Αρμονική Ανάλυση: Ασκήσεις 2

(Παράδοση: Δευτέρα 29 Νοεμβρίου 2010)

1. Fubinito Αν $a_{n,m} \geq 0$ δείξτε ότι

$$\sum_n \left(\sum_m a_{n,m} \right) = \sum_m \left(\sum_n a_{n,m} \right)$$

με την έννοια ότι το αριστερά μέλος συγκλίνει (σε πραγματικό αριθμό) αν και μόνον αν το δεξιά μέλος συγκλίνει, και τότε τα δυο μέλη είναι ίσα.

2. Συνέλιξη χωρίς Fubini (α) Έστω $f \in C(\mathbb{T})$ και $g \in L^1(\mathbb{T})$. Προσεγγίζοντας την g με ακολουθία συνεχών συναρτήσεων, δείξτε ότι η συνέλιξη $f * g$ ορίζεται, είναι συνεχής συνάρτηση και κυρίως $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$.
(β) Με τις ίδιες υποθέσεις δείξτε ότι η συνέλιξη $g * f$ ορίζεται και ισούται με $f * g$.
(γ) Αν $f, g \in L^1(\mathbb{T})$, μπορούμε να επεκτείνουμε τον ορισμό της συνέλιξης $f * g$ και να πετύξουμε $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$ προσεγγίζοντας και την f με ακολουθία συνεχών συναρτήσεων;

3. Συνέχεια της δράσης της μετατόπισης Αν $T_t : L^p(\mathbb{T}) \to L^p(\mathbb{T})$ όπου $1 < p < \infty$ δείξαμε ότι για κάθε $f \in L^p(\mathbb{T})$ ισχύει $\lim_{t \to 0} \|T_t f - f\|_p = 0$ (κατά σημείο συνέχεια). Εξετάστε αν ισχύει $\lim_{t \to 0} \|T_t - I\|_{p \to p} = 0$ όπου $\|T\|_{p \to p}$ είναι η νόρμα ενός τελεστή $T : L^p(\mathbb{T}) \to L^p(\mathbb{T})$ δηλαδή $\|T\|_{p \to p} = \sup\{\|Tf\|_p : f \in L^p, \|f\|_p \leq 1\}$.

4. Δίκτυα Cauchy Έστω $(E, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα, π.χ. $E = L^p(\mathbb{T})$. Ένα δίκτυο (x_i) στον E είναι μια απεικόνιση $i \to x_i$ από ένα κατευθυνόμενο σύνολο $(I, \leq)$ στον E. Λέμε ότι $\lim_{i \in I} x_i = x$ αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $i_0 \in I$ ώστε για κάθε $i \in I$, $i \geq i_o$ ισχύει $\|x_i - x\| < \epsilon$. Λέμε ότι το (x_i) είναι Cauchy αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $i_0 \in I$ ώστε για κάθε $i, j \in I$ με $i \geq i_o$ και $j \geq i_o$ ισχύει $\|x_i - x_j\| < \epsilon$.
Δείξτε ότι ο $(E, \|\cdot\|)$ είναι πλήρης αν και μόνον αν κάθε δίκτυο Cauchy συγκλίνει στον E.

5. Συντελεστές Fourier και παραγωγισιμότητα Αν $f \in C^m$ δείξτε ότι $\hat{f}(k) = O(\frac{1}{|k|^m})$. Αν $\hat{f}(k) = O(\frac{1}{|k|^m})$ τι μπορείτε να συμπεράνετε για την παραγωγισιμότητα της f;

6. Αν $h \in L^1(\mathbb{T})$ και υπάρχει ανοικτό διάστημα J στο οποίο η h μηδενίζεται, δείξτε ότι η σειρά Fourier συγκλίνει στο 0 *ομοιόμορφα* στο J. [Υπόδειξη: Δείξτε ότι η οικογένεια $\{S_n(h)\}$ είναι ισοσυνεχής.]

7. Έστω $f \in L^\infty(\mathbb{T})$ με $\hat{f}(k) = O(\frac{1}{|k|})$. Δείξτε ότι $\sup_n \|S_n(f)\|_\infty < \infty$. [Υπόδειξη: $\|\sigma_n(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$.]

8. Δείξτε απευθείας ότι αν $f \in C(\mathbb{T})$ και επεκτείνουμε την f σε $\tilde{f} : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ θέτοντας $\tilde{f}(re^{it}) = (f * P_r)(t)$, τότε η $\tilde{f}$ είναι συνεχής στο $e^{it} \in \partial\mathbb{D}$.

9. Μοναδικότητα στο πρόβλημα Dirichlet Αν $g : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ είναι αρμονική στο $\mathbb{D}$ και $g = 0$ στο $\partial\mathbb{D}$ δείξτε ότι $g \equiv 0$.