Αρμονική Ανάλυση: Ασκήσεις 1

(Παράδοση: 3 Νοεμβρίου 2010)

1. Η εκθετική συνάρτηση Ορίζουμε $\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$. Δείξτε ότι

• Η σειρά συγκλίνει απόλυτα για κάθε $z \in \mathbb{C}$.
• Η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα σε για κάθε *συμπαγές* υποσύνολο, όχι όμως ομοιόμορφα σε όλο το $\mathbb{C}$.
• $\exp(z+w) = \exp z \exp w$ για κάθε $z, w \in \mathbb{C}$.
• Η exp είναι ακέραια συνάρτηση και $\exp' = \exp$.
• Η συνάρτηση $\exp|_{\mathbb{R}}\mathbb{R} \to (0, +\infty)$ είναι γνησίως αύξουσα.
• $\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0,\ \lim_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty$.
• Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ισχύει $\exp(x+iy) = e^x(\cos x + i \sin y)$ (όπου $e^x = \exp x$).
• $|\exp(x+iy)| = \exp x$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.
• $\exp z = 1 \iff \exists k \in \mathbb{Z} : z = 2k\pi i$ (Η exp είναι περιοδική με περίοδο $2\pi i$.)
• Η exp απεικονίζει το $\mathbb{C}$ **επί** του $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

2. Το $[0, 2\pi)$ και η μοναδιαία περιφέρεια $\mathbb{T} = S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.
Δείξτε ότι η απεικόνιση $\chi : [0, 2\pi) \to \mathbb{T} :\ t \to e^{it}$
είναι 1-1 και επί. Είναι οι απεικονίσεις χ, χ^{-1} Borel μετρήσιμες; Είναι συνεχείς;

3. Αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ είναι 2π-περιοδική θέτουμε $\tilde{f}(e^{it}) = f(t)$ $(t \in \mathbb{R})$. Δείξτε ότι : (α) Η $f \to \tilde{f}$ είναι αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση (δηλ. 1-1 και επί) μεταξύ 2π-περιοδικών συναρτήσεων $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ και συναρτήσεων $\tilde{f} : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$.
(β) Η f είναι συνεχής αν και μόνον αν η $\tilde{f}$ είναι συνεχής.
(γ) Η f ανήκει στον $L^1([0, 2\pi])$ αν και μόνον αν $\tilde{f} \in L^1(\mathbb{T})$.
(δ) Κάθε $g : [0, 2\pi) \to \mathbb{C}$ επεκτείνεται μοναδικά σε 2π-περιοδική συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

4. Ο αρμονικός ταλαντωτής Αν $x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ είναι C^2 (δηλ. υπάρχει η x'' και είναι συνεχής) και $x'' + \omega^2 x = 0$ (όπου $\omega > 0$), δείξτε ότι υπάρχουν $a, b \in \mathbb{C}$ ώστε $x(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t$. [Υπόδειξη: Θέτουμε $g(t) = x(t) \cos \omega t - \frac{x'(t)}{\omega} \sin \omega t$ και $h(t) = x(t) \sin \omega t + \frac{x'(t)}{\omega} \cos \omega t$ και παραγωγίζουμε...]

5. Θεωρούμε την διαφορική εξίσωση $x'' + 2kx' + \omega^2 x = f$ όπου f συνεχής. Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Féjer, μπορούμε άραγε να λύσουμε τη Δ.Ε.; [Υπενθύμιση: Δεν είναι πάντα αλήθεια ότι η σειρά Fourier μιας συνεχούς συνάρτησης όπως η f συγκλίνει ...]

6. Μέθοδοι αθροισιμότητας Έστω (a_n) ακολουθία μιγαδικών αριθμών. Ορίζουμε

$$s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$$
$$\sigma_n = \frac{1}{n+1}(s_0 + s_1 + \cdots + s_n)$$
$$A(r) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k,\ r \in [0,1) \quad \text{αν η σειρά συγκλίνει}$$

Αν η (s_n) συγκλίνει, λέμε ότι η (a_n) είναι **αθροίσιμη**.
Αν η (σ_n) συγκλίνει, λέμε ότι η (a_n) είναι **Césaro αθροίσιμη**.
Αν το όριο $\lim_{r\to 1} A(r)$ υπάρχει, λέμε ότι η (a_n) είναι **Abel αθροίσιμη**.

Αποδείξτε ότι

(α) $\sigma_n = \sum_{k=0}^{n}\left(1 - \frac{k}{n+1}\right)a_k$.

(β) Αν η (a_n) είναι αθροίσιμη στο s, τότε είναι Césaro αθροίσιμη, και μάλιστα στο ίδιο s, αλλά το αντίστροφο δεν ισχύει [Παράδειγμα: $a_n = (-1)^n$].

(γ) Αν η (a_n) είναι Césaro αθροίσιμη στο s, τότε είναι Abel αθροίσιμη, και μάλιστα στο ίδιο s· το αντίστροφο δεν ισχύει [Παράδειγμα: $a_n = (-1)^n(n+1)$].

[Υπόδειξη: Απειρ. ΙΙβ, 31.54]

7. Ο πυρήνας του Dirichlet Αν $D_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}$, δείξτε ότι υπάρχει σταθερά c ώστε

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)|dt \geq c\log n.$$

[Υπόδειξη: $|D_n(x)| \geq c\frac{|\sin((N+1/2)x)|}{|x|}$.]