Χαρακτήρες

Έστω G τοπικά συμπαγής αβελιανή ομάδα. Ένας **χαρακτήρας** της G είναι μια *συνεχής* απεικόνιση $\gamma : G \to \mathbb{T}$ που είναι μορφισμός ομάδων, δηλαδή $\gamma(x+y) = \gamma(x)\gamma(y)$.

Το σύνολο $\widehat{G}$ των χαρακτήρων είναι ομάδα με τις κατά σημείο πράξεις και λέγεται η *δυική ομάδα* της G.

1. Η δυική ομάδα $\widehat{\mathbb{Z}}$ της $\mathbb{Z}$ είναι ισομορφική με την $\mathbb{T}$.

Έστω $z \in \mathbb{T}$. Φαίνεται αμέσως ότι η απεικόνιση $\gamma_z : n \to z^n$ είναι χαρακτήρας της $\mathbb{Z}$.

Εύκολα ελέγχεται ότι η απεικόνιση

$$\mathbb{T} \to \widehat{\mathbb{Z}} : z \to \gamma_z$$

είναι μορφισμός ομάδων και μάλιστα 1-1. [1]

Δείχνουμε ότι είναι επί: Έστω $\gamma \in \widehat{\mathbb{Z}}$. Τότε $\gamma(1) := z_0 \in \mathbb{T}$. Για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ έχουμε

$$\gamma(n) = \gamma(n \cdot 1) = \gamma(1)^n = z_0^n.$$

2. Η δυική ομάδα $\widehat{\mathbb{R}}$ της $\mathbb{R}$ είναι ισομορφική με την $\mathbb{R}$.

Δεν είναι δύσκολο να δει κανείς ότι για κάθε $\xi \in \mathbb{R}$, η απεικόνιση ϕ_ξ όπου $\phi_\xi(t) = e^{i\xi t}$ είναι χαρακτήρας της $\mathbb{R}$.

Εύκολα ελέγχεται ότι η απεικόνιση

$$\mathbb{R} \to \widehat{\mathbb{R}} : \xi \to \phi_\xi$$

είναι 1-1 μορφισμός ομάδων.

Θα δείξουμε ότι είναι επί: Έστω $\phi \in \widehat{\mathbb{R}}$.

(α) Ισχυρισμός: Η ϕ είναι (όχι μόνο συνεχής, αλλά) παραγωγίσιμη· πράγματι, αν σταθεροποιησουμε ένα $a > 0$ ώστε $\int_0^a \phi(t)dt := b \neq 0$ τότε, από τη σχέση $\phi(x)\phi(t) = \phi(x+t)$ έχουμε

$$\begin{aligned} \phi(x)\int_0^a \phi(t)dt &= \int_0^a \phi(x+t)dt = \int_x^{a+x} \phi(s)ds \\ \text{δηλ. } \phi(x) &= \frac{1}{b}\left(\int_0^{a+x} \phi(s)ds - \int_0^x \phi(s)ds\right) \end{aligned}$$

Εφόσον η ϕ είναι συνεχής, από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού το δεξί μέλος της ισότητας παραγωγίζεται.

(β) Για κάθε $t \in \mathbb{R}$, έχουμε

$$\begin{aligned} \phi'(t) &= \lim_{x\to 0} \frac{\phi(t+x) - \phi(t)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\phi(t)\phi(x) - \phi(t)\phi(0)}{x} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\phi(x) - \phi(0)}{x}\phi(t) = \phi'(0)\phi(t) \\ \text{ή} \quad \phi' &= c\phi \end{aligned}$$

[1] $\gamma_{zw}(n) = (zw)^n = z^n w^n = \gamma_z(n)\gamma_w(n) = (\gamma_z\gamma_w)(n)$, και αν $\gamma_z(n) = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ τότε $z^n = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, άρα $z = 1$.

όπου $c = \phi'(0)$. Η διαφορική αυτή εξίσωση έχει μοναδική λύση

$$\phi(t) = \phi(0)e^{ct}.$$

Αλλά $\phi(0) = 1$ και η ϕ είναι φραγμένη, άρα $c = i\xi$ για κάποιο $\xi \in \mathbb{R}$. Άρα τελικά

$$\phi(t) = e^{i\xi t}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

3. Η δυική ομάδα $\widehat{\mathbb{T}}$ της $\mathbb{T}$ είναι ισομορφική με την $\mathbb{Z}$.

Είναι προφανές ότι για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ η απεικόνιση

$$\gamma_k : \mathbb{T} \to \mathbb{T} : z \to z^k$$

είναι χαρακτήρας και ότι η απεικόνιση

$$\mathbb{Z} \to \widehat{\mathbb{T}} : k \to \gamma_k$$

είναι μορφισμός ομάδων, και μάλιστα 1-1 (γιατί;)

Έστω $\gamma \in \widehat{\mathbb{T}}$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει $k := \xi \in \mathbb{Z}$ ώστε $\gamma = \gamma_k$.

Θεωρούμε την

$$\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{T} : t \to \gamma(e^{it}).$$

Είναι σύνθεση δύο συνεχών μορφισμών ομάδων, άρα είναι χαρακτήρας της $\mathbb{R}$. Άρα υπάρχει $\xi \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\phi(t) = e^{i\xi t}, \ \ t \in \mathbb{R}.$$

Επειδή όμως $\phi(t + 2\pi) = \gamma(e^{i(t+2\pi)}) = \gamma(e^{it}) = \phi(t)$ έχουμε $e^{i2\pi\xi} = 1$ πράγμα που δείχνει ότι $\xi \in \mathbb{Z}$. Συμπέρασμα: υπάρχει $k := \xi \in \mathbb{Z}$ ώστε

$$\gamma(z) = z^k \quad (z \in \mathbb{T}).$$

Δεύτερη απόδειξη ότι $\gamma = \gamma_k$.

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ γράφω

$$\mathbb{T}_n = \{z \in \mathbb{T} : z^n = 1\} = \{\omega_n, \omega_n^2, \ldots, \omega_n^{n-1}\}$$

όπου $\omega_n = \exp\left(2\pi i \frac{1}{n}\right)$.

(a) Παρατήρηση: Υπάρχει $k(n) = 0, 1, \ldots, n-1$ ώστε $\gamma(z) = z^{k(n)}$ για κάθε $z \in \mathbb{T}_n$.

Πράγματι: Εφόσον $\gamma(\omega_n)^n = \gamma(\omega_n^n) = 1$, ο $\gamma(\omega_n)$ ανήκει στην $\mathbb{T}_n$, άρα είναι κάποια δύναμη $\omega_n^{k(n)}$ του ω_n. Όμως κάθε $z \in \mathbb{T}_n$ είναι της μορφής $z = \omega_n^m$, οπότε

$$\gamma(z) = \gamma(\omega_n^m) = \gamma(\omega_n)^m = (\omega_n^{k(n)})^m = (\omega_n^m)^{k(n)} = z^{k(n)}.$$

Πάμε να δείξουμε ότι η $n \to k(n)$ είναι (τελικά) σταθερή.

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, έχουμε

$$\gamma\left(\exp\left(2\pi i \frac{1}{n}\right)\right) = \gamma(\omega_n) = \omega_n^{k(n)} = \exp\left(2\pi i \frac{k(n)}{n}\right).$$

(β) Ισχυρισμός: Η ακολουθία (a_n) όπου $a_n = \dfrac{k(n)}{n}$ συγκλίνει στο μηδέν.

Πράγματι, είναι φραγμένη ($a_n \in [0,1)$) και αν δεν συνέκλινε στο 0 θα είχε μια υπακολουθία, έστω (a_{m_n}), που θα συνέκλινε σε κάποιο $a \in (0,1]$. Τότε όμως $\exp(2\pi i a) = \lim_n \exp(2\pi i a_{m_n})$, αλλά

$$\exp(2\pi i a_{m_n}) = \exp\left(2\pi i \frac{k(m_n)}{m_n}\right) = (\omega_{m_n})^{k(m_n)} = \gamma(\omega_{m_n}) \overset{(!)}{\to} \gamma(1) = 1$$

(συνέχεια της γ) οπότε $a \in \mathbb{Z}$ άρα $a = \lim_n a_{m_n} = 0$ εφόσον $a_n \in [0,1)$.

(γ) Αν $z \in \mathbb{T}_n$ τότε $z \in \mathbb{T}_{2n}$ οπότε από το (α)

$$z \in \mathbb{T}_n \Rightarrow \gamma(z) = z^{k(n)} \quad \text{και} \quad z \in \mathbb{T}_{2n} \Rightarrow \gamma(z) = z^{k(2n)}, \quad \text{άρα} \quad z^{k(n)} = z^{k(2n)}$$

οπότε θέτοντας $z = \omega_n$ έχουμε

$$\exp\left(2\pi i \frac{k(n)}{n}\right) = \exp\left(2\pi i \frac{k(2n)}{n}\right).$$

Κατά συνέπεια, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ η ακολουθία $\dfrac{k(n)}{n} - \dfrac{k(2n)}{n}$ παίρνει ακέραιες τιμές· αφού συγκλίνει στο 0, θα είναι τελικά (δηλ. για μεγάλα n) ίση με 0. Δηλαδή υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να έχουμε $\dfrac{k(n)}{n} = \dfrac{k(2n)}{n}$, άρα $k(2n) = k(n)$. Επομένως έχουμε διαδοχικά

$$k(n_0) = k(2n_0) = k(2^2 n_0) = \cdots = k(2^l n_0)$$

για κάθε $l \in \mathbb{N}$. Γράφοντας $k := k(n_0)$ προκύπτει

$$\text{για κάθε } l \in \mathbb{N} \text{ και κάθε } \ z \in \mathbb{T}_{2^l n_0}, \quad \gamma(z) = z^k.$$

Η ισότητα αυτή ισχύει λοιπόν για κάθε $z = e^{2\pi i x}$ όπου $x = \dfrac{r}{2^l n_0}$, άρα και $x = \dfrac{m n_0}{2^l n_0} = \dfrac{m}{2^l}$, με $m, l \in \mathbb{N}$. Όμως οι δυαδικοί μη αρνητικοί ρητοί είναι πυκνοί στο $\mathbb{R}_+$, άρα η σχέση $\gamma(z) = z^k$ ισχύει για κάθε $z = e^{2\pi i x}$, $x \in \mathbb{R}_+$, δηλαδή για κάθε $z \in \mathbb{T}$.