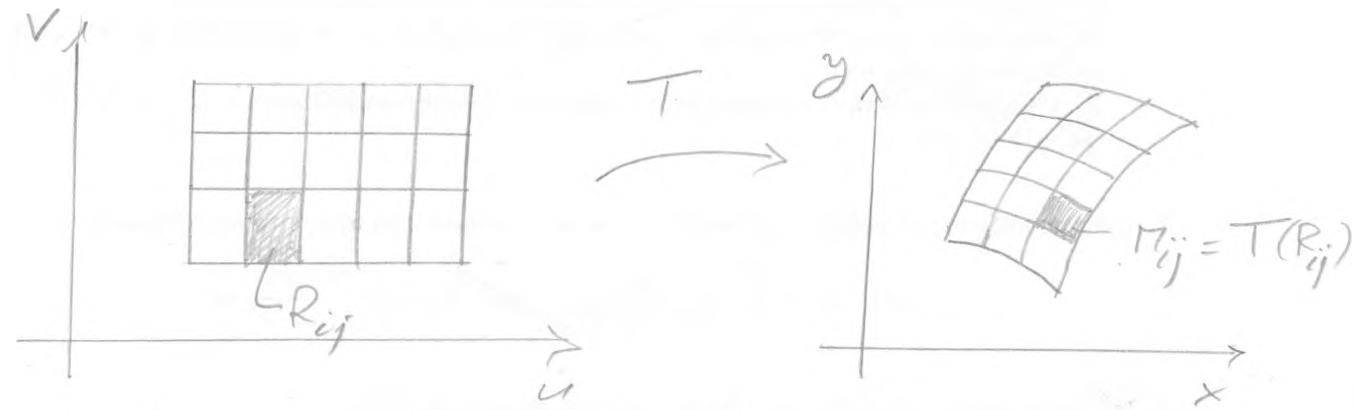
$$\varepsilon\mu(T(\Pi)) = |\det[\vec{p}, \vec{q}]| = |\det[T\vec{a}, T\vec{b}]|$$

$$= |\det(T[\vec{a}, \vec{b}])| = |\det T| \cdot |\det[\vec{a}, \vec{b}]| = |\det T|\, \varepsilon\mu(\Pi)$$

$T(u,v)=(x,y)$ 1-1, C^1



$$\varepsilon\mu\left(T(\Pi)\right) \simeq \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| \varepsilon\mu(\Pi)$$



Έστω $f=f(x,y)$ και $D\subseteq\mathbb{R}^2$. Τότε

$$\iint\limits_{T(D)} f(x,y)\,dx\,dy \simeq \sum_{i,j} f(x_i^*,y_j^*)\,\varepsilon\mu(\Pi_{ij})$$

$$\simeq \sum_{i,j} f\left(T(u_i^*,v_j^*)\right)\varepsilon\mu\left(T(R_{ij})\right)$$

$$\simeq \sum_{i,j} f\left(T(u_i^*,v_j^*)\right)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|_{(u_i^*,v_j^*)}\varepsilon\mu(R_{ij})$$

$$\simeq \iint\limits_{D} f\left(T(u,v)\right)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv$$

<u>Θεώρημα</u> (τύπος αλλαγής μεταβλητών)
Έστω $D \subseteq \mathbb{R}^2$ φραγμένο χωρίο με ομαλό σύνορο (π.χ. το ∂D είναι ένωση C^1 καμπυλών). Έστω ότι ο μετασχηματισμός $T : D \to T(D)$ είναι 1-1 και C^1 (εκτός ίσως από το ∂D).

$$T(u,v) = (x,y)$$

Τότε για κάθε συνεχή συνάρτηση $f : T(D) \to \mathbb{R}$ ισχύει

$$\iint_{T(D)} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D} f(T(u,v)) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| du\,dv$$

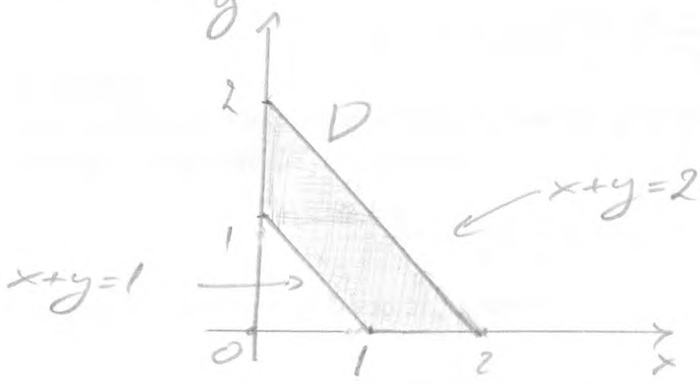
(ανάλογο του $\displaystyle\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx = \int_a^b f(\varphi(u))\,\varphi'(u)\,du$

όταν φ C^1 και γνήσια μονότονη)

<u>Παράδειγμα</u> Να υπολογιστεί το

$$\iint_D e^{\frac{y-x}{y+x}}\,dx\,dy$$ όπου D το τραπέζιο

με κορυφές $(0,1)$, $(0,2)$, $(1,0)$, $(2,0)$



Το D είναι x-απλό

$$D=\{(x,y):\ 0\le x\le 2,\ \max\{0,1-x\}\le y\le 2-x\}$$

Θέτουμε $u=x+y$, $v=y-x$.

$$\rightsquigarrow\ x=\frac{u-v}{2},\ y=\frac{u+v}{2} \qquad (x,y)=T(u,v)$$

Έχουμε

$$D=\{(x,y):\ 1\le x+y\le 2,\ x\ge 0,\ y\ge 0\}$$

άρα $D=T(D^*)$ όπου

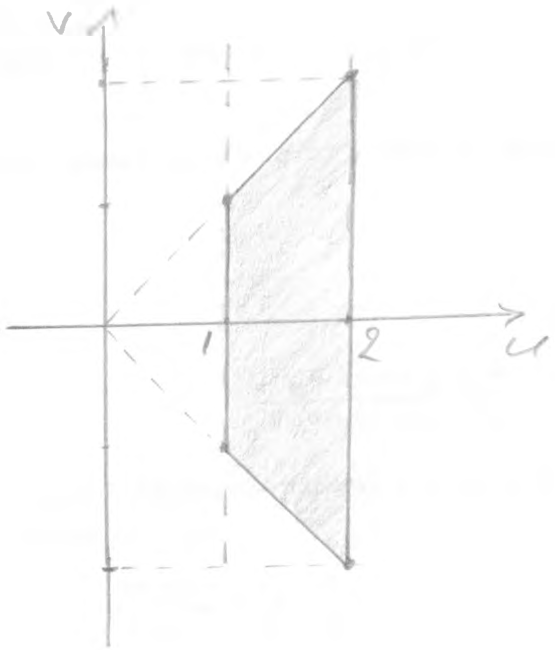
$$D^*=\{(u,v):\ 1\le u\le 2,\ \frac{u-v}{2}\ge 0,\ \frac{u+v}{2}\ge 0\}$$

$$=\{(u,v):\ 1\le u\le 2,\ -u\le v\le u\}$$

(u-απλό)

Επίσης

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{vmatrix}=\frac{1}{2}$$



Εχουμε

$$\iint_D e^{\frac{y-x}{y+x}}\,dx\,dy = \iint_{D^*} e^{\frac{v}{u}} \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| du\,dv$$

$$= \frac{1}{2}\iint_{D^*} e^{\frac{v}{u}}\,du\,dv =$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^2\int_{-u}^{u} e^{\frac{v}{u}}\,dv\,du$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^2 \left[u e^{\frac{v}{u}}\right]_{v=-u}^{v=u} du$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^2 u\left(e-\frac{1}{e}\right) du = \frac{3}{4}\left(e-\frac{1}{e}\right)$$

Πολικός μετασχηματισμός

Πολικός μετασχηματισμός ονομάζεται ο μετασχηματισμός $T: [0,\infty)\times[0,2\pi]\to\mathbb{R}^2$

$$T(r,\theta) = (x,y) \qquad \begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \end{aligned}$$

Ισχύει

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

και άρα ο T είναι τοπικά αντιστρέψιμος σε κάθε (r,θ) με $r\neq 0$ (που αντιστοιχεί σε $(x,y)\neq(0,0)$).

Έστω $f: \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f=f(x,y)$. Η $\tilde{f}(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ συμβολίζεται συνήθως με $f(r,\theta)$

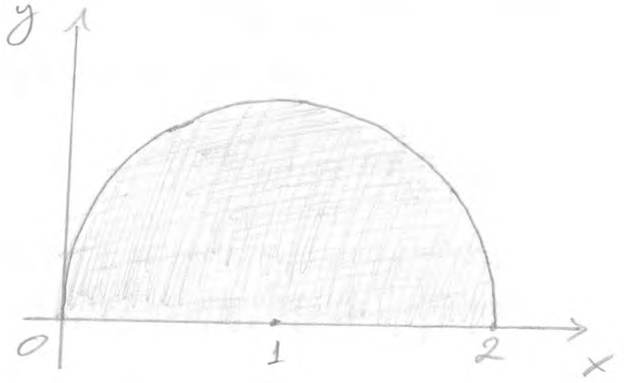
Άρα αν ο $T: D\to T(D)$ είναι 1-1, τότε

$$\iint_{T(D)} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_D f(r,\theta)\, r\,dr\,d\theta$$

<u>Παράδειγμα</u> Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy$, όπου

$$D=\{(x,y):\ x^2+y^2\le 2x\ ,\ y\ge 0\}$$

Έχουμε $x^2+y^2\le 2x \Leftrightarrow (x-1)^2+y^2\le 1$



Το D είναι x-απλό:

$$D=\{(x,y):\ 0\le x\le 2\ ,\ 0\le y\le \sqrt{2x-x^2}\}$$

Άρα

$$\iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy=\int_0^2\int_0^{\sqrt{2x-x^2}}(x^2+y^2)\,dy\,dx$$

Πιο απλά με πολικές συντεταγμένες

$x^2+y^2 \le 2x \iff r^2 \le 2r\cos\theta$

$\iff r \le 2\cos\theta.$

Άρα $\cos\theta \ge 0$. Επίσης

$y \ge 0 \iff r\sin\theta \ge 0 \iff \sin\theta \ge 0$

Άρα $0 \le \theta \le \pi/2$. (προκύπτει και από το σχήμα)

Άρα σε πολικές συντεταγμένες

$D^* = \{(r,\theta) : 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le r \le 2\cos\theta\}$.

Άρα

$$\iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy = \iint_{D^*} r^2 \cdot r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\cos\theta} r^3\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4}(2\cos\theta)^4\,d\theta = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta\,d\theta$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{8}\cos 4\theta + \frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{3}{8}\right) d\theta$$

$$= 4\left[\frac{1}{32}\sin 4\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta + \frac{3\theta}{8}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3\pi}{4}$$

Εφαρμογές των διπλών ολοκληρωμάτων

Κέντρο μάζας

Έστω D επίπεδο σώμα, όχι απαραίτητα ομογενές, πυκνότητας $\rho(x,y)$.
Η μάζα του σώματος είναι τότε

$$m = \iint_D \rho(x,y)\,dA$$

Το κέντρο μάζας του σώματος (x_0, y_0) δίνεται από τις σχέσεις

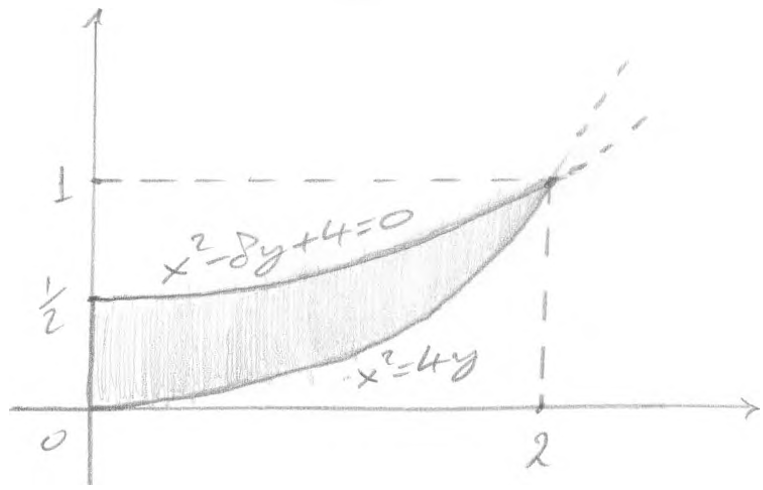
$$x_0 = \frac{1}{m}\iint_D x\rho(x,y)\,dA \ , \quad y_0 = \frac{1}{m}\iint_D y\rho(x,y)\,dA$$

Οι ποσότητες

$$I_x = \iint_D y^2\rho(x,y)\,dA \ , \quad I_y = \iint_D x^2\rho(x,y)\,dA$$

ονομάζονται ροπές αδράνειας του D ως προς τους άξονες του x και του y αντίστοιχα.

Παράδειγμα Να βρεθεί το κέντρο μάζας ομογενούς σώματος D που βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο και ορίζεται από τις παραβολές $x^2-8y+4=0$, $x^2=4y$ και την ευθεία $x=0$.



Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\rho=1$. Το D είναι x-απλό και έχουμε

$$m=\iint_D dA=\int_0^2\int_{x^2/4}^{\frac{x^2+4}{8}} dy\,dx$$

$$=\int_0^2\left(\frac{1}{2}-\frac{x^2}{8}\right)dx=\frac{2}{3}$$

Βρίσκουμε το κέντρο μάζας (x_0, y_0):

$$x_0 = \frac{1}{m}\iint_D x\,dA = \frac{3}{2}\int_0^2\int_{x^2/4}^{\frac{x^2+4}{8}} x\,dy\,dx$$

$$= \int_0^2 \left(\frac{x}{2} - \frac{x^3}{8}\right)dx = \frac{1}{2}$$

$$y_0 = \frac{1}{m}\iint_D y\,dA =$$

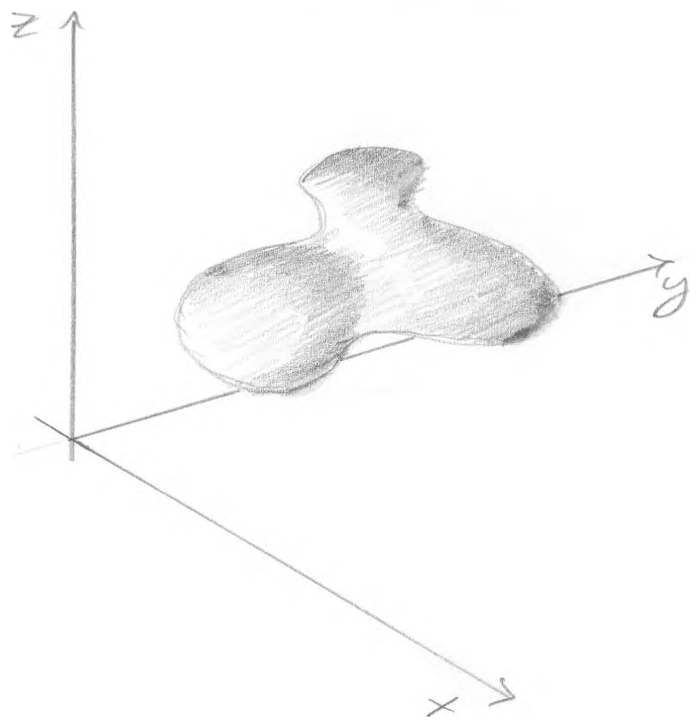
$$= \frac{3}{2}\int_0^2\int_{x^2/4}^{\frac{x^2+4}{8}} y\,dy\,dx$$

$$= \frac{3}{2}\int_0^2 \left[\frac{y^2}{2}\right]_{\frac{x^2}{4}}^{\frac{x^2+4}{8}} dx$$

$$= \frac{3}{4}\int_0^2 \left(-\frac{3}{64}x^4 + \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{4}\right)dx$$

$$= \frac{2}{5}$$

Τριπλά ολοκληρώματα.



$K \subseteq \mathbb{R}^3$

$f: K \longrightarrow \mathbb{R}$

Θέλουμε να ορίσουμε το

$$\iiint_K f(x,y,z)\,dV \quad \left(\text{ή} \iiint_K f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \right)$$

Η περίπτωση του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου

Έστω $B=[a,b]\times[c,d]\times[e,g]$. Έστω

$$P=\{a=x_0<x_1<\dots<x_n=b\}$$

$$Q=\{c=y_0<y_1<\dots<y_m=d\}$$

$$R=\{e=z_0<z_1<\dots<z_\ell=g\}$$

Το σύνολο

$$P\times Q\times R=\{\overbrace{[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j]\times[z_{k-1},z_k]}^{B_{ijk}}:$$
$$i=1,\dots,n,\ j=1,\dots,m,\ k=1,\dots,\ell\}$$

ονομάζεται <u>διαμέριση</u> του B που αντιστοιχεί στις διαμερίσεις P,Q,R.

Ονομάζουμε επιλογή σημείων για τη διαμέριση $P\times Q\times R$ κάθε σύνολο της μορφής

$$E_{P\times Q\times R}=\{(x_i^*,y_j^*,z_k^*)\in B_{ijk}:i=1,\dots,n,$$
$$j=1,\dots,m,\ k=1,\dots,\ell\}$$

<u>Ορισμός</u> Έστω $f: B \to \mathbb{R}$ φραγμένη, $P\times Q\times R$ μία διαμέριση του B και $E_{P\times Q\times R}$ μία επιλογή σημείων για τη διαμέριση $P\times Q\times R$. Το άθροισμα

$$R(f, P\times Q\times R, E_{P\times Q\times R}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{\ell} f(x_i^*, y_j^*, z_k^*)(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})(z_k - z_{k-1})$$

ονομάζεται άθροισμα Riemann της f που αντιστοιχεί στη διαμέριση $P\times Q\times R$ και στην επιλογή σημείων $E_{P\times Q\times R} = \{(x_i^*, y_j^*, z_k^*),\ i=1,\dots,n,\ j=1,\dots,m,\ k=1,\dots,\ell\}$.

Θέτουμε

$$\delta(B_{ijk}) = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_j - y_{j-1})^2 + (z_k - z_{k-1})^2}$$

και ονομάζουμε λεπτότητα της διαμέρισης $P\times Q\times R$ τον αριθμό

$$\|P\times Q\times R\| = \max\{\delta(B_{ijk}),\ i=1,\dots,n,\ j=1,\dots,m,\ k=1,\dots,\ell\}$$

<u>Ορισμός</u> Μία φραγμένη συνάρτηση $f: B \to \mathbb{R}$ λέγεται ολοκληρώσιμη κατά Riemann αν υπάρχει $I \in \mathbb{R}$ ώστε:

για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε αν $P \times Q \times R$ είναι διαμέριση του B με $\|P \times Q \times R\| < \delta$ τότε

$$|R(f, P \times Q \times R, E_{P \times Q \times R}) - I| < \varepsilon$$

για κάθε επιλογή σημείων $E_{P \times Q \times R}$ για τη διαμέριση $P \times Q \times R$.

Αν η f είναι ολοκληρώσιμη τότε το παραπάνω I είναι μοναδικό και γράφουμε

$$I = \iiint_B f(x,y,z)\,dV \quad \text{ή} \quad \iiint_B f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

$\longrightarrow$ ολοκλήρωμα της f στο B

<u>Παρατήρηση</u>: Τα άνω και κάτω ολοκληρώματα $\underline{\iiint_B} f\,dV$, $\overline{\iiint_B} f\,dV$ ορίζονται με ανάλογο τρόπο αυτού των διπλών ολοκληρωμάτων και ισχύει το (αντίστοιχο) κριτήριο Darboux.

Ανάλογα επίσης ορίζονται τα σύνολα μηδενικού μέτρου και ισχύει ότι αν το σύνολο των σημείων ασυνέχειας μιας συνάρτησης $f: B \to \mathbb{R}$ είναι μηδενικού μέτρου, τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο B.

Θα ασχοληθούμε κυρίως με τους τρόπους υπολογισμού τριπλών ολοκληρωμάτων.

Έστω $B = [a,b] \times [c,d] \times [e,f]$.

Για κάθε συνάρτηση $f : B \to \mathbb{R}$ υπάρχουν έξι διαδοχικά ολοκληρώματα

$$\int_a^b \int_c^d \int_e^f f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx \; , \quad \int_a^b \int_e^f \int_c^d f\,dy\,dz\,dx$$

κλπ.

Στο επόμενο Θεώρημα υποθέτουμε για απλότητα ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής.

Θεώρημα. (Fubini) Έστω ότι η $f : B \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής. Τότε είναι ολοκληρώσιμη στο B και το $\iiint_B f\,dV$ ισούται με κάθε ένα από τα έξι διαδοχικά ολοκληρώματα.

Επέκταση του ορισμού σε γενικότερα χωρία ολοκλήρωσης.

<u>Ορισμός</u> Έστω $K \subseteq \mathbb{R}^3$ φραγμένο και $f: K \to \mathbb{R}$ φραγμένη. Έστω B ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο τέτοιο ώστε $K \subset B$. Έστω $\hat{f}: B \to \mathbb{R}$,

$$\hat{f}(x,y,z) = \begin{cases} f(x,y,z), & \text{αν } (x,y,z) \in K \\ 0, & \text{αν } (x,y,z) \notin K \end{cases}$$

Η f λέγεται ολοκληρώσιμη στο K αν η $\hat{f}$ είναι ολοκληρώσιμη στο B, και στην περίπτωση αυτή ορίζουμε

$$\iiint_K f(x,y,z)\,dV = \iiint_B \hat{f}(x,y,z)\,dV$$

<u>Παρατήρηση</u> Αποδεικνύεται ότι ο ορισμός δεν εξαρτάται από την επιλογή του συγκεκριμένου $B \supset K$

<u>Πρόταση</u> (κριτήριο ολοκληρωσιμότητας)
Έστω ότι το σύνορο ∂K του φραγμένου συνόλου $K \subseteq \mathbb{R}^3$ είναι πεπερασμένη ένωση ομαλών επιφανειών. Έστω ακόμη ότι η φραγμένη συνάρτηση $f: K \to \mathbb{R}$ είτε είναι συνεχής είτε το σύνολο των σημείων ασυνέχειας είναι (ή περιέχεται σε) πεπερασμένη ένωση ομαλών επιφανειών. Τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο K.

<u>Παρατήρηση</u> Ανάλογες ιδιότητες με αυτές που περιέχονται στις σελίδες 12-15 ισχύουν και για τα τριπλά ολοκληρώματα.
Ειδικότερα, το $K \subseteq \mathbb{R}^3$ λέγεται <u>μετρήσιμο</u> αν υπάρχει το $\iiint_K dV$, οπότε ορίζεται ο όγκος του K ως

$$ογκ(K) = \iiint_K dV$$

<u>Πρόταση</u> (Θ. Fubini) Έστω

$$D=\{(x,y,z): a\le x\le b,\ \varphi(x)\le y\le \psi(x),\ g(x,y)\le z\le h(x,y)\}$$

Αν η συνάρτηση $f: D\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής τότε

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dV=\int_a^b\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)}\int_{g(x,y)}^{h(x,y)} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$$

<u>Παρατήρηση</u> Φυσικά, οι ρόλοι των x,y,z στην περιγραφή του D μπορεί να είναι διαφορετικοί, οπότε αντίστοιχα αλλάζει το τριπλό διαδοχικό ολοκλήρωμα.

<u>Γενικότερα</u>: Αν

$$D=\{(x,y,z): (x,y)\in\underline{\Omega},\ g(x,y)\le z\le h(x,y)\}$$

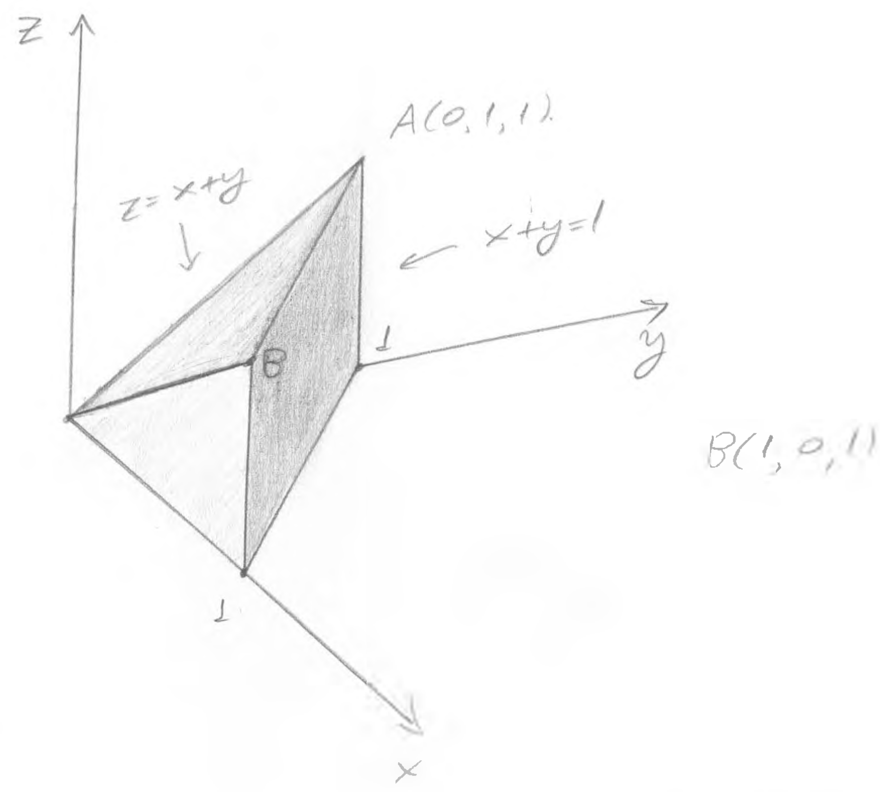
τότε

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dV=\iint_{\underline{\Omega}}\int_{g(x,y)}^{h(x,y)} f(x,y,z)\,dz\,dA$$

<u>Παράδειγμα</u> Να υπολογιστεί το

$$\iiint_B x\,dV$$ όπου B το χωρίο που ορίζεται

από τα επίπεδα $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y=1$, $z=x+y$.



Είναι φανερό από το σχήμα ότι

$$D=\{(x,y,z) : x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0, x+y\leq 1, z\leq x+y\}$$

$$=\{(x,y,z) : 0\leq x\leq 1,\ 0\leq y\leq 1-x,\ 0\leq z\leq x+y\}$$

Άρα

$$\iiint_B x\, dV = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{x+y} x \, dz\, dy\, dx$$

$$= \int_0^1 x \int_0^{1-x} \int_0^{x+y} dz\, dy\, dx$$

$$= \int_0^1 x \int_0^{1-x} (x+y)\, dy\, dx$$

$$= \int_0^1 x \left[xy + \frac{y^2}{2} \right]_0^{1-x} dx$$

$$= \int_0^1 x \left(x(1-x) + \frac{(1-x)^2}{2} \right) dx$$

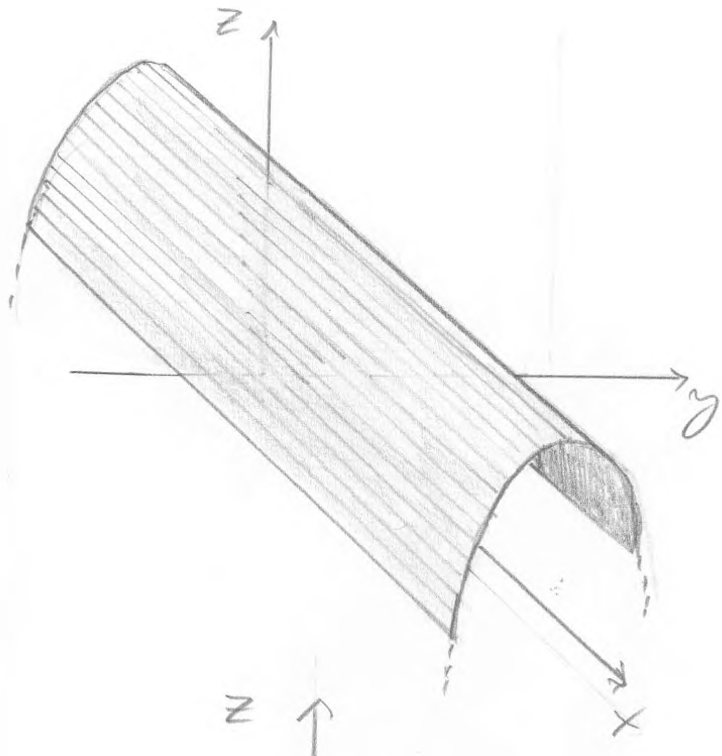
$$= \frac{1}{2} \int_0^1 (x - x^3)\, dx$$

$$= \frac{1}{8}$$

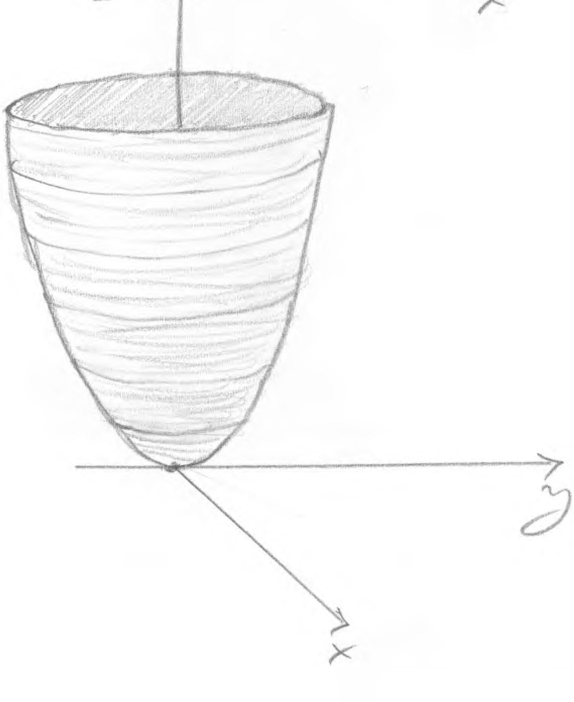
<u>Παράδειγμα</u> Να υπολογιστεί το

$$\iiint_B z\,dV$$

όπου B το στερεό που περικλείεται ανάμεσα στο παραβολοειδές $z=2x^2+y^2$ και την επιφάνεια $z=4-y^2$



$z=4-y^2$



$z=2x^2+y^2$

Ισχύει

$$2x^2+y^2 \le z \le 4-y^2 \quad , \quad \forall (x,y,z) \in B,$$

Άρα υπάρχει $\underline{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^2$ ώστε

$$B = \{(x,y,z) : (x,y) \in \underline{\Omega} \ , \ 2x^2+y^2 \le z \le 4-y^2\}$$

Ποιο είναι το $\underline{\Omega}$; Έχουμε

$$\underline{\Omega} = \{(x,y) : 2x^2+y^2 \le 4-y^2\}$$

$$= \{(x,y) : x^2+y^2 \le 2\}$$

Άρα

$$\iiint_B z \, dV = \iint_{\underline{\Omega}} \int_{2x^2+y^2}^{4-y^2} z \, dz \, dA$$

$$= \frac{1}{2} \iint_{\underline{\Omega}} \left[(4-y^2)^2 - (2x^2+y^2)^2\right] dA$$

$$= \frac{1}{2} \iint_{\underline{\Omega}} \left[16 - 8y^2 + \cancel{y^4} - 4x^4 - 4x^2y^2 - \cancel{y^4}\right] dA$$

$$= \iint_{\underline{\Omega}} \left(8 - 2x^4 - 4y^2 - 2x^2y^2\right) dA$$

(επειδή το χωρίο ολοκλήρωσης είναι δίσκος βολεύουν οι πολικές συντεταγμένες)

$$= \int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{2\pi} (8 - 2r^4\cos^4\theta - 4r^2\sin^2\theta - \\ - 2r^4\cos^2\theta\sin^2\theta)\, r\, dr$$

$$\left[\int_0^{2\pi} \sin^2\theta\, d\theta = \pi, \quad \int_0^{2\pi} \cos^4\theta\, d\theta = \frac{3\pi}{4}, \quad \int_0^{2\pi} \cos^2\theta \sin^2\theta\, d\theta = \frac{\pi}{4} \right]$$

$$= \int_0^{\sqrt{2}} \left(16\pi r - \frac{3\pi}{2} r^5 - 4\pi r^3 - \frac{\pi}{2} r^5\right) dr$$

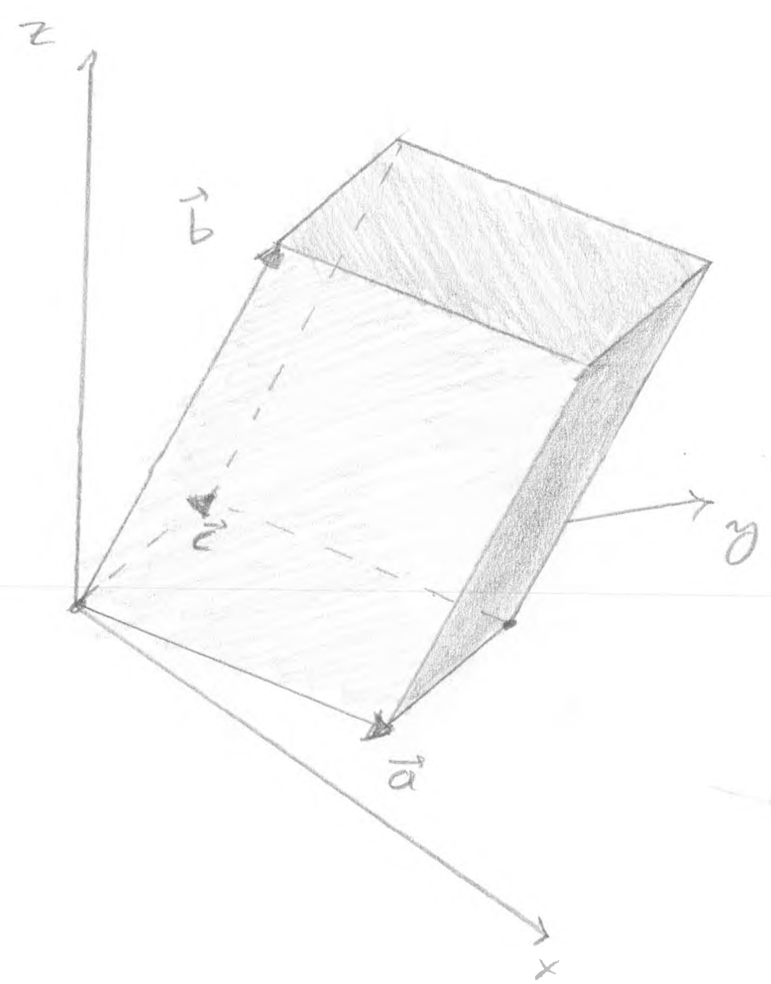
$$= \left[8\pi r^2 - \frac{\pi}{4} r^6 - \pi r^4 - \frac{\pi}{12} r^6\right]_0^{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{28\pi}{3}$$

Αλλαγή μεταβλητών

<u>Πρόταση</u> Ο όγκος του παραλληλεπιπέδου που ορίζουν τρία διανύσματα $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ είναι

$$V = |\det[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]| = \left| \det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \right|$$



Έστω $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ένας γραμμικός μετασχηματισμός. Συμβολίζουμε επίσης με T τον πίνακα του μετασχηματισμού ως προς την κανονική βάση $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ του $\mathbb{R}^3$.

<u>Πρόταση</u> Για κάθε παραλληλεπίπεδο Π ισχύει

$$\text{ογκ}(T(\Pi)) = |\det T| \; \text{ογκ}(\Pi)$$

<u>Θεώρημα</u> (τύπος αλλαγής μεταβλητών)
Έστω $G \subseteq \mathbb{R}^3$ φραγμένο στερεό με ομαλό σύνορο (πχ. το ∂G είναι πεπερασμένη ένωση C^1 επιφανειών). Έστω ότι ο μετασχηματισμός $T: G \to T(G)$ είναι 1-1 και C^1 (εκτός ίσως από το ∂G)

$$T(u,v,w) = (x,y,z)$$

Τότε για κάθε συνεχή συνάρτηση $f: T(G) \to \mathbb{R}$ ισχύει

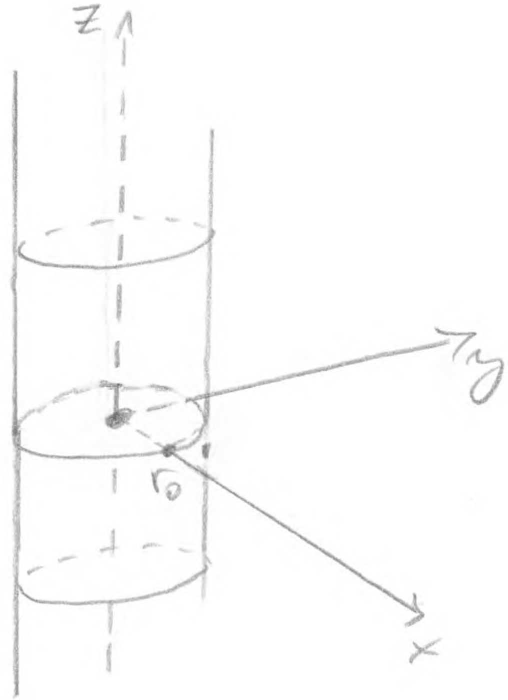
$$\iiint_{T(G)} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{G} f(T(u,v,w)) \left| \frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)} \right| du\,dv\,dw$$

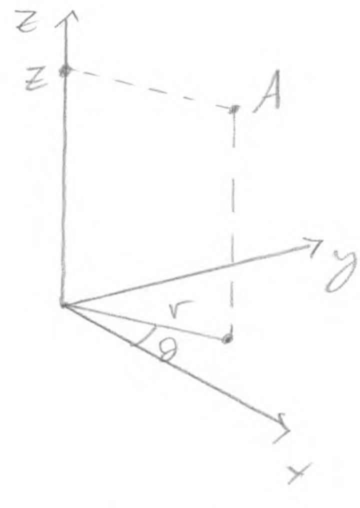
Κυλινδρικός μετασχηματισμός

Κυλινδρικός μετασχηματισμός ονομάζεται ο μετασχηματισμός

$$T(r,\theta,z) = (x,y,z), \quad \begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{array}$$

Παρατήρηση. Η επιφάνεια $r = r_0$ $(r_0 > 0)$ σε κυλινδρικές συντεταγμένες είναι ορθός κυκλικός κύλινδρος ακτίνας r_0





$A(r,\theta,z)$

Ισχύει

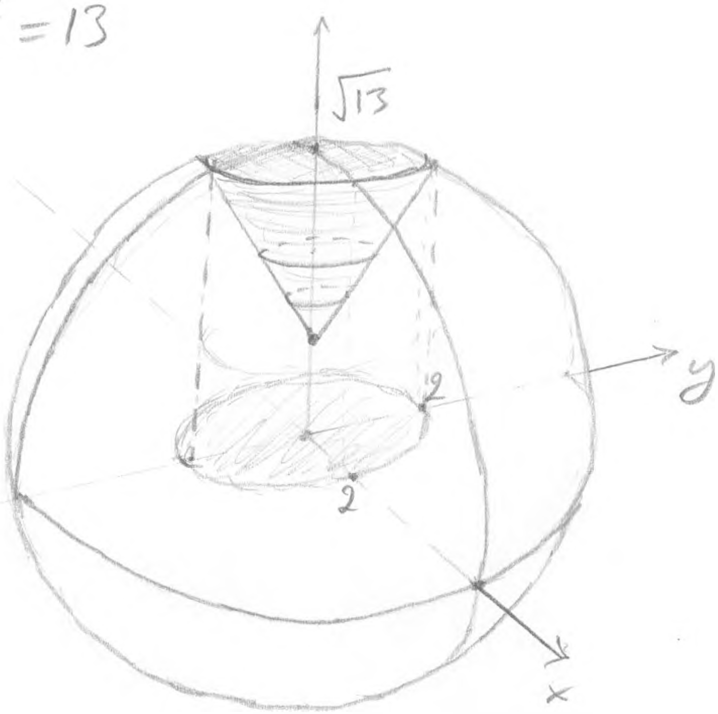
$$\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)}\right| = \begin{vmatrix} x_r & y_r & z_r \\ x_\theta & y_\theta & z_\theta \\ x_z & y_z & z_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= r$$

<u>Παράδειγμα</u> Να υπολογιστεί το

$\iiint_B z\,dV$ όπου B το στερεό που βρίσκεται εντός του κώνου $x^2+y^2=(z-1)^2$ $(z\geq 1)$ και εντός της σφαίρας

$x^2+y^2+z^2=13$



Ισχύει

$B=\{(x,y,z):\ x^2+y^2\leq (z-1)^2,\ z\geq 1,\ x^2+y^2+z^2\leq 13\}$

Σε κυλινδρικές συντεταγμένες ~~έχουμε~~

$B=\{(r,\theta,z):\ r\leq z-1\ ,\ r^2+z^2\leq 13\}$

Άρα $1+r\leq z\leq \sqrt{13-r^2}$

Πρέπει λοιπόν

$$1+r \le \sqrt{13-r^2}$$

$$\Leftrightarrow (1+r)^2 \le 13-r^2$$

$$\Leftrightarrow r^2+r-6 \le 0$$

$$\Leftrightarrow -3 \le r \le 2$$

Άρα $0 \le r \le 2$. Συνεπώς

$$B=\{(r,\theta,z) : 0 \le r \le 2 \, , \, 1+r \le z \le \sqrt{13-r^2}\}$$

Άρα

$$\iiint_B z \, dx\,dy\,dz = \int_0^2 \int_{1+r}^{\sqrt{13-r^2}} \int_0^{2\pi} z\, r\, d\theta\, dz\, dr$$

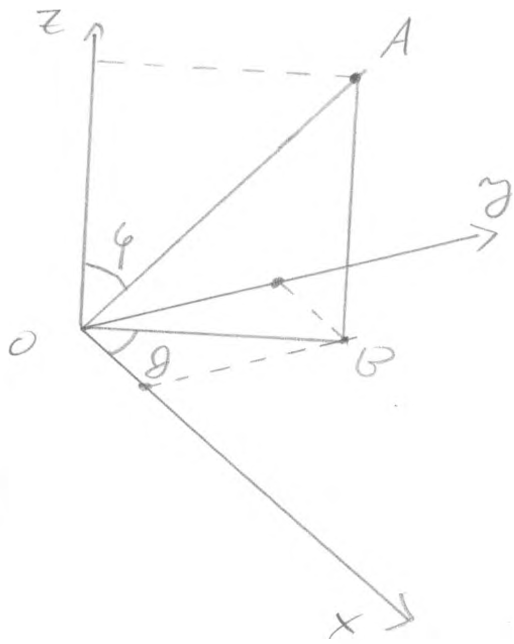
$$= 2\pi \int_0^2 r \int_{1+r}^{\sqrt{13-r^2}} z\, dz\, dr$$

$$= \pi \int_0^2 r \left[13-r^2-(1+r)^2\right] dr$$

$$= \pi \left[6r^2-\frac{2}{3}r^3-\frac{1}{2}r^4\right]_0^2$$

$$= \frac{32\pi}{3}$$

Σφαιρικός μετασχηματισμός



$A(x, y, z)$

$\rho = (x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}$

$OB = \rho \sin\varphi$

$$\begin{cases} x = \rho \sin\varphi \cos\theta \\ y = \rho \sin\varphi \sin\theta \\ z = \rho \cos\varphi \end{cases}$$

(ρ, φ, θ) : σφαιρικές συντεταγμένες

$$\boxed{\begin{array}{l} \rho \geq 0 \\ 0 \leq \varphi \leq \pi \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{array}}$$

Ιακωβιανή ορίζουσα

$$\left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\varphi,\theta)} \right| = \left| \det \begin{bmatrix} x_\rho & y_\rho & z_\rho \\ x_\varphi & y_\varphi & z_\varphi \\ x_\theta & y_\theta & z_\theta \end{bmatrix} \right|$$

$$= \left| \det \begin{bmatrix} \sin\varphi\cos\theta & \sin\varphi\sin\theta & \cos\varphi \\ \rho\cos\varphi\cos\theta & \rho\cos\varphi\sin\theta & -\rho\sin\varphi \\ -\rho\sin\varphi\sin\theta & \rho\sin\varphi\cos\theta & 0 \end{bmatrix} \right|$$

$$= \rho^2 \sin\varphi$$

Παράδειγμα Να υπολογιστεί το $\iiint_{B_r} z^2 dV$, όπου B_r η σφαίρα με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα r.

Χρησιμοποιούμε σφαιρικές συντεταγμένες

$$\iiint_{B_r} z^2 dV = \int_0^r \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (\rho\cos\varphi)^2 \rho^2 \sin\varphi \, d\theta \, d\varphi \, d\rho$$

$$= \left(\int_0^r \rho^4 d\rho\right)\left(\int_0^\pi \cos^2\varphi \sin\varphi \, d\varphi\right)\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)$$

$$= \frac{4\pi}{15} r^5$$

Παρατήρηση Ισχύει

$$\int_a^b \int_c^d \int_e^f g(x) h(y) k(z) \, dz \, dy \, dx$$

$$= \left(\int_a^b g(x) dx\right)\left(\int_c^d h(y) dy\right)\left(\int_e^f k(z) dz\right)$$

Εφαρμογές των τριπλών ολοκληρωμάτων

Κέντρο μάζας

Έστω G στερεό σώμα πυκνότητας $\rho(x,y,z)$. Η μάζα του σώματος είναι τότε

$$m = \iiint_G \rho(x,y,z)\,dV$$

Το κέντρο μάζας (x_0, y_0, z_0) δίνεται από τις σχέσεις

$$x_0 = \frac{1}{m}\iiint_G x\rho(x,y,z)\,dV$$

$$y_0 = \frac{1}{m}\iiint_G y\rho(x,y,z)\,dV, \quad z_0 = \frac{1}{m}\iiint_G z\rho(x,y,z)\,dV$$

Οι ροπές αδράνειας ως προς τους άξονες των x, y, z δίνονται αντίστοιχα από τις σχέσεις

$$I_x = \iiint_G (y^2+z^2)\rho(x,y,z)\,dV$$

$$I_y = \iiint_G (x^2+z^2)\rho(x,y,z)\,dV$$

$$I_z = \iiint_G (x^2+y^2)\rho(x,y,z)\,dV$$

Γενικευμένα διπλά/τριπλά ολοκληρώματα

Γενικευμένα (ή καταχρηστικά, ή μη-γνήσια) ονομάζονται τα διπλά ή τριπλά ολοκληρώματα όπου η ολοκληρωτέα συνάρτηση ή το πεδίο ολοκλήρωσης δεν είναι φραγμένο

Ο αυστηρός ορισμός είναι παρόμοιος με τον αντίστοιχο φισκό για συναρτήσεις μιας μεταβλητής και ο υπολογισμός γίνεται με αναγωγή σε διαδοχικά ολοκληρώματα, από τα οποία ένα τουλάχιστον είναι μη-γνήσιο.

Παράδειγμα. Να δειχθεί ότι $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$

Έχουμε

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx\right)^2 = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}dy\right)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$$

$$= \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}dA = \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} e^{-r^2}r\,d\theta\,dr$$

$$= 2\pi\int_0^{\infty} e^{-r^2}r\,dr = 2\pi\left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^{\infty} = \pi$$

Διανυσματική ανάλυση

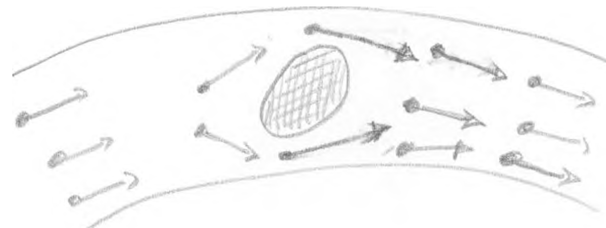
Έστω $n=2$ ή 3.

Ορισμός Μία διανυσματική συνάρτηση $\vec{F}: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ονομάζεται διανυσματικό πεδίο

Γράφουμε

$$\vec{F}=(P,Q) \quad \text{ή} \quad \vec{F}=(P,Q,R)$$

Π.χ: πεδίο δυνάμεων, πεδίο ταχυτήτων



Ορισμός Μία C^1 καμπύλη $\vec{r}: I \subset \mathbb{R} \to A$ ονομάζεται καμπύλη ροής του διανυσματικού πεδίου αν

$$\vec{r}\,'(t)=\vec{F}(\vec{r}(t)) \quad , \quad t\in I$$

Το ίχνος μιας καμπύλης ροής ονομάζεται γραμμή ροής.

<u>Παρατήρηση</u> Έστω $\vec{r}^*: J \subseteq \mathbb{R} \to A$ μια αναπαραμέτρηση της $\vec{r}$, δηλαδή

$$\vec{r}^*(s) = \vec{r}(\varphi(s))$$

όπου $\varphi: J \to I$ γνήσια αύξουσα, επί και C^1.

Τότε

$$\vec{r}^{*\prime}(s) = \vec{r}'(\varphi(s))\,\varphi'(s) = \vec{F}(\vec{r}(\varphi(s)))\,\varphi'(s)$$

$$= \vec{F}(\vec{r}^*(s))\,\varphi'(s).$$

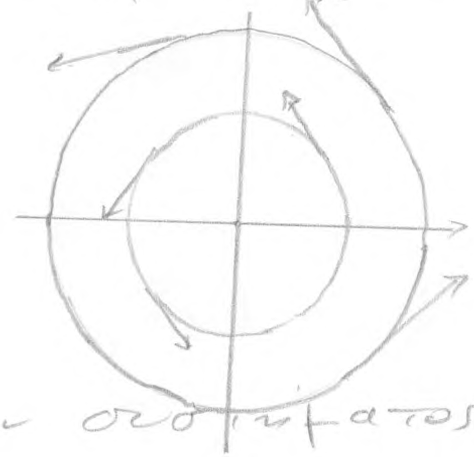
άρα η $\vec{r}^*$ δεν είναι καμπύλη ροής, εκτός αν $\varphi'(s) = 1$. Βέβαια, το (κοινό) ίχνος των $\vec{r}$, $\vec{r}^*$ είναι γραμμή ροής.

<u>Παράδειγμα</u> Να βρεθούν οι γραμμές ροής του διανυσματικού πεδίου $\vec{F}(x,y) = (-y, x)$.

Έστω $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$ μια καμπύλη ροής.

Θέλουμε

$$\vec{r}'(t) = \vec{F}(\vec{r}(t))$$



$$\iff \begin{cases} x'(t) = -y(t) \\ y'(t) = x(t) \end{cases}$$

Η γενική λύση αυτού του συστήματος είναι

$$x(t) = c\cos(t-\alpha)$$
$$y(t) = c\sin(t-\alpha) \qquad (\alpha, c \in \mathbb{R})$$

και άρα οι γραμμές ροής είναι ομόκεντροι κύκλοι με κέντρο το $(0,0)$.

<u>Ορισμός</u> (α) Η απόκλιση $\operatorname{div}\vec{F}$ ενός C' διανυσματικού πεδίου $\vec{F}: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $(n=2$ ή $3)$ ορίζεται ως

$$\operatorname{div}\vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}, \quad \text{αν } n=2,\ \vec{F}=(P,Q)$$

$$\operatorname{div}\vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}, \quad \text{αν } n=3,\ \vec{F}=(P,Q,R)$$

(β) Ο στροβιλισμός $\operatorname{curl}\vec{F}$ ενός C' διανυσματικού $\vec{F}: A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ορίζεται ως

$$\operatorname{curl}\vec{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z},\ \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x},\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

Γράφουμε επίσης $\operatorname{div}\vec{F} = \nabla\cdot\vec{F}$, $\operatorname{curl}\vec{F} = \nabla\times\vec{F}$.

<u>Παρατήρηση</u> Ισχύει συμβολικά η σχέση

$$\nabla\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

(ανάλογο του $\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$)

<u>Πρόταση</u> Έστω $\vec{F}, \vec{G}$ C^1 διανυσματικά πεδία, h C^1 συνάρτηση και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Ισχύουν τα εξής:

(i) $\operatorname{div}(\lambda\vec{F}+\mu\vec{G}) = \lambda \operatorname{div}\vec{F} + \mu \operatorname{div}\vec{G}$

(ii) $\operatorname{div}(h\vec{F}) = h \operatorname{div}\vec{F} + \nabla h \cdot \vec{F}$

(iii) $\operatorname{curl}(\lambda\vec{F}+\mu\vec{G}) = \lambda \operatorname{curl}\vec{F} + \mu \operatorname{curl}\vec{G}$

(iv) $\operatorname{curl}(h\vec{F}) = h \operatorname{curl}\vec{F} + \nabla h \times \vec{F}$

Απόδειξη: Άσκηση

<u>Ορισμός</u> Έστω $f: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ($n=2$ ή 3) μία C^2 συνάρτηση. Η συνάρτηση

$$\Delta f = f_{xx} + f_{yy}, \quad \text{αν } n=2$$

ή

$$\Delta f = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}, \quad \text{αν } n=3$$

ονομάζεται Λαπλασιανή της συνάρτησης f.

Γράφουμε επίσης $\Delta f = \nabla \cdot \nabla f = \nabla^2 f$.

<u>Παρατήρηση</u> Ισχύει $\Delta f = \operatorname{div} \nabla f$

<u>Ορισμός</u> Μία C^2 συνάρτηση f λέγεται αρμονική αν $\Delta f = 0$.

<u>Πρόταση</u> Έστω f C^2 συνάρτηση και $\vec{F}$ C^2 διανυσματικό πεδίο στο $A \subseteq \mathbb{R}^3$.
Ισχύει:

(i) $\text{curl}\, \nabla f = \vec{0}$

(ii) $\text{div}\, \text{curl}\, \vec{F} = 0$

(iii) $\text{curl}\, \text{curl}\, \vec{F} = \nabla \text{div}\, \vec{F} - \Delta \vec{F}$

(όπου $\Delta \vec{F} = (\Delta P, \Delta Q, \Delta R)$)

<u>Απόδειξη</u> Απλές πράξεις. Για παράδειγμα, η πρώτη συνιστώσα του $\text{curl}\, \nabla f$ είναι

$$\frac{\partial}{\partial y} f_z - \frac{\partial}{\partial z} f_y = f_{zy} - f_{yz} = 0$$

<u>Ορισμός</u> Ένα διανυσματικό πεδίο $\vec{F}: A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ $(n = 2 \text{ ή } 3)$ ονομάζεται συντηρητικό αν υπάρχει C^1 συνάρτηση $\varphi: A \longrightarrow \mathbb{R}$ ώστε $\vec{F} = \nabla \varphi$.
Η συνάρτηση $V = -\varphi$ ονομάζεται δυναμικό ή δυναμική ενέργεια του πεδίου $\vec{F}$.

<u>Παράδειγμα</u> Το βαρυτικό πεδίο

$$\vec{F}(\vec{r}) = -Mmg \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|^3}, \quad \vec{r} = (x, y, z)$$

είναι συντηρητικό με δυναμική ενέργεια

$$V(\vec{r}) = -Mmg \frac{1}{\|\vec{r}\|} \quad (+c)$$

Ορισμός Ένα διανυσματικό πεδίο $\vec{F}$ λέγεται Νευτώνειο αν $\exists\, m > 0$ ώστε για κάθε C^2 καμπύλη $\vec{r}(t)$, $t \in I$, να ισχύει

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) = m\,\ddot{\vec{r}}(t), \quad t \in I$$

Πρόταση (αρχή διατήρησης της ενέργειας)
Έστω $\vec{F} : A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ Νευτώνειο συντηρητικό πεδίο με δυναμική ενέργεια $V(\vec{r})$. Για κάθε C^2 καμπύλη $\vec{r}(t)$, $t \in I$, στο A ισχύει

$$\frac{1}{2} m \|\dot{\vec{r}}(t)\|^2 + V(\vec{r}(t)) = \text{σταθ.}$$

Απόδειξη Θα χρησιμοποιήσουμε τη χρήσιμη σχέση

$$\frac{d}{dt}\|\vec{x}(t)\|^2 = 2\,\vec{x}(t)\cdot\dot{\vec{x}}(t)$$

Έχουμε

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m \|\dot{\vec{r}}(t)\|^2 + V(\vec{r}(t))\right)$$

$$= m\,\dot{\vec{r}}(t)\cdot\ddot{\vec{r}}(t) + \nabla V(\vec{r}(t))\cdot\dot{\vec{r}}(t)$$

$$= \left(m\,\ddot{\vec{r}}(t) - \vec{F}(\vec{r}(t))\right)\cdot\dot{\vec{r}}(t)$$

$$= 0$$

άρα ισχύει το ζητούμενο.

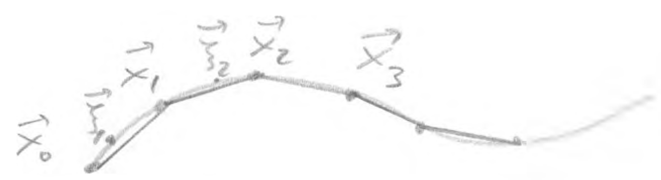
Επικαμπύλια ολοκληρώματα

Ορισμός (επικαμπύλιο ολοκλήρωμα α' είδους)
Έστω $f: A \subset \mathbb{R}^m$ συνεχής και $\vec{\gamma}: [a,b] \to A$
μία C^1 (ή τμηματικά C^1) καμπύλη.
Το ολοκλήρωμα

$$\int_{\vec{\gamma}} f\,ds = \int_a^b f(\vec{\gamma}(t))\,\|\vec{\gamma}'(t)\|\,dt \qquad \begin{pmatrix} ds = \\ \text{στοιχειώδες} \\ \text{μήκος} \end{pmatrix}$$

ονομάζεται επικαμπύλιο ολοκλήρωμα α' είδους
της f κατά μήκος της καμπύλης $\vec{\gamma}$

Παρατήρηση (α) Το $\int_{\vec{\gamma}} f\,ds$ μπορεί εναλλακτικά
να οριστεί ως όριο αθροισμάτων Riemann



$a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$

$\tau_j \in [t_{j-1}, t_j]$

$\vec{x}_j = \vec{\gamma}(t_j)\,,\ \vec{\xi}_j = \vec{\gamma}(\tau_j)$

$$\int_{\vec{\gamma}} f\,ds = \lim \sum_{j=1}^{k} f(\vec{\gamma}(\tau_j))\,\|\vec{x}_j - \vec{x}_{j-1}\|$$

(β) Το $\int_{\gamma} ds$ είναι το $\ell(\gamma)$, το μήκος
της καμπύλης $\vec{\gamma}$

Πρόταση Το $\int_{\vec{\gamma}} f\,ds$ δεν αλλάζει αν η $\vec{\gamma}$ αντικατασταθεί από κάποια αναπαραμέτρησή της, ίδιας ή αντίθετης φοράς.

Απόδειξη Έστω $\vec{\gamma}(t):[a,b]\to\mathbb{R}^n$ και $\vec{\sigma}(\tau):[c,d]\to\mathbb{R}^n$ αναπαραμέτρηση της $\vec{\gamma}$. Υπάρχει λοιπόν $\varphi:[a,b]\to[c,d]$ γνησίως αύξουσα, 1-1 και επί, διαφορίσιμη, ώστε

$$\vec{\gamma}(t)=\vec{\sigma}(\varphi(t)), \quad t\in[a,b].$$

Άρα

$$\int_{\vec{\sigma}} f\,ds = \int_c^d f(\vec{\sigma}(\tau))\,\|\vec{\sigma}'(\tau)\|\,d\tau$$

$$(\tau=\varphi(t)) \quad = \int_a^b f(\vec{\sigma}(\varphi(t)))\,\|\vec{\sigma}'(\varphi(t))\|\,\varphi'(t)\,dt$$

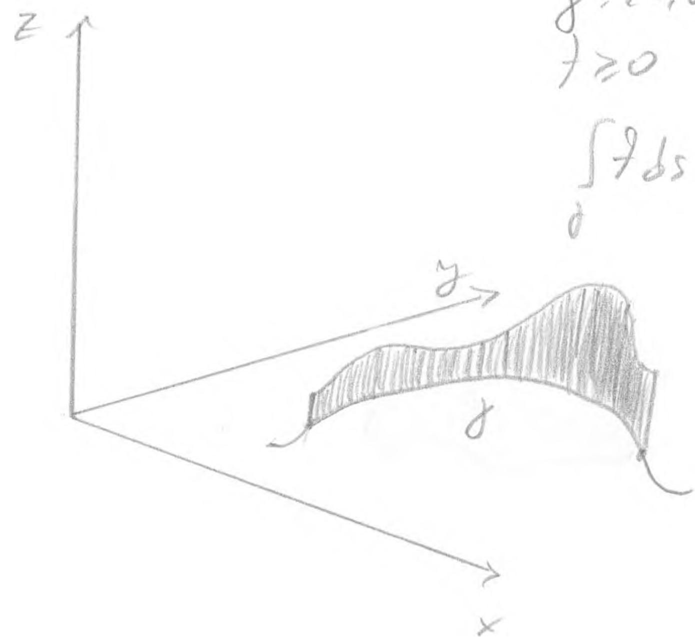
$$= \int_a^b f(\vec{\sigma}(\varphi(t)))\,\left\|\frac{d}{dt}\vec{\sigma}(\varphi(t))\right\|\,dt$$

$$= \int_a^b f(\vec{\gamma}(t))\,\|\vec{\gamma}'(t)\|\,dt$$

$$= \int_{\vec{\gamma}} f\,ds$$

Παρατήρηση Το αποτέλεσμα επίσης παραμένει το ίδιο αν η φ είναι γνησίως φθίνουσα, δηλαδή αν αλλάξει η φορά με την οποία διατρέχουμε το ίχνος της καμπύλης.

Γεωμετρική ερμηνεία:



$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$

$f \geq 0$

$\int_\gamma f\,ds$ = εμβαδόν του "φράχτη"

<u>Παράδειγμα</u> Να υπολογιστεί το $\int_\gamma xy\,ds$ όπου γ το τμήμα της $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ στο α' τεταρτημόριο.
Μια παραμέτρηση της καμπύλης είναι η

$$\gamma(\theta) = (a\cos\theta,\ b\sin\theta), \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

Άρα

$$\int_\gamma xy\,ds = ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \sin\theta \sqrt{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta}\,d\theta$$

$$= \frac{ab}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2\theta)' \sqrt{b^2 + (a^2-b^2)\sin^2\theta}\,d\theta$$

$$= \frac{ab}{3(a^2-b^2)} \left(b^2 + (a^2-b^2)\sin^2\theta\right)^{\frac{3}{2}} \Bigg|_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{ab(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)}$$

Πρόταση: Έστω $f, g : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις και $\vec{\gamma} : [a, b] \to A$ μία C^1 καμπύλη. Έχουμε

(1) $$\int_{\vec{\gamma}} (\lambda f + \mu g)\,ds = \lambda \int_{\vec{\gamma}} f\,ds + \mu \int_{\vec{\gamma}} g\,ds$$

(2) $$\left| \int_{\vec{\gamma}} f\,ds \right| \le \int_{\vec{\gamma}} |f|\,ds$$

Ειδικότερα, αν $|f(\vec{x})| \le M$, τότε

$$\left| \int_{\vec{\gamma}} f\,ds \right| \le M\,\ell(\vec{\gamma})$$

Πρόταση: Έστω ότι η συνάρτηση $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ δίνεται σε πολικές συντεταγμένες, $f = f(r, \theta)$, και ότι καμπύλη $\vec{\gamma}$ επίσης περιγράφεται σε πολικές συντεταγμένες, $r = r(\theta)$, $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$. Τότε

$$\int_{\gamma} f\,ds = \int_{\theta_1}^{\theta_2} f(r(\theta), \theta) \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$$

Απόδειξη Έχουμε

$$\vec{\gamma}(\theta) = (r(\theta)\cos\theta,\ r(\theta)\sin\theta), \quad \theta \in [\theta_1, \theta_2]$$

Άρα

$$\vec{\gamma}'(\theta) = (r'(\theta)\cos\theta - r(\theta)\sin\theta,\ r'(\theta)\sin\theta + r(\theta)\cos\theta)$$

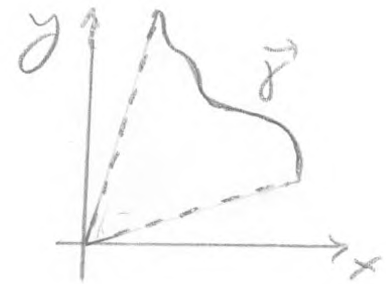
και συνεπώς

$$\|\vec{\gamma}'(\theta)\|^2 = r'(\theta)^2 + r(\theta)^2$$

Έπεται ότι

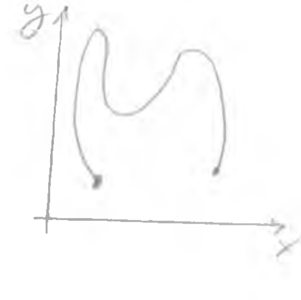
$$\int_{\vec{\gamma}} f\,ds = \int_{\theta_1}^{\theta_2} f(r(\theta), \theta)\, \|\vec{\gamma}'(\theta)\|\, d\theta$$

$$= \int_{\theta_1}^{\theta_2} f(r(\theta), \theta) \sqrt{r(\theta)^2 + r'(\theta)^2}\, d\theta$$



Παρατήρηση Γενικότερα, αν έχουμε την καμπύλη $(r(t), \theta(t))$, $t_1 \le t \le t_2$, τότε

$$\int_{\gamma} f\,ds = \int_{t_1}^{t_2} f(r(t), \theta(t)) \sqrt{r'(t)^2 + r(t)^2 \theta'(t)^2}\, dt$$



Ορισμός: Ο αριθμός

$$\frac{1}{\ell(\vec{\gamma})} \int_{\vec{\gamma}} f \, ds$$

ονομάζεται μέση τιμή της συνάρτησης f κατά μήκος της καμπύλης $\vec{\gamma}$.

Εφαρμογή: Έστω ότι η απλή ($\Leftrightarrow$ δεν αυτοτέμνεται) καμπύλη $\vec{\gamma}$ έχει στο σημείο (x,y) (ή (x,y,z)) του ίχνους της πυκνότητα $\rho(x,y)$ (ή $\rho(x,y,z)$). Τότε η ολική μάζα είναι

$$m = \int_{\vec{\gamma}} \rho(x,y) \, ds \qquad (\text{ή } \rho(x,y,z))$$

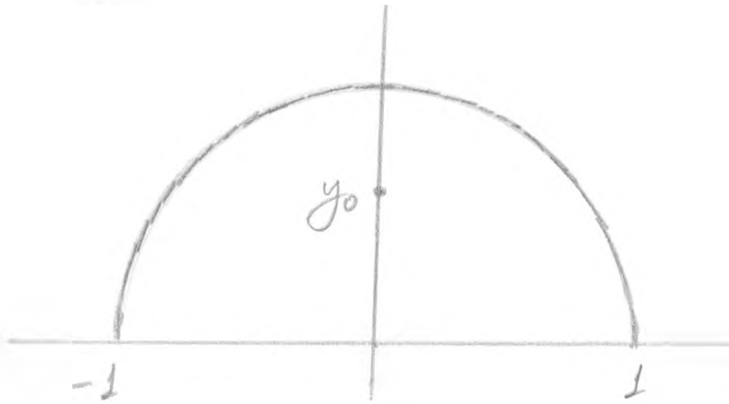
και το κέντρο μάζας είναι το σημείο με συντεταγμένες

$$x_0 = \frac{1}{m} \int_{\vec{\gamma}} x \rho(x,y) \, ds$$

$$y_0 = \frac{1}{m} \int_{\vec{\gamma}} y \rho(x,y) \, ds$$

$$\left(z_0 = \frac{1}{m} \int_{\vec{\gamma}} z \rho(x,y,z) \, ds \right).$$

Παράδειγμα Να βρεθεί το κέντρο μάζας ομογενούς ημικυκλίου



Υποθέτουμε ότι $\rho=1$. Άρα $m=\pi$.

Έχουμε $\vec{\gamma}(\theta)=(\cos\theta, \sin\theta)$, $0\leq\theta\leq\pi$. Άρα

$$y_0 = \frac{1}{\pi}\int_{\vec{\gamma}} y\, ds$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin\theta \underbrace{\|\vec{\gamma}\,'(\theta)\|}_{=1} d\theta$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\cos\theta\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{2}{\pi}.$$

<u>Ορισμός</u> (επικαμπύλιο ολοκλήρωμα β΄ είδους) Έστω $\vec{F}: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ($n=2$ ή 3) ένα συνεχές διανυσματικό πεδίο και $\vec{r}:[a,b] \to A$ μία C^1 (ή τμηματικά C^1) καμπύλη. Το ολοκλήρωμα

$$\int_{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)\,dt$$

ονομάζεται επικαμπύλιο ολοκλήρωμα β΄ είδους της f

Έστω $n=3$ (ανάλογα ισχύουν για $n=2$), $\vec{F}=(P,Q,R)$, $\vec{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))$. Έχουμε

$$\int_{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b (P,Q,R) \cdot \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right) dt$$

$$= \int_a^b \left(P\frac{dx}{dt} + Q\frac{dy}{dt} + R\frac{dz}{dt}\right) dt$$

Για το λόγο αυτό συμβολίζουμε επίσης

$$\int_{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}} P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

Πρόταση Το $\int_{\vec r} \vec F\cdot d\vec r$ παραμένει το ίδιο αν η καμπύλη $\vec r$ αντικατασταθεί από κάποια αναπαραμέτρηση ίδιας φοράς, ενώ αλλάζει πρόσημο αν αντικατασταθεί από κάποια αναπαραμέτρηση αντίθετης φοράς.

Απόδειξη Παρόμοια με αυτήν της σελ 63.

Παρατήρηση (φυσική ερμηνεία). Το $\int_{\vec r} \vec F\cdot d\vec r$ ισούται με το έργο που παράγει η δύναμη $\vec F$ καθώς μετακινείται το σημείο εφαρμογής της κατά μήκος της καμπύλης $\vec r$.

Πρόταση Έστω $\vec F, \vec G : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ συνεχή διανυσματικά πεδία και $\vec r : [a,b] \to A$ μία C' καμπύλη. Έχουμε

(1). $$\int_{\vec r} (\lambda \vec F + \mu \vec G)\cdot d\vec r = \lambda \int_{\vec r} \vec F\cdot d\vec r + \mu \int_{\vec r} \vec G\cdot d\vec r$$

(2) $$\left| \int_{\vec r} \vec F\cdot d\vec r \right| \leq \int_{\vec r} |\vec F|\, ds$$

Ειδικότερα, αν $|\vec F| \leq M$, τότε

$$\left| \int_{\vec r} \vec F\cdot d\vec r \right| \leq M\, \ell(\vec r)$$

<u>Παρατήρηση</u> Ο υπολογισμός ενός επικαμπύλιου ολοκληρώματος είναι γενικά πιο εύκολος από τον υπολογισμό ενός διπλού ή τριπλού ολοκληρώματος, καθώς ανάγεται στον υπολογισμό ενός ολοκληρώματος συνάρτησης μιας μεταβλητής.

<u>Παράδειγμα</u> Να υπολογιστεί το $\int_{\vec{\sigma}} yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz$ όπου $\vec{\sigma}(t) = (t, t^2, t^3)$, $t \in [1, 2]$.

Έχουμε

$$I = \int_1^2 \left(t^2 \cdot t^3 \frac{dt}{dt} + t \cdot t^3 \frac{dt^2}{dt} + t \cdot t^2 \frac{dt^3}{dt} \right) dt$$

$$= \int_1^2 (t^5 + 2t^5 + 3t^5)\, dt$$

$$= t^6 \Big|_1^2$$

$$= 63$$

<u>Πρόταση</u> Έστω $f: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ($n=2$ ή 3) μία C^1 συνάρτηση και $\vec{r}: [a,b] \to A$ μία C^1 (ή τμηματικά C^1) καμπύλη. Ισχύει

$$\int_{\vec{r}} \nabla f \cdot d\vec{r} = f(\vec{r}(b)) - f(\vec{r}(a))$$

<u>Απόδειξη</u> Έχουμε

$$\int_{\vec{r}} \nabla f \cdot d\vec{r} = \int_a^b \nabla f(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)\, dt$$

$$= \int_a^b \frac{d}{dt} f(\vec{r}(t))\, dt$$

$$= f(\vec{r}(b)) - f(\vec{r}(a))$$

<u>Παρατήρηση</u> Άρα λοιπόν το ολοκλήρωμα ενός συντηρητικού πεδίου (πεδίου κλίσεων) εξαρτάται μόνο από τα άκρα του δρόμου ολοκλήρωσης ("είναι ανεξάρτητο του δρόμου")

Ορισμός Μια καμπύλη $\vec{r}:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ λέγεται

(i) κλειστή, αν $\vec{r}(a)=\vec{r}(b)$

(ii) απλή, αν

$$\left[t_1,t_2\in[a,b],\ \vec{r}(t_1)=\vec{r}(t_2)\right]\Longrightarrow t_1=t_2$$

$$\text{ή } \{t_1,t_2\}=\{a,b\}$$

απλή, όχι κλειστή

απλή κλειστή

κλειστή, όχι απλή

όχι απλή, όχι κλειστή

Παρατήρηση Κάθε απλή κλειστή καμπύλη $\vec{\gamma}$ στον $\mathbb{R}^2$ χωρίζει το $\mathbb{R}^2\setminus$ ίχνος$(\vec{\gamma})$ σε δύο ανοικτά, συνεκτικά σύνολα, ένα φραγμένο και ένα μη-φραγμένο, που συμβολίζονται με $\mathrm{int}(\vec{\gamma})$ και $\mathrm{ext}(\vec{\gamma})$ αντίστοιχα.

$\mathrm{ext}(\vec{\gamma})$

<u>Θεώρημα</u> Έστω $\vec{F}: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $(n=2,3)$ συνεχές δ.π. όπου A ανοικτό, κατά δρόμους συνεκτικό. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(1) για κάθε C^1 (ή τμηματικά C^1) καμπύλη $\vec{r}:[a,b] \to A$ το ολοκλήρωμα $\int_{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ εξαρτάται μόνο από τα άκρα $\vec{r}(a)$, $\vec{r}(b)$

(2) για κάθε C^1 (ή τμηματικά C^1) κλειστή καμπύλη $\vec{r}:[a,b] \to A$ ισχύει $\int_{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$

(3) Το $\vec{F}$ είναι συντηρητικό, δηλαδή υπάρχει C^1 συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ ώστε $\vec{F} = \nabla f$.

<u>Απόδειξη</u> $(3) \Rightarrow (2)$ Έπεται άμεσα από την πρόταση της σελ 73.

$(2) \Rightarrow (1)$ Έστω

$$\vec{r}:[a,b] \to A$$
$$\vec{\sigma}:[c,d] \to A$$

δύο τμηματικά C^1 καμπύλες με

$$\vec{r}(a) = \vec{\sigma}(c), \quad \vec{r}(b) = \vec{\sigma}(d)$$

Χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτουμε ότι $[a,b]=[c,d]=[0,1]$. Ορίζουμε

$$\vec{\gamma}:[0,2]\to A, \quad \vec{\gamma}(t)=\begin{cases}\vec{r}(t), & \text{αν } 0\le t\le 1\\ \vec{\sigma}(2-t), & \text{αν } 1\le t\le 2.\end{cases}$$

Η $\vec{\gamma}$ είναι κλειστή, τμηματικά C^1 καμπύλη. Άρα, από την υπόθεση

$$\int_{\vec{\gamma}} \vec{F}\cdot d\vec{\gamma} = 0$$

Όμως

$$\int_{\vec{\gamma}} \vec{F}\cdot d\vec{\gamma} = \int_{\vec{r}} \vec{F}\cdot d\vec{r} - \int_{\vec{\sigma}} \vec{F}\cdot d\vec{\sigma},$$

και άρα $\int_{\vec{r}} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{\vec{\sigma}} \vec{F}\cdot d\vec{\sigma}$.

(1) $\Longrightarrow$ (3). (Θεωρούμε $n=2$, παρόμοια είναι η απόδειξη αν $n=3$). Έστω $\vec{F}=(P,Q)$. Θεωρούμε σταθερό σημείο (x_0,y_0). Ορίζουμε μία συνάρτηση

$$f: A \longrightarrow \mathbb{R}$$

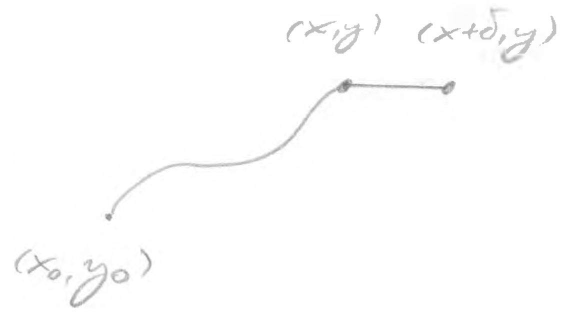
από τη σχέση

$$f(x,y) = \int_{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

όπου $\vec{r}$ είναι μία C^1 καμπύλη με αρχή το (x_0,y_0) και τέλος το (x,y). Λόγω της υπόθεσης 1) η f είναι καλά ορισμένη.

Θα δείξουμε ότι $\frac{\partial f}{\partial x} = P$. Παρόμοια θα έχουμε ότι $\frac{\partial f}{\partial y} = Q$, οπότε η f θα είναι C^1 με $\nabla f = (P,Q) = \vec{F}$.

Έστω $(x,y) \in A$ και $\delta > 0$ αρκετά μικρό ώστε $B_\delta(x,y) \subset A$.



Ισχύει τότε

$$f(x+\delta,y) - f(x,y) = \int_{\vec{\sigma}_\delta} \vec{F} \cdot d\vec{\sigma}_\delta$$

όπου $\vec{\sigma}_\delta$ το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα (x,y), $(x+\delta,y)$

$$\vec{\sigma}_\delta(t) = (x+t\delta, y) \quad , \quad t \in [0,1]$$

Έχουμε

$$\int_{\vec{\sigma}_\delta} \vec{F}\cdot d\vec{\sigma}_\delta = \int_0^1 (P, Q)\cdot \vec{\sigma}_\delta{}' dt$$

$$= \delta \int_0^1 P(x+t\delta, y)\, dt$$

Άρα

$$\frac{f(x+\delta, y) - f(x,y)}{\delta} - P(x,y)$$

$$= \int_0^1 P(x+t\delta, y)\, dt - P(x,y)$$

$$= \int_0^1 \big(P(x+t\delta, y) - P(x,y)\big)\, dt$$

$$\xrightarrow[\delta\to 0]{} 0$$

Άρα πράγματι $\frac{\partial f}{\partial x} = P$.

<u>Παρατήρηση</u> Αν ισχύουν οι τρεις ιδιότητες του παραπάνω θεωρήματος, τότε για δύο σημεία $\theta_1, \theta_2 \in A$ γράφουμε συχνά

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

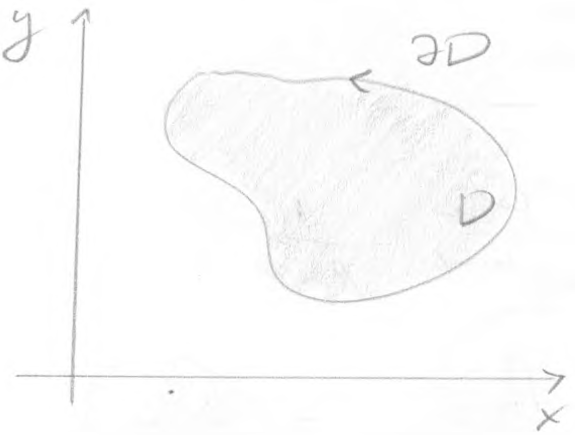
για το ολοκλήρωμα κατά μήκος μιας (οποιασδήποτε) C' καμπύλης με αρχή θ_1 και τέλος θ_2.

<u>Θεώρημα</u> (τύπος του Green) Έστω $P, Q : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (A ανοικτό) C^1 συναρτήσεις. Έστω γ απλή, κλειστή, τμηματικά C^1 καμπύλη με $\text{ιχν}(\gamma) \cup \text{int}(\gamma) \subset A$. Ισχύει τότε

$$\int_\gamma P\,dx + Q\,dy = \iint_{\text{int}(\gamma)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy$$

$$\left(\text{ή} \quad \int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy \right)$$

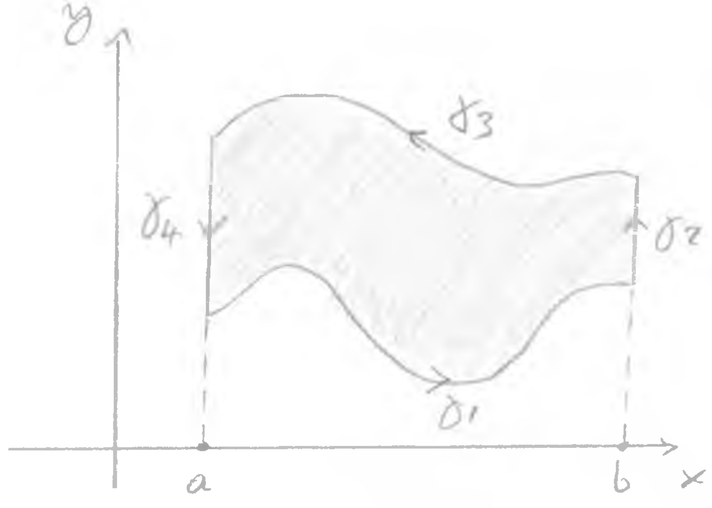
όπου $D = \text{int}(\gamma)$.



<u>Απόδειξη</u> (για χωρία D που είναι και x-απλά και y-απλά)

Αρκεί να αποδείξουμε ότι αν το D είναι x-απλό τότε

$$\int_{\partial D} P\,dx = -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy.$$



Υποθέτουμε λοιπόν ότι

$$D = \{(x,y) : a \le x \le b \ , \ g(x) \le y \le h(x)\}$$

όπου $g, h : [a,b] \to \mathbb{R}$ C^1 συναρτήσεις.

Έχουμε

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\,dy\,dx$$

$$= \int_a^b \big(P(x, h(x)) - P(x, g(x)) \big)\,dx$$

Επίσης έχουμε

$$\int_{\partial D} P\,dx = \int_{\gamma_1} P\,dx + \int_{\gamma_2} P\,dx + \int_{\gamma_3} P\,dx + \int_{\gamma_4} P\,dx$$

Μια παραμέτρηση της γ_2 είναι η

$$\gamma_2(t) = (b, t), \quad t \in [g(b), h(b)],$$

άρα $\gamma_2'(t) = (0,1)$ και συνεπώς

$$\int_{\gamma_2} P\,dx = \int_{g(b)}^{h(b)} P(b,t) \cdot 0 \, dt = 0$$

Παρόμοια βρίσκουμε ότι $\int_{\gamma_4} P\,dx = 0$.

Μια παραμέτρηση της γ_1 είναι η

$$\gamma_1(t) = (t, g(t)), \quad a \leq t \leq b$$

Άρα $\gamma_1'(t) = (1, g'(t))$, και συνεπώς

$$\int_{\gamma_1} P\,dx = \int_a^b P(t, g(t))\,dt$$

Παρόμοια βρίσκουμε

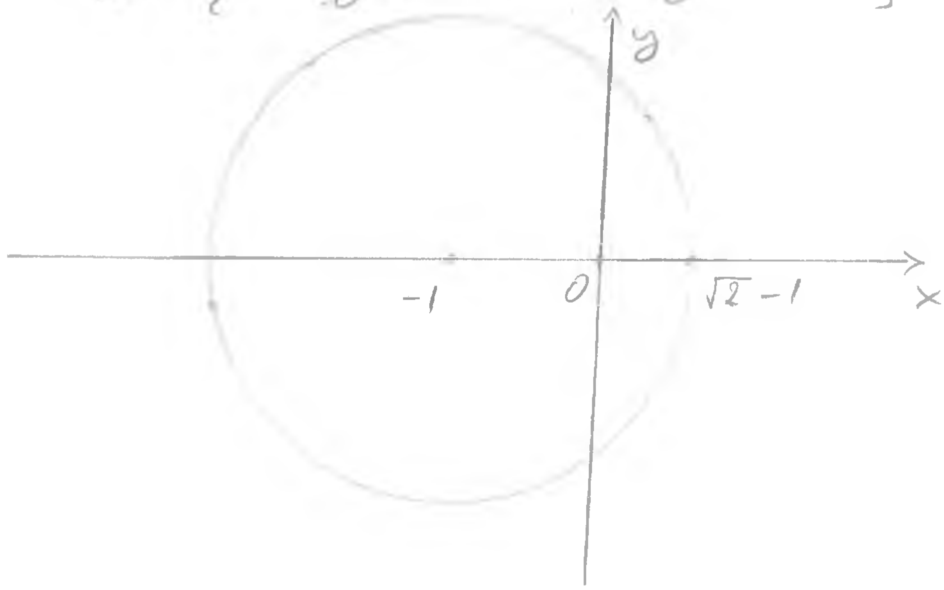
$$\int_{\gamma_3} P\,dx = -\int_a^b P(t, h(t))\,dt$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω προκύπτει το ζητούμενο.

<u>Παράδειγμα</u> Να υπολογιστεί το

$$\int_{\partial D} (\underbrace{2x^4+y^2+e^x}_{P})\,dx + (\underbrace{3x-y^3-e^{y^2}}_{Q})\,dy$$

όπου $D=\{(x,y): (x+1)^2+y^2<2\}$



Παραμέτρηση του D:

$$\gamma(t)=(-1+\sqrt{2}\cos t,\ \sqrt{2}\sin t),\quad 0\le t\le 2\pi.$$

→ με χρήση του ορισμού εξαιρετικά δύσκολο.

Με τύπο Green:

$$I=\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy$$

$$=\iint_D (3-2y)\,dx\,dy = 3\,\varepsilon\mu(D) - 2\underbrace{\iint_D y\,dx\,dy}_{\substack{0 \\ \text{λόγω συμμετρίας}}}$$

$$=3\,\varepsilon\mu(D)$$

$$=6\pi$$

Ερώτημα Πώς μπορούμε να διαπιστώσουμε αν ένα διανυσματικό πεδίο είναι συντηρητικό;

Το Θεώρημα της σελ 75 μας δίνει ένα κριτήριο, το οποίο όμως δεν είναι εύχρηστο στην πράξη.

Για να πούμε περισσότερα είναι σκόπιμο να διαχωρίσουμε τις περιπτώσεις $n=2$ και $n=3$

Η περίπτωση $n=2$.

Έστω $\vec{F}=(P,Q): A\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ ένα C^1 διανυσματικό πεδίο.

Εξ ορισμού, αν το $\vec{F}$ είναι συντηρητικό τότε υπάρχει C^1 συνάρτηση $\varphi: A\to\mathbb{R}$ ώστε

$$\varphi_x = P \quad , \quad \varphi_y = Q.$$

Άρα η φ είναι C^2 και

$$P_y = \varphi_{xy} = \varphi_{yx} = Q_x.$$

Άρα

Πρόταση Αν το C^1 διανυσματικό πεδίο $\vec{F}: A\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $\vec{F}=(P,Q)$, είναι συντηρητικό τότε $P_y = Q_x$.

Ερώτημα: ισχύει το αντίστροφο;

Κάποια ορολογία:

- Το $Pdx + Qdy$ ονομάζεται διαφορικό
- Το διαφορικό $Pdx + Qdy$ λέγεται
  (i) κλειστό, αν $P_y = Q_x$
  (ii) ακριβές, αν υπάρχει συνάρτηση f ώστε $f_x = P$, $f_y = Q$.

<u>Παράδειγμα</u> Έστω το ολοκλήρωμα

$$\int_{S(1)} \underbrace{\frac{-y}{x^2+y^2}}_{P} dx + \underbrace{\frac{x}{x^2+y^2}}_{Q} dy$$

$[P, Q \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})]$

Ισχύει

$$P_y = \frac{-(x^2+y^2)-(-y)\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$Q_x = \frac{x^2+y^2-x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Άρα $P_y = Q_x$, δηλαδή το αντίστοιχο διαφορικό είναι κλειστό.

Υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα.

Μία παραμέτρηση είναι η

$$\vec{\gamma}(t) = (\cos t, \sin t) \quad , \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Άρα

$$I = \int_0^{2\pi} \left(\frac{-\sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t} (\cos t)' + \frac{\cos t}{\cos^2 t + \sin^2 t} (\sin t)' \right) dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = 2\pi.$$

Έπεται ότι το διανυσματικό πεδίο δεν είναι συντηρητικό, δηλαδή το αντίστοιχο διαφορικό δεν είναι ακριβές.

<u>Ορισμός</u> Ένα ανοικτό, κατά τόξα συνεκτικό σύνολο $A \subset \mathbb{R}^2$ λέγεται απλά συνεκτικό αν κάθε απλή κλειστή καμπύλη στο A μπορεί κατά συνεχή τρόπο να συρρικνωθεί σε κάποιο σημείο του A, παραμένοντας συνέχεια εντός του A.

Πιο απλά: "αν δεν έχει τρύπες"

<u>Παράδειγμα</u>. Το $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ δεν είναι απλά συνεκτικό.

<u>Πρόταση.</u> Έστω $A \subset \mathbb{R}^2$ απλά συνεκτικό και $P, Q : A \to \mathbb{R}$ C^1 συναρτήσεις. Αν το διαφορικό $Pdx + Qdy$ είναι κλειστό τότε είναι ακριβές.

Όταν μια διαφορική μορφή είναι ακριβής, δηλαδή έχει τη μορφή $f_x dx + f_y dy$, τότε το ολοκλήρωμα είναι ανεξάρτητο του δρόμου και δίνεται από τη σχέση (βλ. σελ 73)

$$\int_A^B f_x\,dx + f_y\,dy = f(B) - f(A)$$

Αν ξέρουμε ότι η διαφορική μορφή $Pdx + Qdy$ είναι ακριβής, τότε μια συνάρτηση f τέτοια ώστε $f_x = P$, $f_y = Q$ βρίσκεται με απλή ολοκλήρωση. Η f είναι μοναδική μέχρι προσθετικής σταθεράς.

Παράδειγμα Να υπολογιστεί το έργο που παράγει η δύναμη

$$\vec{F} = (x + e^{-2y}\sin x,\ 2e^{-2y}\cos x + 2e^{2y})$$

καθώς μετακινεί το σημείο εφαρμογής της κατά μήκος της καμπύλης $y = \cos^3 x$, $x \in [0, \pi]$.

Πρέπει να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα

$$\int_\gamma \underbrace{(x + e^{-2y}\sin x)}_{P}dx + \underbrace{(2e^{-2y}\cos x + 2e^{2y})}_{Q}dy$$

όπου $\gamma(t) = (t, \cos^3 t)$, $0 \le t \le \pi$.

Ο απευθείας υπολογισμός του ολοκληρώματος είναι πολύ δύσκολος. Ελέγχουμε αν το διανυσματικό πεδίο (P, Q) είναι συντηρητικό. Έχουμε

$$P_y = -2e^{-2y}\sin x = Q_x$$

Επειδή το (P, Q) είναι ορισμένο σε απλά συνεκτικό σύνολο, έπεται ότι το πεδίο είναι συντηρητικό.

Ζητούμε $\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ώστε $\varphi_x = P$, $\varphi_y = Q$. Ολοκληρώνουμε (αόριστα ολοκληρώματα):

$$\varphi(x,y) = \int \varphi_x \, dx = \int P(x,y)\, dx$$

$$= \int (x + e^{-2y}\sin x)\, dx$$

$$= \frac{x^2}{2} - e^{-2y}\cos x + h_1(y) \qquad (*)$$

Παρόμοια

$$\varphi(x,y) = \int \varphi_y \, dy = \int Q(x,y)\, dy$$

$$= \int (2e^{-2y}\cos x + 2e^{2y})\, dy$$

$$= -e^{-2y}\cos x + e^{2y} + h_2(x)$$

Εξισώνουμε:

$$\frac{x^2}{2} - \cancel{e^{-2y}\cos x} + h_1(y) = -\cancel{e^{-2y}\cos x} + e^{2y} + h_2(x)$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{x^2}{2} - h_2(x) = e^{2y} - h_1(y)$$

Έπεται ότι

$$\frac{x^2}{2} - h_2(x) = e^{2y} - h_1(y) = \text{σταθ.}$$

Άρα $h_1(y) = e^{2y} + c$

και συνεπώς

$$\varphi(x,y) = \frac{x^2}{2} - e^{-2y}\cos x + e^{2y} + c$$

(Εναλλακτικά, αντί να ολοκληρώσουμε δεύτερη φορά, μπορούμε να παραγωγίσουμε την (*) ως προς y.)

Η καμπύλη έχει αρχή το σημείο $A = \gamma(0) = (0,1)$ και τέλος το $B = \gamma(\pi) = (\pi,-1)$

Άρα

$$I = \int_\gamma \nabla\varphi \cdot d\vec{r} = \int_A^B \nabla\varphi \cdot d\vec{r}$$

$$= \varphi(B) - \varphi(A) =$$

$$= -e^{-2} + e^{2} + c - \left(\frac{1}{2} - e^{2}\cdot(-1) + e^{-2} + c\right)$$

$$= -\frac{2}{e^2} - \frac{1}{2}$$

Η περίπτωση $n=3$

Έστω $\vec{F}=(P,Q,R): A\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ ένα C^1 διανυσματικό πεδίο.

Έστω ακόμη ότι το $\vec{F}$ είναι συντηρητικό, υπάρχει δηλαδή C^1 συνάρτηση $\varphi: A\to\mathbb{R}$ ώστε $\vec{F}=\nabla\varphi$, δηλαδή $(P,Q,R)=(\varphi_x,\varphi_y,\varphi_z)$.

Άρα

$$\operatorname{curl}\vec{F}=(R_y-Q_z,\ P_z-R_x,\ Q_x-P_y)$$

$$=(\varphi_{zy}-\varphi_{yz},\ \varphi_{xz}-\varphi_{zx},\ \varphi_{yx}-\varphi_{xy})$$

$$=\vec{0}$$

Άρα δείξαμε την ακόλουθη

Πρόταση Αν το C^1 διανυσματικό πεδίο $\vec{F}: A\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ είναι συντηρητικό τότε $\operatorname{curl}\vec{F}=\vec{0}$. (Λέμε ότι το $\vec{F}$ είναι αστρόβιλο)

Παρατήρηση Η σχέση $\operatorname{curl}\vec{F}=\vec{0}$ είναι λοιπόν η αντίστοιχη της $P_y=Q_x$ που έχουμε δει για διανυσματικά πεδία στον $\mathbb{R}^2$.

Ερώτημα: Ισχύει το αντίστροφο της παραπάνω πρότασης;

Όπως και στην περίπτωση $n=2$ το αντίστροφο δεν ισχύει γενικά: απαιτείται κάποια υπόθεση για το χωρίο A όπου ορίζεται το $\vec{F}$.

<u>Πρόταση.</u> Έστω $\vec{F}: A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ένα C^1 διανυσματικό πεδίο όπου $A=\mathbb{R}^3$ ή $A=\mathbb{R}^3 \setminus F$ όπου F πεπερασμένο σύνολο. Αν το $\vec{F}$ είναι αστρόβιλο (δηλ. $\operatorname{curl}\vec{F}=\vec{0}$) τότε είναι συντηρητικό.

Για καμπύλες στο $\mathbb{R}^2$ έχουμε δύο τρόπους περιγραφής:

1. με εξίσωση

   $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : f(x,y)=0\}$

2. με παραμέτρηση

   $\{(x(t),y(t)) : t\in[a,b]\}$

Για παράδειγμα ο μοναδιαίος κύκλος περιγράφεται από την εξίσωση $x^2+y^2=1$ αλλά και από την παραμέτρηση $(\cos t, \sin t)$, $t\in[0,2\pi]$.

Ανάλογα για επιφάνειες. Έχουμε

1. περιγραφή με εξίσωση

   $\{(x,y,z): F(x,y,z)=0\}$

   (πχ. $x^2+y^2+z^2=1$)

2. με παραμέτρηση: ??

Επιφανειακά ολοκληρώματα

Έστω $F(x,y,z)$ μία C^1 συνάρτηση ορισμένη σε ένα ανοικτό σύνολο $A \subset \mathbb{R}^3$. Γνωρίζουμε ότι το σύνολο

$$S=\{(x,y,z)\in A : F(x,y,z)=0 \ , \ \nabla F(x,y,z)\neq \vec{0}\}$$

είναι μία ομαλή επιφάνεια.

Το εφαπτόμενο επίπεδο στην S στο σημείο $(x_0,y_0,z_0)\in S$ έχει εξίσωση

$$(x-x_0)F_x(x_0,y_0,z_0)+(y-y_0)F_y(x_0,y_0,z_0)$$
$$+(z-z_0)F_z(x_0,y_0,z_0)=0$$

$$\left(\text{ή} \quad (\vec{r}-\vec{r_0})\cdot \nabla F(\vec{r_0})=0 \right)$$

και ένα κάθετο στην S διάνυσμα στο σημείο $(x_0,y_0,z_0)\in S$ είναι το $\nabla F(x_0,y_0,z_0)$.

Προκειμένου να ορίσουμε την έννοια του επιφανειακού ολοκληρώματος είναι απαραίτητο να δούμε τις επιφάνειες από μία διαφορετική οπτική.

Παραμετρικές επιφάνειες

Ορισμός Έστω $D \subseteq \mathbb{R}^2$ φραγμένο, κλειστό, με ομαλό σύνορο, κατά τόξα συνεκτικό. Μία C^1 συνάρτηση

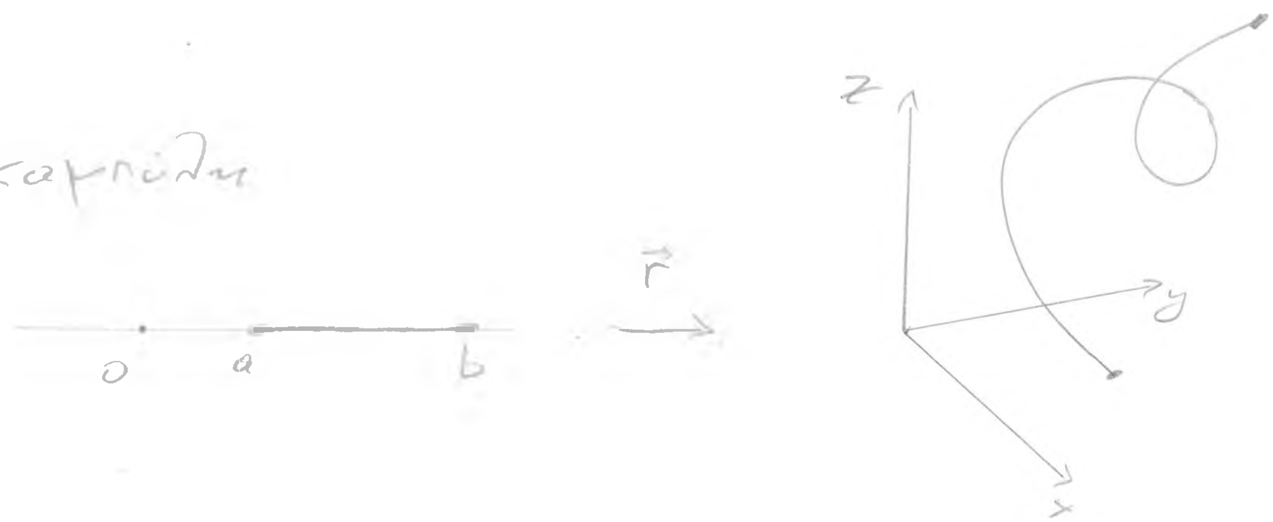
$$\vec{r}: D \to \mathbb{R}^3, \quad \vec{r}(t,s) = (x(t,s), y(t,s), z(t,s))$$

ονομάζεται παραμετρική επιφάνεια.

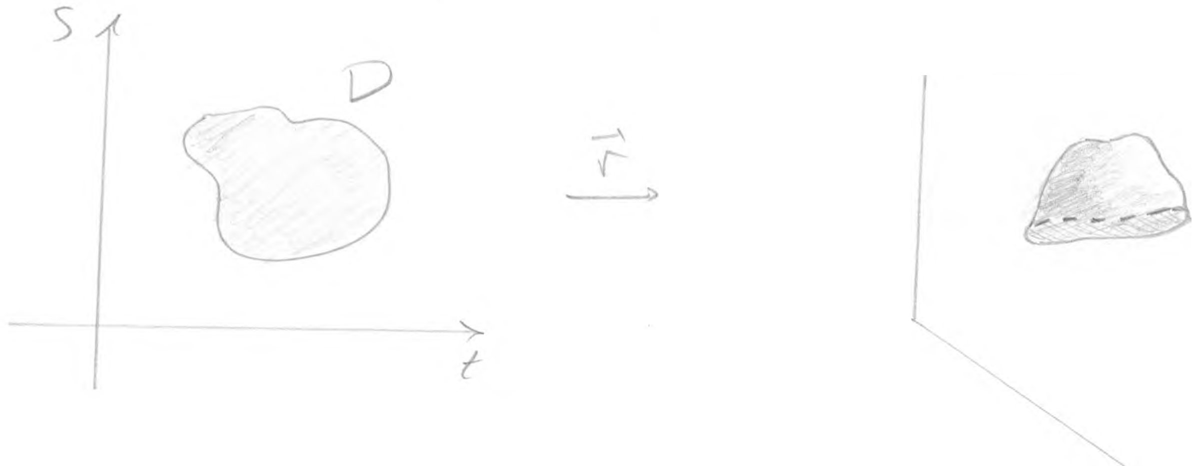
Παρατήρηση (1) Ο ορισμός είναι ανάλογος με τον ορισμό της (παραμετρικής) καμπύλης $\vec{r}: [a,b] \to \mathbb{R}^3$ $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$

(2) Συχνά ονομάζουμε επιφάνεια και την εικόνα $\vec{r}(D)$

καμπύλη



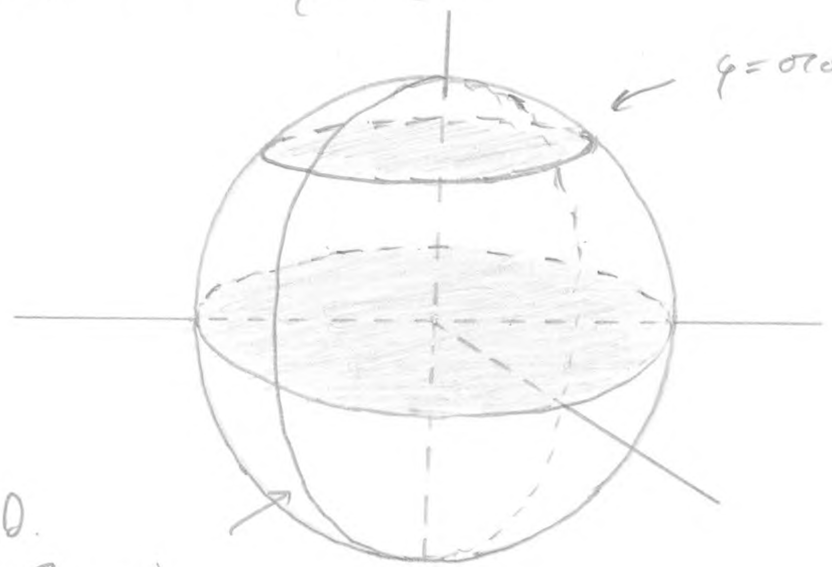
παραμετρική επιφάνεια



<u>Παράδειγμα</u> Η απεικόνιση

$\vec{r}(\varphi,\theta)=(\sin\varphi\cos\theta,\ \sin\varphi\sin\theta,\ \cos\varphi)$

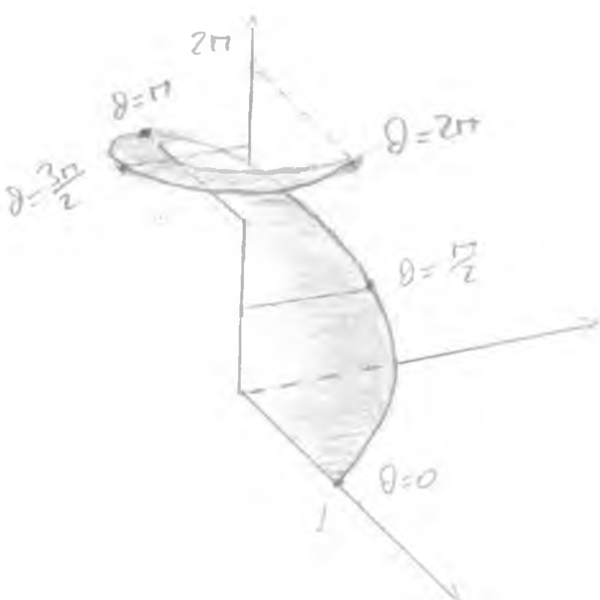
ορισμένη στο $D=[0,\pi]\times[0,2\pi]$ είναι μία παραμετρική επιφάνεια. Η εικόνα $\vec{r}(D)$ είναι η μοναδιαία σφαίρα



<u>Παράδειγμα</u> Η

$\vec{r}(t,s)=(t\cos s,\ t\sin s,\ s)\ ,\quad (t,s)\in[0,1]\times[0,2\pi]$

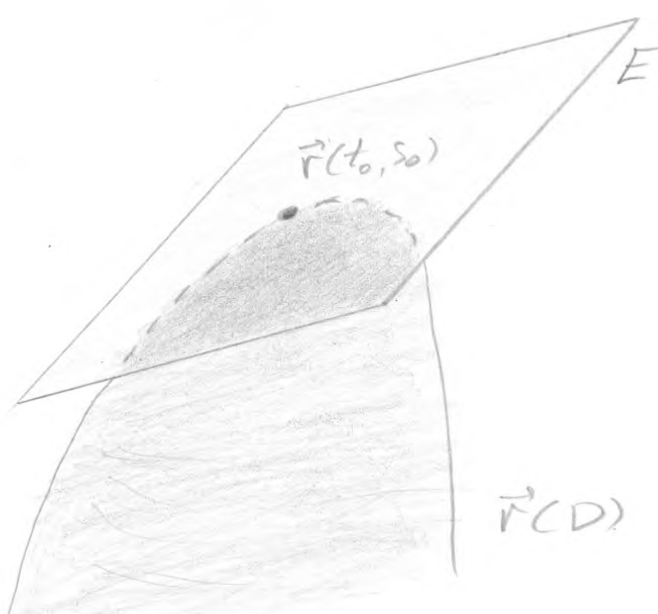
είναι μία παραμετρική επιφάνεια, η οποία ονομάζεται <u>ελικοειδής</u>.



Η $\vec{r}(t,s)=(t,t,t)$, $(t,s)\in[0,1]\times[0,1]$, είναι μία παραμετρική επιφάνεια, όμως η εικόνα της είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα.

Θέλουμε μία επιπλέον ιδιότητα ώστε η εικόνα $\vec{r}(D)$ να είναι πραγματικά "επιφάνεια". Θέλουμε δηλαδή κάτι ανάλογο της σχέσης $\nabla F(x_0,y_0,z_0)\neq\vec{0}$ για την επιφάνεια $\{(x,y,z): F(x,y,z)=0\}$.

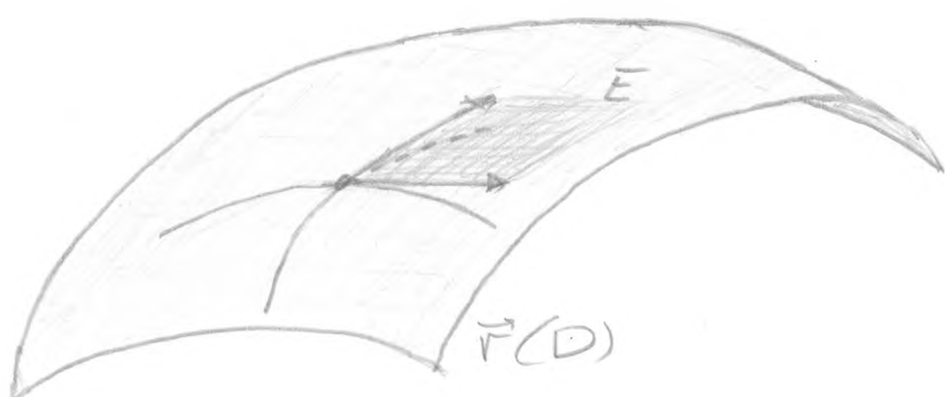
Λίγο διαφορετικά: έστω η παραμετρική επιφάνεια $\vec{r}: D\longrightarrow\mathbb{R}^3$ και $(t_0,s_0)\in D$. Ζητούμε μία συνθήκη ώστε να ορίζεται το εφαπτόμενο επίπεδο E στην εικόνα $\vec{r}(D)$ στο σημείο $\vec{r}(t_0,s_0)$.



Έστω λοιπόν η παραμετρική επιφάνεια $\vec{r}: D \to \mathbb{R}^3$ και $(t_0, s_0) \in D$.

Είναι απολύτως λογικό το εξής: το εφαπτόμενο επίπεδο στο σημείο $\vec{r}(t_0, s_0)$ θα είναι (αν υπάρχει/ορίζεται) η ένωση όλων των εφαπτόμενων ευθειών στο $\vec{r}(t_0, s_0)$.

Δηλαδή: Θεωρούμε όλες τις C^1 καμπύλες $\vec{\sigma}$ που περιέχονται στην επιφάνεια $\vec{r}(D)$ και οι οποίες διέρχονται από το $\vec{r}(t_0, s_0)$. Για κάθε μία από αυτές θεωρούμε την εφαπτόμενη ευθεία στο $\vec{r}(t_0, s_0)$. Η ένωση όλων αυτών των ευθειών θα είναι το εφαπτόμενο επίπεδο.



Μια καμπύλη $\vec{\sigma}$ με ίχνος στο $\vec{r}(D)$ θα έχει τη μορφή

$$\vec{\sigma} = \vec{r} \circ \vec{\gamma}$$

όπου $\vec{\gamma}$ καμπύλη με ίχνος στο D

$$\gamma : [a,b] \to D, \quad \vec{\gamma}(\tau) = (t(\tau), s(\tau))$$

$$\vec{\sigma}(\tau) = \vec{r}(\vec{\gamma}(\tau))$$
$$= \big(x(t(\tau), s(\tau)), y(t(\tau), s(\tau)), z(t(\tau), s(\tau)) \big)$$

Έστω $\tau_0 \in (a,b)$ ώστε $\vec{\gamma}(\tau_0) = (t_0, s_0)$. Το εφαπτόμενο διάνυσμα $\vec{\sigma}'(\tau_0)$ είναι τότε

$$\vec{\sigma}'(\tau_0) = \frac{d}{d\tau} \vec{r}(\vec{\gamma}(\tau)) \Big|_{\tau=\tau_0}$$

$$= \left(\frac{d}{d\tau} x(t(\tau), s(\tau)), \frac{d}{d\tau} y(t(\tau), s(\tau)), \frac{d}{d\tau} z(t(\tau), s(\tau)) \right) \Big|_{\tau=\tau_0}$$

$$= \big(x_t(t_0,s_0) t'(\tau_0) + x_s(t_0,s_0) s'(\tau_0),$$
$$y_t(t_0,s_0) t'(\tau_0) + y_s(t_0,s_0) s'(\tau_0),$$
$$z_t(t_0,s_0) t'(\tau_0) + z_s(t_0,s_0) s'(\tau_0) \big)$$

$$= t'(\tau_0)\left(x_t(t_0,s_0),\ y_t(t_0,s_0),\ z_t(t_0,s_0)\right)$$

$$+ s'(\tau_0)\left(x_s(t_0,s_0),\ y_s(t_0,s_0),\ z_s(t_0,s_0)\right)$$

Θέτοντας

$$\vec{r}_t = (x_t, y_t, z_t), \quad \vec{r}_s = (x_s, y_s, z_s)$$

έχουμε λοιπόν

$$\vec{\sigma}'(\tau_0) = t'(\tau_0)\,\vec{r}_t(t_0,s_0) + s'(\tau_0)\,\vec{r}_s(t_0,s_0)$$

Συνεπώς: το εφαπτόμενο διάνυσμα στο σημείο $\vec{r}(t_0,s_0)$ σε μία οποιαδήποτε καμπύλη που περιέχεται στο $\vec{r}(D)$ και διέρχεται από το $\vec{r}(t_0,s_0)$ ανήκει στον υπόχωρο που παράγεται από τα διανύσματα $\vec{r}_t(t_0,s_0)$ και $\vec{r}_s(t_0,s_0)$.

Άρα: ικανή και αναγκαία συνθήκη προκειμένου να ορίζεται το εφαπτόμενο επίπεδο στο $\vec{r}(t_0,s_0)$ είναι τα διανύσματα $\vec{r}_t(t_0,s_0)$ και $\vec{r}_s(t_0,s_0)$ να είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Ισοδύναμα, να ισχύει

$$\vec{r}_t(t_0,s_0) \times \vec{r}_s(t_0,s_0) \neq \vec{0}.$$

Στην περίπτωση αυτή ένα κάθετο διάνυσμα στο εφαπτόμενο επίπεδο είναι το

$$\vec{N}(t_0,s_0)=\vec{r}_t(t_0,s_0)\times\vec{r}_s(t_0,s_0)$$

<u>Ορισμός</u> (1) Έστω $\vec{r}: D \to \mathbb{R}^3$ μία παραμετρική επιφάνεια. Η $\vec{r}$ λέγεται <u>ομαλή</u> στο $(t_0,s_0)\in D$ αν $\vec{r}_t(t_0,s_0)\times\vec{r}_s(t_0,s_0)\neq\vec{0}$. Τότε ορίζεται το αντίστοιχο εφαπτόμενο επίπεδο

$$E=\{\vec{x}\in\mathbb{R}^3 : (\vec{x}-\vec{r}(t_0,s_0))\cdot\vec{N}(t_0,s_0)=\vec{0}\}.$$

(2) Η $\vec{r}$ λέγεται ομαλή όταν είναι ομαλή σε κάθε εσωτερικό σημείο του D.

<u>Ορισμός</u> Μία παραμετρική επιφάνεια $\vec{r}: D\to\mathbb{R}$ λέγεται απλή αν ο περιορισμός της στο εσωτερικό του D είναι 1-1.

<u>Παραδείγματα</u> Οι δύο επιφάνειες των παραδειγμάτων της σελ 94 είναι απλές.

<u>Παρατήρηση</u> Έστω $\vec{r}: D \to \mathbb{R}^3$ μία απλή ομαλή παραμετρική επιφάνεια. Συχνά ονομάζουμε επιφάνεια και το σύνολο $S = \vec{r}(D)$. Αν το $A \in S$ είναι εικόνα ενός εσωτερικού σημείου του D, τότε συχνά αναφερόμαστε στο εφαπτόμενο επίπεδο στην επιφάνεια S στο σημείο A.

<u>Παράδειγμα</u> Να βρεθεί η εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου στο τυχόν σημείο $\vec{r}(t_0, s_0)$ του ελικοειδούς

$$\vec{r}(t,s) = (t\cos s,\ t\sin s,\ s)$$

Έχουμε

$$\vec{r}_t = (\cos s,\ \sin s,\ 0)$$

$$\vec{r}_s = (-t\sin s,\ t\cos s,\ 1)$$

και άρα

$$\vec{r}_t \times \vec{r}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos s & \sin s & 0 \\ -t\sin s & t\cos s & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (\sin s,\ -\cos s,\ t) \neq \vec{0}$$

Άρα το εφαπτόμενο επίπεδο έχει εξίσωση

$$\left(\vec{x}-\vec{r}(t_0,s_0)\right)\cdot\left(\vec{r}_t(t_0,s_0)\times\vec{r}_s(t_0,s_0)\right)=0$$

$\Longleftrightarrow$

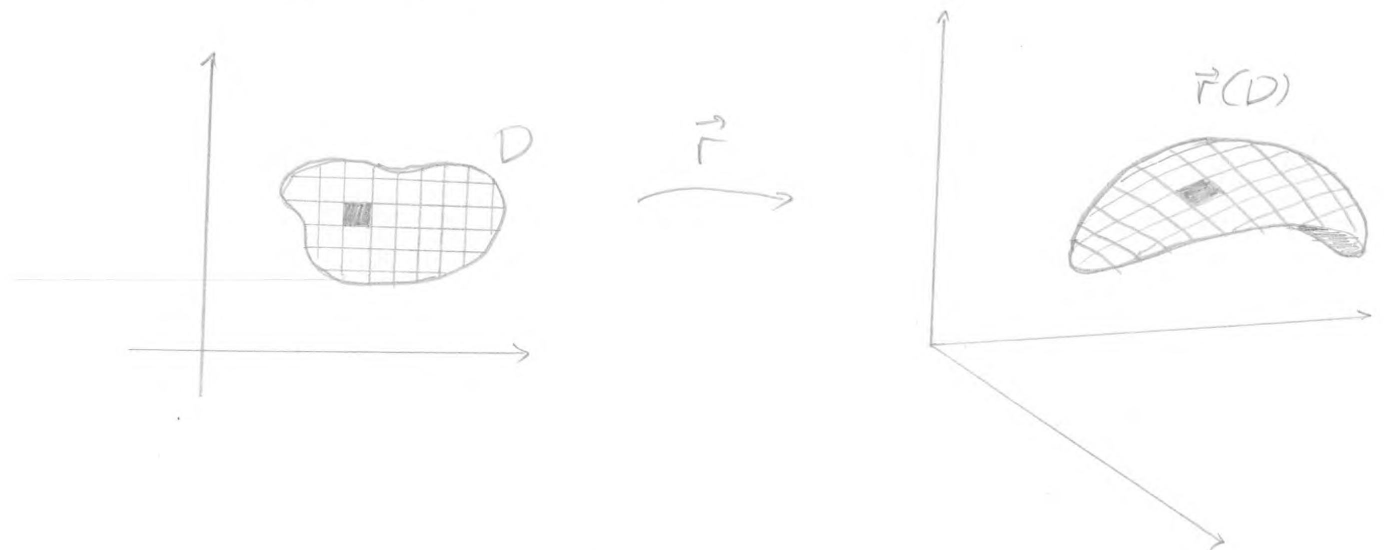
$$(x-t_0\cos s_0)\sin s_0+(y-t_0\sin s_0)(-\cos s_0)+(z-s_0)t_0=0$$

$$\Longleftrightarrow\quad x\sin s_0-y\cos s_0+zt_0=s_0t_0$$

Στοιχείο εμβαδού

Έστω μία κλειστή, ομαλή παραμετρική επιφάνεια

$$\vec{r}: D\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$$

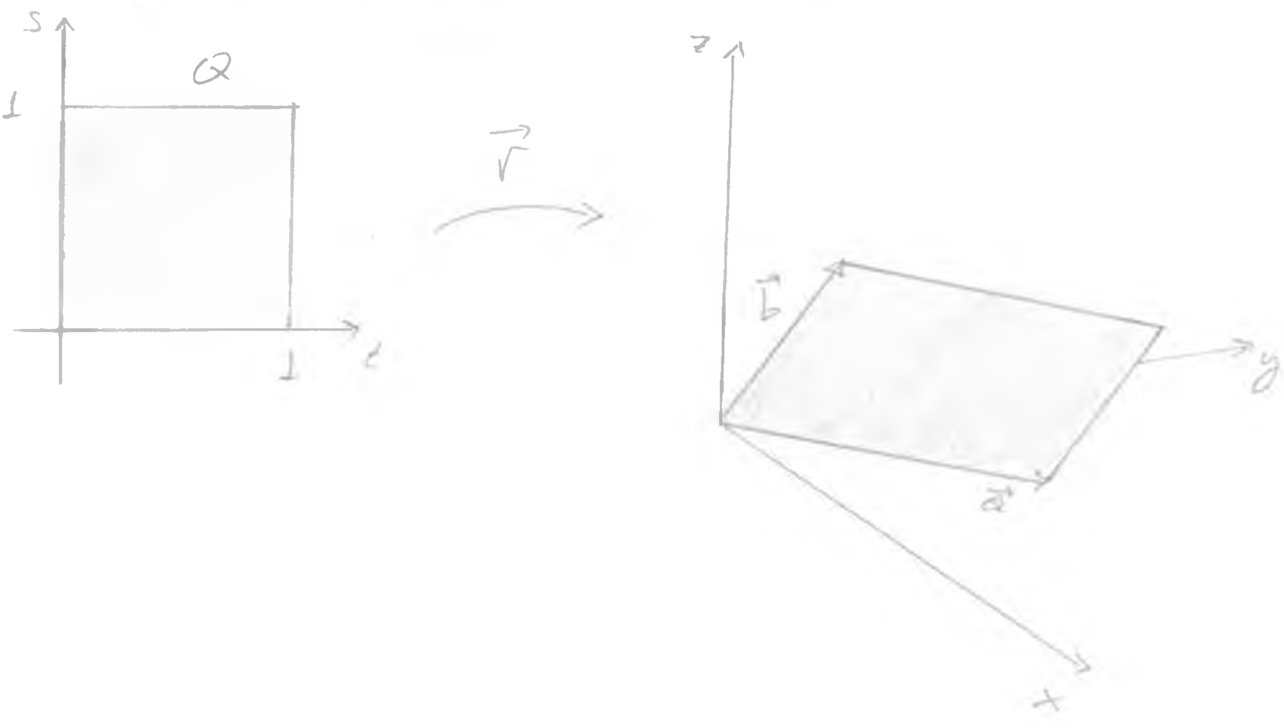


Θέλουμε να υπολογίσουμε το στοιχειώδες εμβαδόν (στοιχείο εμβαδού) στην επιφάνεια $S=\vec{r}(D)$.

Ας υποθέσουμε αρχικά ότι η $\vec{r}$ είναι αφφινική (δηλ. γραμμική + σταθερά).
Άρα υπάρχουν $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ ώστε

$$\vec{r}(t,s) = t\vec{a} + s\vec{b} + \vec{c}$$

Χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτουμε ότι $\vec{c} = \vec{0}$.
Η εικόνα $\vec{r}(Q)$ του μοναδιαίου τετραγώνου $Q = [0,1] \times [0,1]$ είναι το παραλληλόγραμμο στον $\mathbb{R}^3$ που ορίζεται από την αρχή των αξόνων και τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{b}$ και άρα έχει εμβαδόν $\|\vec{a} \times \vec{b}\|$



Ένα κλειστό φραγμένο χωρίο $D \subseteq \mathbb{R}^2$ με τμηματικά ομαλό σύνορο μπορεί να προσεγγιστεί από μία ένωση μικρών τετραγώνων, οπότε από τα παραπάνω έπεται η εξής

Πρόταση. Έστω $D \subseteq \mathbb{R}^2$ κλειστό, φραγμένο, με τμηματικά ομαλό σύνορο και $\vec{r}(t,s) = t\vec{a} + s\vec{b} + \vec{c}$. Τότε

$$\varepsilon\mu\beta(\vec{r}(D)) = \|\vec{a} \times \vec{b}\| \, \varepsilon\mu\beta(D).$$

Ας θεωρήσουμε τώρα τη γενική περίπτωση όπου η απλή, ομαλή παραμετρική επιφάνεια

$$\vec{r} : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

δεν είναι (απαραίτητα) αφφινική (σχήμα σελ 101). Θεωρούμε ένα στοιχειώδες τετράγωνο $Q = [t_0, t_0 + \Delta t] \times [s_0, s_0 + \Delta s]$ εμβαδού $\Delta t \cdot \Delta s$ και θέλουμε να υπολογίσουμε (προσεγγιστικά) το εμβαδόν της εικόνας $\vec{r}(Q)$.

Επειδή τα $\Delta t, \Delta s$ είναι πολύ μικρά, η συνάρτηση $\vec{r}(t,s)$ προσεγγίζεται πολύ καλά στο Q από τη βέλτιστη αφφινική προσέγγιση στο σημείο (t_0, s_0),

$$\vec{r}(t,s) \simeq \vec{r}(t_0,s_0) + (t-t_0)\,\vec{r}_t(t_0,s_0) + (s-s_0)\,\vec{r}_s(t_0,s_0), \quad (s,t)\in Q$$

Χρησιμοποιώντας και την προηγούμενη πρόταση (με $\vec{a} = \vec{r}_t(t_0,s_0)$, $\vec{b} = \vec{r}_s(t_0,s_0)$) συμπεραίνουμε ότι

$$E\mu(\vec{r}(Q)) \simeq \|\vec{r}_t \times \vec{r}_s\|\Big|_{(t_0,s_0)} E\mu(Q).$$

<u>Παρατήρηση</u>. Τα παραπάνω βέβαια δεν είναι καθόλου αυστηρά. Ειδικότερα, δεν έχουμε ακόμη δώσει τον ορισμό του εμβαδού μιας επιφάνειας (ή μέρους αυτής). Οι παραπάνω υπολογισμοί είναι βοηθητικοί για την κατανόηση της έννοιας του επιφανειακού ολοκληρώματος και της έννοιας του εμβαδού παραμετρικής επιφάνειας.

Ορισμός Έστω $D \subseteq \mathbb{R}^2$ κλειστό, φραγμένο, κατά τόξα συνεκτικό με τμηματικά C^1 σύνορο. Έστω $\vec{r}: D \to \mathbb{R}^3$ μια απλή, ομαλή παραμετρική επιφάνεια. Η εικόνα $S = \vec{r}(D)$ ονομάζεται κανονική παραμετρική επιφάνεια.

Ορισμός Έστω S μια κανονική παραμετρική επιφάνεια και $f: S \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Το ολοκλήρωμα

$$\iint_S f\,dS = \iint_D (f \circ \vec{r}\,)\, \|\vec{N}\|\, dA$$

$$= \iint_D f(\vec{r}(t,s))\, \|\vec{r}_t \times \vec{r}_s\|\, dt\,ds$$

ονομάζεται επιφανειακό ολοκλήρωμα 1ου είδους της f στην επιφάνεια S.

Παρατήρηση Μπορεί κανείς να αποδείξει ότι το $\iint_S f\,dS$ δεν εξαρτάται από την επιλογή της παραμέτρησης $\vec{r}$.

Πρόταση Έστω $S \subset \mathbb{R}^3$ κανονική επιφάνεια και $f, g : S \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις. Ισχύει

$$(\alpha) \quad \iint_S (\lambda f + \mu g)\, dS = \lambda \iint_S f\, dS + \mu \iint_S g\, dS \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R})$$

(β) αν $f \leq g$ στην S τότε

$$\iint_S f\, dS \leq \iint_S g\, dS.$$

ανάλογη ιδιότητα ισχύει και για τα διπλά και τριπλά ολοκληρώματα καθώς και για τα επικαμπύλια α' είδους

Ειδικότερα:

(i). $$\left| \iint_S f\, dS \right| \leq \iint_S |f|\, dS$$

(ii) αν $|f| \leq M$ στην S τότε

$$\left| \iint_S f\, dS \right| \leq M\, \text{εμβ}(S)$$

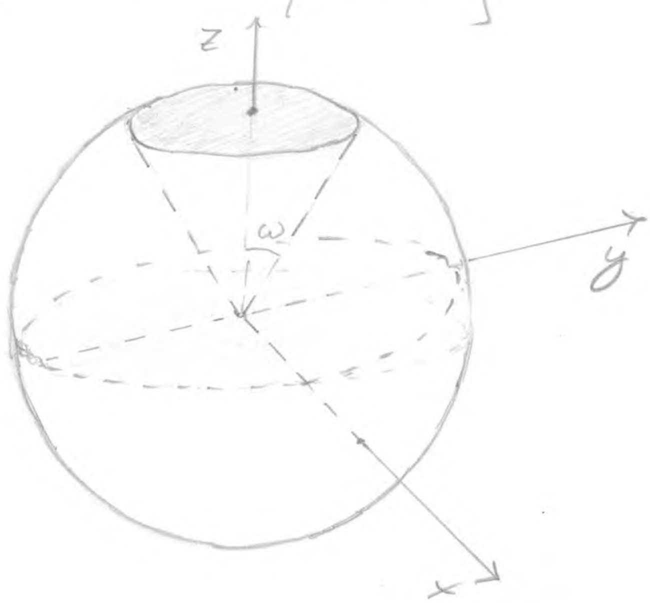
Ορισμός Ο αριθμός

$$\text{εμβ}(S) = \iint_S dS$$

ονομάζεται εμβαδόν της κανονικής επιφάνειας S.

Παράδειγμα Να βρεθεί το εμβαδόν του τμήματος S_ω μοναδιαίας σφαίρας το οποίο σε σφαιρικές συντεταγμένες περιγράφεται ως

$$S_\omega = \{(\varphi, \theta) \ : \ \varphi \le \omega\} \qquad (\omega \in [0, \pi])$$



Χρησιμοποιούμε την παραμέτρηση των σφαιρικών συντεταγμένων

$$\vec{r}(\varphi, \theta) = (\sin\varphi\cos\theta, \sin\varphi\sin\theta, \cos\varphi)$$

$$0 \le \varphi \le \omega, \ 0 \le \theta \le 2\pi.$$

Έχουμε

$$\vec{r}_\varphi = (\cos\varphi\cos\theta, \cos\varphi\sin\theta, -\sin\varphi)$$

$$\vec{r}_\theta = (-\sin\varphi\sin\theta, \sin\varphi\cos\theta, 0)$$

Άρα

$$\vec{r}_\varphi \times \vec{r}_\theta = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos\varphi\cos\theta & \cos\varphi\sin\theta & -\sin\varphi \\ -\sin\varphi\sin\theta & \sin\varphi\cos\theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (\sin^2\varphi\cos\theta,\ \sin^2\varphi\sin\theta,\ \cos\varphi\sin\varphi)$$

και συνεπώς

$$\|\vec{r}_\varphi \times \vec{r}_\theta\| = (\sin^4\varphi\cos^2\theta + \sin^4\varphi\sin^2\theta + \cos^2\varphi\sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}}$$

$$= (\sin^4\varphi + \cos^2\varphi\sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}} = \sin\varphi$$

Άρα

$$\text{εμβ}(S_\omega) = \iint_{S_\omega} dS$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\omega} \|\vec{r}_\varphi \times \vec{r}_\theta\|\, d\varphi\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\omega} \sin\varphi\, d\varphi\, d\theta$$

$$= 2\pi(1-\cos\omega)$$

Ειδικότερα, για $\omega=\pi$ προκύπτει ότι το εμβαδόν της μοναδιαίας σφαίρας είναι 4π.

<u>Πρόταση</u> Έστω $\vec{r}: D \to \mathbb{R}^3$ μία παραμετρική επιφάνεια, $\vec{r}(t,s) = (x(t,s), y(t,s), z(t,s))$. Ισχύει

$$\|\vec{r}_t \times \vec{r}_s\| = \sqrt{\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(t,s)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(x,z)}{\partial(t,s)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(t,s)}\right)^2}$$

Απόδειξη: Απλές πράξεις.

<u>Εφαρμογές του επιφανειακού ολοκληρώματος</u>

Έστω $S \subset \mathbb{R}^3$ μία κανονική παραμετρική επιφάνεια στην οποία είναι κατανεμημένη μάζα επιφανειακής πυκνότητας $\rho(x,y,z)$, $(x,y,z) \in S$. Η ολική μάζα της επιφάνειας είναι τότε

$$m = \iint_S \rho \, dS$$

και το κέντρο μάζας (x_0, y_0, z_0) δίνεται από τις σχέσεις

$$x_0 = \frac{1}{m}\iint_S x\rho \, dS, \quad y_0 = \frac{1}{m}\iint_S y\rho \, dS$$

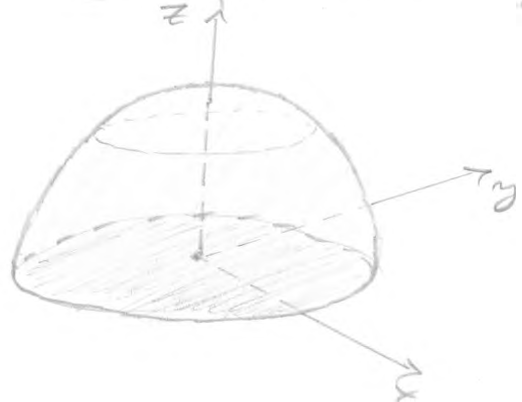
$$z_0 = \frac{1}{m}\iint_S z\rho \, dS$$

Παράδειγμα Να βρεθεί το κέντρο μάζας ενός ομογενούς ημισφαιρίου

Θεωρούμε χωρίς περιορισμό της γενικότητας το ημισφαίριο

$$H = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2=1 \ , \ z\geq 0\}$$

το οποίο θεωρούμε ότι έχει πυκνότητα $\rho = 1$



Το H είναι μια κανονική παραμετρική και μία παραμέτρηση της είναι η

$$\vec{r}(\varphi,\theta) = (\sin\varphi\cos\theta,\ \sin\varphi\sin\theta,\ \cos\varphi),$$

$$(\varphi,\theta)\in D = \{(\varphi,\theta) : 0\leq\varphi\leq\tfrac{\pi}{2}\ ,\ 0\leq\theta\leq 2\pi\}$$

Γνωρίζουμε ότι $m = \text{εμβ}(H) = 2\pi$.

Λόγω συμμετρίας το κέντρο μάζας βρίσκεται στον z-άξονα, οπότε αναζητούμε μόνο την z-συνιστώσα του z_0.

Εξ 04.5

$$z_0 = \frac{1}{m}\iint_H z\rho \, dS =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\iint_H z \, dS$$

$$= \frac{1}{2\pi}\iint_D \cos\varphi \, \|\vec{r}_\varphi \times \vec{r}_\theta\| \, d\varphi \, d\theta$$

(σελ 108) $$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \sin\varphi \, d\varphi \, d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \sin\varphi \, d\varphi$$

$$= \left[-\frac{1}{4}\cos 2\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}$$

Τα βασικά ολοκληρωτικά θεωρήματα της Διανυσματικής Ανάλυσης

Τα βασικά ολοκληρωτικά θεωρήματα της Διανυσματικής Ανάλυσης είναι θεωρήματα που γενικεύουν το Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού:

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$$

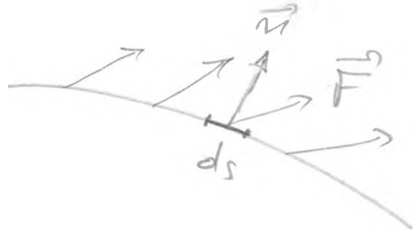
Έχουμε ήδη δει ένα από αυτά τα θεωρήματα, το θεώρημα που αφορά τον τύπο του Green

$$\int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

1. Το θεώρημα απόκλισης του Gauss.

Έστω $\vec{\gamma}$ μια ομαλή καμπύλη στον $\mathbb{R}^2$, $\vec{n}$ μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στην καμπύλη και $\vec{F}$ ένα διανυσματικό πεδίο.

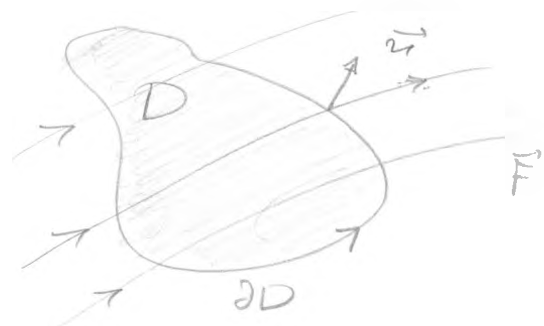
Έστω ds ένα στοιχείο μήκους στη γ.
Η ποσότητα $\vec{F}\cdot\vec{n}\,ds$ εκφράζει το στοιχείο ροής του πεδίου $\vec{F}$ διά μέσου της γ



Αν για παράδειγμα το $\vec{F}$ είναι το πεδίο ταχυτήτων ενός ρευστού, το $\vec{F}\cdot\vec{n}\,ds$ δηλώνει την ποσότητα του ρευστού που διαπερνά το ds (με φορά προς το $\vec{n}$) ανά μονάδα χρόνου.

Συνεπώς το

$$\int_{\partial D} \vec{F}\cdot\vec{n}\,ds$$



δηλώνει την ποσότητα ρευστού που εξέρχεται του D ανά μονάδα χρόνου (όταν $D = int(\gamma)$ για μία απλή κλειστή καμπύλη γ).

(Θ. απόκλισης του Gauss)

<u>Θεώρημα</u>. Έστω $\vec{F}: A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ένα C^1 διανυσματικό πεδίο. Έστω γ απλή, κλειστή, τμηματικά C^1 καμπύλη με $\text{Tr}(\gamma) \cup int(\gamma) \subset A$. Έστω $\vec{n}$ το εξωτερικό μοναδιαίο κάθετο στο $D = int(\gamma)$. Τότε

$$\iint_D div\,\vec{F}\,dA = \int_{\partial D} \vec{F}\cdot\vec{n}\,ds$$

Απόδειξη

Έστω $\vec{\gamma} = (x, y) : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ μία παραμέτρηση θετικής φοράς του ∂D. Τότε το εξωτερικό μοναδιαίο κάθετο στο σημείο $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ προκύπτει από το $\vec{\gamma}'(t)$ με στροφή κατά $-\frac{\pi}{2}$, άρα

$$\vec{n} = \frac{(y'(t), -x'(t))}{\|\vec{\gamma}'(t)\|}$$

Εφαρμόζοντας τον τύπο του Green στο διανυσματικό πεδίο $(-Q, P)$ (όπου $\vec{F} = (P, Q)$) παίρνουμε

$$\iint_D \operatorname{div} \vec{F}\, dx\, dy = \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx\, dy$$

$$= \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial (-Q)}{\partial y} \right) dx\, dy$$

$$= \int_D (-Q)\, dx + P\, dy$$

$$= \int_0^1 [(-Q)x' + Py']\,dt$$

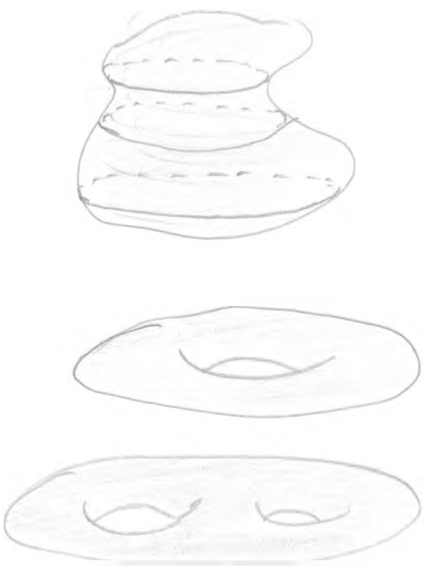
$$= \int_0^1 (P,Q)\cdot(y',-x')\,dt$$

$$= \int_0^1 (P,Q)\cdot\vec{n}\,\|\vec{\gamma}'\|\,dt$$

$$= \int_{\partial D} \vec{F}\cdot\vec{n}\,ds \;.$$

Το Θεώρημα απόκλισης του Gauss επεκτείνεται και στο $\mathbb{R}^3$.

Χωρίς να δώσουμε αυστηρό ορισμό, θα λέμε ότι μία φραγμένη επιφάνεια $S\subseteq\mathbb{R}^3$ είναι απλή κλειστή αν δεν αυτοτέμνεται και δεν έχει "άκρη".



απλές κλειστές επιφάνειες

όχι κλειστή

Θεώρημα (Θ. Απόκλισης του Gauss στο $\mathbb{R}^3$). Έστω $\vec{F}: A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ένα C^1 διανυσματικό πεδίο. Έστω $\underline{\Omega} \subset \mathbb{R}^3$ κλειστό φραγμένο χωρίο με τμηματικά ομαλό (π.χ. C^1) σύνορο. Έστω $\vec{n}$ το εξωτερικό μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στο $\partial\underline{\Omega}$. Έχουμε τότε ότι

$$\iiint_{\underline{\Omega}} \operatorname{div} \vec{F} \, dV = \iint_{\partial \underline{\Omega}} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$$

Παράδειγμα Χρησιμοποιείστε το Θεώρημα Απόκλισης προκειμένου να υπολογίσεται το

$$\iint_{S(2)} \vec{F}\cdot\vec{n}\, dS$$

όπου $S(2)$ η σφαίρα $\{(x,y,z): x^2+y^2+z^2=4\}$

και $\vec{F}=(yx^2,\ xy^2-3z^4,\ x^3+y^2)$

Υπολογίζουμε

$$div\vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}(yx^2)+\frac{\partial}{\partial y}(xy^2-3z^4)+\frac{\partial}{\partial z}(x^3+y^2)$$

$$= 4xy$$

Από το Θεώρημα Απόκλισης έχουμε

$$\iint_{S(2)} \vec{F}\cdot\vec{n}\, dS = \iiint_{B(2)} div\vec{F}\, dV$$

$$= 4\iiint_{B(2)} xy\, dV$$

Χρησιμοποιούμε σφαιρικές συντεταγμένες. Έχουμε

$$B(2)=\{(\rho,\varphi,\theta): 0\leq \rho\leq 2\}$$

11d)

xρx

$$4\iiint_{B(2)} xy\,dV =$$

$$= 4\int_0^2\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}(\rho\sin\varphi\cos\theta)(\rho\sin\varphi\sin\theta)\rho^2\sin\varphi\,d\theta\,d\varphi\,d\rho$$

$$= 4\left(\int_0^2\rho^4\,d\rho\right)\left(\int_0^{\pi}\sin^3\varphi\,d\varphi\right)\left(\int_0^{2\pi}\cos\theta\sin\theta\,d\theta\right)$$

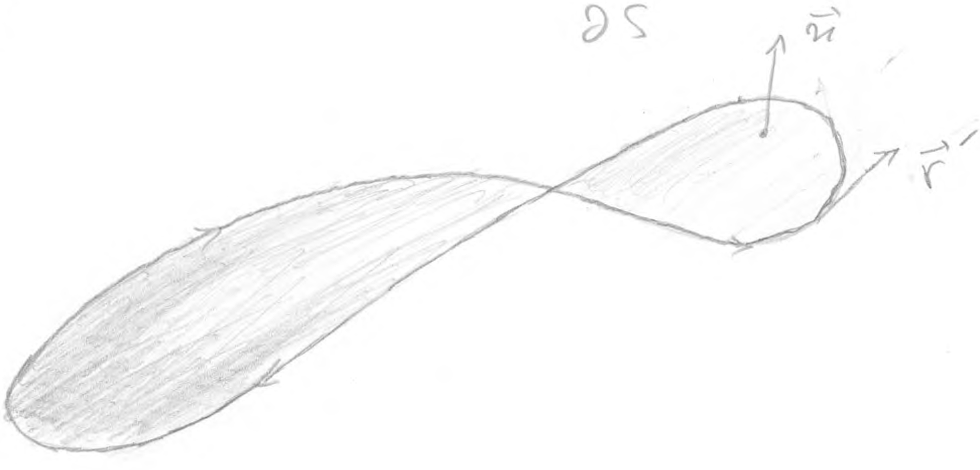
$$= 4\cdot\frac{32}{5}\cdot\frac{4}{3}\cdot 0$$

$$= 0$$

Το Θεώρημα Stokes

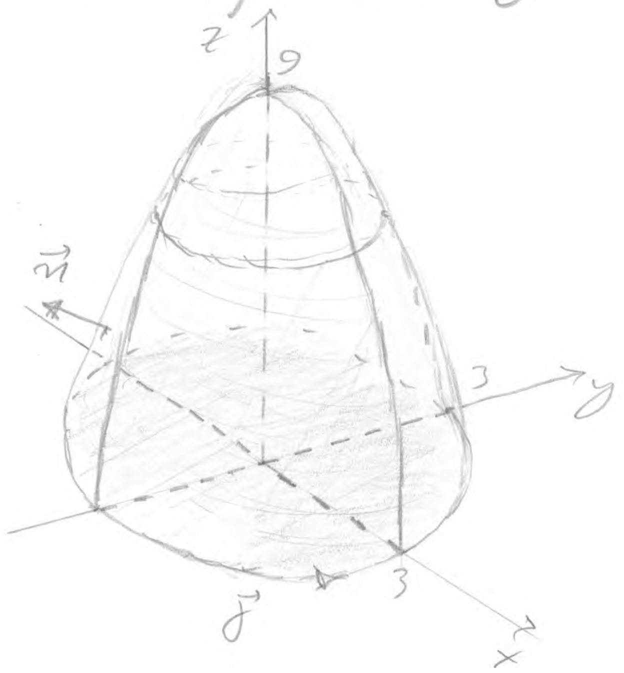
<u>Θεώρημα</u> Έστω $\vec{F}: A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ένα ομαλό διανυσματικό πεδίο. Έστω S μία απλή, ομαλή, προσανατολισμένη επιφάνεια, και $\vec{n}$ μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στην S. Έστω ότι το ∂S είναι μία τμηματικά C^1 καμπύλη, θετικής φοράς ως προς το $\vec{n}$. Τότε

$$\iint_S (\operatorname{curl} \vec{F}) \cdot \vec{n} \, dS = \int_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$



Παράδειγμα Να επαληθευθεί ο τύπος του Stokes για την επιφάνεια $z=9-x^2-y^2$, $z\geq 0$, και το διανυσματικό πεδίο

$$\vec{F}=(2z-y)\vec{i}+(x+z)\vec{j}+(3x-2y)\vec{k}$$



Πρέπει να δείξουμε ότι

$$\iint_S (\mathrm{curl}\,\vec{F})\cdot\vec{n}\,dS=\int_{\partial S}\vec{F}\cdot d\vec{r}$$

όπου ∂S ο κύκλος $x^2+y^2=9$, $z=0$, με φορά αντίθετη των δεικτών του ρολογιού.

Έχουμε

$$\mathrm{curl}\,\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z\\ 2z-y & x+z & 3x-2y\end{vmatrix}$$

$$=(-3,-1,2)$$

Μια παραμέτρηση της επιφάνειας S είναι η

$$\vec{r}(x,y)=(x,y,9-x^2-y^2), \quad (x,y)\in \overline{D}(3)$$

$$(\delta\eta\lambda.\ x^2+y^2\leq 9)$$

Έχουμε ότι

$$\vec{r}_x=(1,0,-2x), \quad \vec{r}_y=(0,1,-2y)$$

άρα

$$\vec{r}_x\times\vec{r}_y=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 0 & -2x\\ 0 & 1 & -2y\end{vmatrix}=(2x,2y,\underbrace{1}_{>0})$$

Συνεπώς το εξωτερικό μοναδιαίο κάθετο στο $\vec{r}(x,y)$

$$\vec{n}=\frac{\vec{r}_x\times\vec{r}_y}{\|\vec{r}_x\times\vec{r}_y\|}=\frac{1}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}(2x,2y,1)$$

Έπεται ότι

$$\operatorname{curl}\vec{F}\cdot\vec{n}=\frac{-6x-2y+2}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}$$

Υπολογίζουμε το επιφανειακό ολοκλήρωμα:

$$\iint_S \operatorname{curl}\vec{F}\cdot\vec{n}\,dS=\iint_{\overline{D}(3)}\frac{-6x-2y+2}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}\|\vec{r}_x\times\vec{r}_y\|\,dx\,dy$$

$$= \iint_{\overline{D}(3)} (-6x-2y+2)\,dx\,dy$$

$$= 18\pi - \iint_{\overline{D}(3)} (6x+2y)\,dx\,dy$$

$$= 18\pi$$ (με πολικές συντεταγμένες ή λόγω συμμετρίας)

Η καμπύλη $\gamma = \partial S$ δίνεται από την παραμέτρηση

$$\gamma(t) = (\underbrace{3\cos t}_{x(t)}, \underbrace{3\sin t}_{y(t)}, \underbrace{0}_{z(t)}), \quad t \in [0, 2\pi].$$

άρα $\gamma'(t) = (-3\sin t,\ 3\cos t,\ 0)$

Συνεπώς

$$\int_{\partial S} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \vec{F}(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \big(2z(t)-y(t),\ x(t)+z(t),\ 3x(t)-2y(t)\big)\cdot(-3\sin t, 3\cos t, 0)\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \big[(-3\sin t)(-3\sin t) + (3\cos t)(3\cos t)\big]\,dt$$

$$= 18\pi.$$