Καλώς ήρθατε στην Αρμονική Ανάλυση

http://eclass.uoa.gr/courses/MATH287/

Εαρινό εξάμηνο 2016-2017

Σειρές Fourier συνεχών συναρτήσεων

Συμβολισμοί

$$\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \simeq S^1 = \{e^{it} : t \in (-\pi, \pi]\}$$

$$C(\mathbb{T}) := \{f : \mathbb{T} \to \mathbb{C} \ \text{ συνεχής}\}$$

$$\|f\|_p = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p dt\right)^{1/p} (1 \le p < \infty),$$

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(t)| : t \in \mathbb{T}\}$$

$$(\text{άρα} \qquad \|f\|_1 \le \|f\|_p \le \|f\|_\infty)$$

$$\langle g, h\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g\bar{h}, \ f, g, h \in C(\mathbb{T}))$$

$$e_k(t) = e^{ikt} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Συμβολίζουμε με $\mathscr{P} \subseteq C(\mathbb{T})$ τον γραμμικό χώρο των *τριγωνομετρικών πολυωνύμων*, $p = \sum\limits_{k=-n}^{n} c_k e_k$ και με $\mathscr{P}_n$ τον υπόχωρο των πολυωνύμων βαθμού το πολύ n. *Βαθμός:* ο μικρότερος $n \in \mathbb{N}$ ώστε $|c_{-n}| + |c_n| \neq 0$.

Σειρές Fourier συνεχών συναρτήσεων

Ορισμός (Συντελεστές Fourier)

Έστω $f \in C(\mathbb{T})$. *Ορίζουμε*

$$\hat{f}(k) = \langle f, e_k \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

$$S_n(f)(t) = \sum_{k=-n}^{k=n} \hat{f}(k) e^{ikt} \quad (n \in \mathbb{N}, t \in [-\pi, \pi]).$$

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $S_n(f)$ είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο.

Παρατήρηση

Για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ *έχουμε* $|\hat{f}(k)| \le \|f\|_1$, *δηλαδή*

$$\hat{f} := (\hat{f}(k))_{k \in \mathbb{Z}} \in \ell^\infty(\mathbb{Z}) \quad \textit{και} \quad \|\hat{f}\|_\infty \le \|f\|_1 .$$

Σειρές Fourier συνεχών συναρτήσεων

Πρόταση (Βέλτιστης μέσης τετραγωνικής προσέγγισης)

Έστω $f \in C(\mathbb{T})$ και $n \in \mathbb{N}$. Τότε για κάθε τριγωνομετρικό πολυώνυμο p βαθμού το πολύ n ισχύει

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f-p|^2 \geq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f-S_n(f)|^2$$

$$\text{δηλαδή } \|f-p\|_2 \geq \|f-S_n(f)\|_2 \,.$$

Ισότητα ισχύει αν και μόνον αν $p = S_n$.
Ειδικότερα αν $m \leq n$ τότε $\quad \|f-S_m(f)\|_2 \geq \|f-S_n(f)\|_2$.

Απόδειξη:

$$\|f-p\|_2^2 \overset{Pyth}{=} \|f-S_n(f)\|_2^2 + \|S_n(f)-p\|_2^2 \,. \qquad (1)$$

Σειρές Fourier συνεχών συναρτήσεων

Θεωρώντας γνωστό [1] ότι $\overline{\mathscr{P}}^{\|\cdot\|_\infty} = C(\mathbb{T})$:

Πρόταση

Αν $f \in C(\mathbb{T})$, *τότε*

$$S_n(f) \xrightarrow{\|\cdot\|_2} f$$

δηλαδή

$$\lim_n \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |S_n(f)(t) - f(t)|^2 dt = 0.$$

Θέτοντας $p = 0$ στην (1) έχουμε

$$\|f - S_n(f)\|_2^2 = \|f\|^2 - \|S_n(f)\|_2^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\hat{f}(k)|^2$$

από την οποία προκύπτουν αμέσως τα επόμενα πορίσματα:

[1] π.χ. από Stone-Weierstrass, δες Παράρτημα (*)

Σειρές Fourier συνεχών συναρτήσεων

Πόρισμα

Αν $f \in C(\mathbb{T})$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\sum_{|k| \leq n} |\hat{f}(k)|^2 \leq \|f\|_2^2 .$$

Ισότητα ισχύει αν και μόνον αν $f = S_n(f)$, δηλαδή αν και μόνον αν η f είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο βαθμού το πολύ n.

Πόρισμα (Bessel)

Αν $f \in C(\mathbb{T})$, $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(k)|^2 \leq \|f\|_2^2$ άρα $\hat{f} := (\hat{f}(k))_{k \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$.

Πόρισμα (Parseval)

Αν $f \in C(\mathbb{T})$,

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(k)|^2 = \|f\|_2^2 .$$

άρα η απεικόνιση

$$\mathscr{F} : (C(\mathbb{T}), \|\cdot\|_{L^2}) \to (\ell^2(\mathbb{Z}), \|\cdot\|_{\ell^2}) : f \to \hat{f}$$

είναι (γραμμική) ισομετρία. Μάλιστα, για κάθε $f, g \in C(\mathbb{T})$,

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k)\overline{\hat{g}(k)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}dt,$$

$$\text{δηλαδή} \quad \left\langle \hat{f}, \hat{g} \right\rangle_{\ell^2} = \langle f, g \rangle_{L^2} .$$

Πόρισμα (Μοναδικότητα)

Αν $f, g \in C(\mathbb{T})$ και $\hat{f}(k) = \hat{g}(k)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, τότε $f = g$.

Απόδειξη Η συνάρτηση $|f - g|^2$ είναι μη αρνητική και συνεχής και

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f-g|^2 = \|f-g\|_2^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(k) - \hat{g}(k)|^2 = 0.$$

Έπεται ότι $|f - g|^2 = 0$, άρα $f = g$. $\square$

Παράρτημα: Θεώρημα Stone – Weierstrass

Έστω X συμπαγής μετρικός χώρος (ή, γενικότερα, συμπαγής χώρος Hausdorff) και έστω $C(X)$ η μιγαδική άλγεβρα όλων των συνεχών συναρτήσεων $f : X \to \mathbb{C}$ (με πράξεις κατά σημείο και τη νόρμα supremum). Έστω

$$\mathscr{A} \subseteq C(X)$$

με τις εξής ιδιότητες

(1) είναι υπάλγεβρα (δηλ. περιέχει το άθροισμα και το γινόμενο των στοιχείων της)

(2) περιέχει τις σταθερές συναρτήσεις (δηλ. $\mathbf{1} \in \mathscr{A}$)

(3) χωρίζει τα σημεία του X (δηλ. αν $f(x) = f(y)$ για κάθε $f \in \mathscr{A}$ τότε $x = y$)

(4) περιέχει το συζυγές κάθε στοιχείου της (δηλ. $f \in \mathscr{A} \Rightarrow \bar{f} \in \mathscr{A}$).

Τότε η $\mathscr{A}$ είναι ομοιόμορφα πυκνή στην $C(X)$.

(Δες το αρχείο `stoneweixe.pdf`.)

Θεώρημα Fέjer

Θεώρημα (Féjer)

Αν $f \in C(\mathbb{T})$ *τότε* $\lim_{n\to\infty} \|\sigma_n(f) - f\|_\infty = 0$.

Έπεται αμέσως

Πόρισμα (Μοναδικότητα)

Αν $f, g \in C(\mathbb{T})$ *και* $\hat{f}(k) = \hat{g}(k)$ *για κάθε* $k \in \mathbb{Z}$, *τότε* $f = g$.

... διότι $\sigma_n(f) = \sigma_n(g)$ για κάθε n.

Πόρισμα

Αν $f \in C(\mathbb{T})$ *και συμβεί η σειρά Fourier της* f *να συγκλίνει, έστω και μόνο στο* t, *τότε* $S_n(f)(t) \to f(t)$.

... διότι αν $S_n(f)(t) \to g(t)$, τότε και η ακολουθία μέσων όρων $\sigma_n(f)(t) \to g(t)$ θα συγκλίνει στο ίδιο όριο. Αλλά $\sigma_n(f)(t) \to f(t)$.

Συνέλιξη και πυρήνες

Αν $f, g \in C(\mathbb{T})$, ορίζουμε *συνέλιξη των f και g* τη συνάρτηση $h = f * g : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ που δίνεται από τον τύπο

$$(f * g)(x) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-s)g(s)ds, \quad x \in \mathbb{T}.$$

Παρατήρηση

$$S_n(f)(t) = \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k)e^{ikt} = \int_{-\pi}^{\pi} f(t-s)D_n(s)\frac{ds}{2\pi} = (f * D_n)(t)$$

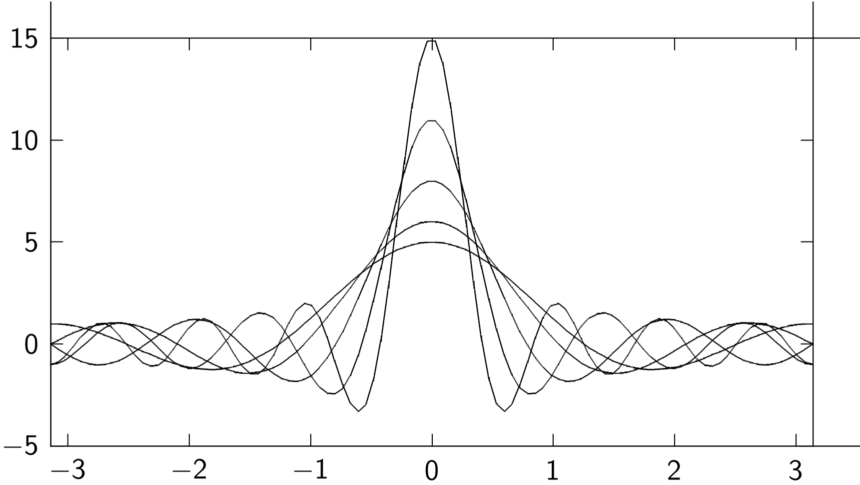
όπου $\quad D_n(s) = \sum_{k=-n}^{n} \exp(iks)$

και $\sigma_m(f)(t) = \frac{1}{m+1} \sum_{n=0}^{m} S_n(f)(t) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t-s)K_m(s)\frac{ds}{2\pi} = (f * K_m)(t)$

όπου $\quad K_m(x) = \frac{1}{m+1} \sum_{n=0}^{m} \sum_{k=-n}^{n} \exp(ikx).$

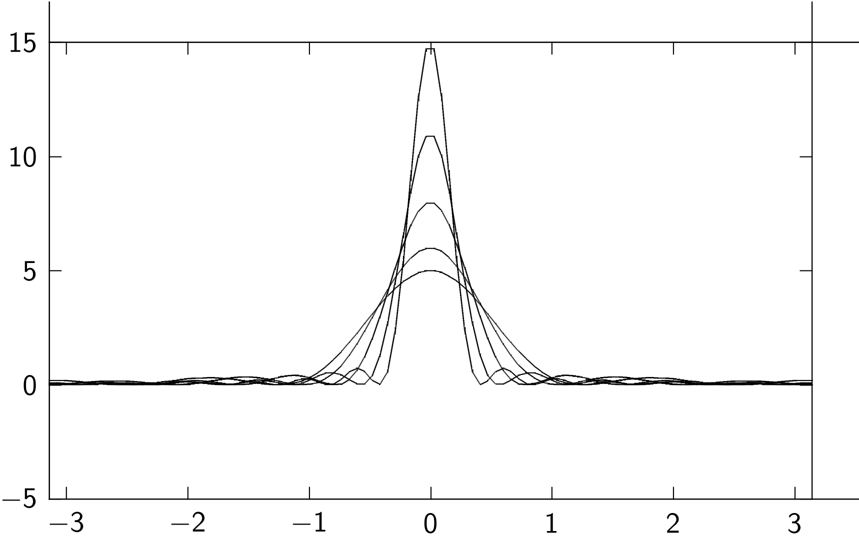
Η ακολουθία τριγωνομετρικών πολυωνύμων (K_m) λέγεται πυρήνας του Féjer και η ακολουθία (D_m) λέγεται πυρήνας του Dirichlet.

Ο πυρήνας του Dirichlet



Ο πυρήνας του Dirichlet για $n = 2, 3, 4, 5, 7$.

Ο πυρήνας του Féjer



Ο πυρήνας του Féjer για $m = 4, 5, 7, 10, 14$.

Θεώρημα Féjer: Ιδέα της Απόδειξης

Ο πυρήνας του Féjer έχει τις εξής ιδιότητες:

(α) Υπάρχει M ώστε $\|K_m\|_1 \leq M$ για κάθε m.

(β) Αν $\delta \in (0,\pi)$ και $E_\delta = [-\pi,-\delta] \cup [\delta,\pi]$, τότε $\lim_m \int_{E_\delta} |K_m| = 0$.

(γ) $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_m(x)dx = 1$ για κάθε m.

$$(\beta) \Rightarrow \sigma_m(f)(t) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t-s)K_m(s)\frac{ds}{2\pi} \approx \int_{-\delta}^{\delta} f(t-s)K_m(s)\frac{ds}{2\pi}$$

f ομοιόμορφα συνεχής $\Rightarrow \int_{-\delta}^{\delta} f(t-s)K_m(s)\frac{ds}{2\pi} \approx f(t)\left(\int_{-\delta}^{\delta} K_m(s)\frac{ds}{2\pi}\right)$

$$\int_{-\delta}^{\delta} K_m(s)\frac{ds}{2\pi} \overset{(\beta)}{\approx} \int_{-\pi}^{\pi} K_m(s)\frac{ds}{2\pi} \overset{(\gamma)}{=} 1.$$

Συνεπώς τελικά $\sigma_m(f)(t) \approx f(t)$.

Υπενθύμιση: χώροι L^p

Αν $p \in [1, \infty)$, με το σύμβολο $\mathscr{L}^p(\mathbb{T})$ εννοούμε το σύνολο των μετρησίμων *συναρτήσεων* $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ που ικανοποιούν

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p dm(t) < \infty \quad \text{(μέτρο Lebesgue)}.$$

Γράφουμε

$$\|f\|_p := \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p \frac{dm(t)}{2\pi} \right)^{1/p}.$$

Παρατηρούμε ότι $\|f\|_p = 0$ αν και μόνον αν $f(t) = 0$ *m-σχεδόν για κάθε t*.

Υπενθύμιση: χώροι L^p

Με το σύμβολο $L^p(\mathbb{T})$ συμβολίζουμε τον χώρο των κλάσεων ισοδυναμίας $[f]$, των $f \in \mathscr{L}^p(\mathbb{T})$, modulo ισότητα σχεδόν παντού.

Ο $L^p(\mathbb{T})$ είναι γραμμικός χώρος και η $\|\cdot\|_p$ είναι νόρμα στον $L^p(\mathbb{T})$ ως προς την οποία ο $L^p(\mathbb{T})$ είναι χώρος Banach (Θεώρημα Riesz-Fisher).

Αν $1 \leq p \leq q < \infty$ και f μετρήσιμη, έχουμε

$$\|f\|_p \leq \|f\|_q \leq \|f\|_\infty, \text{ άρα } \quad C(\mathbb{T}) \subseteq L^q(\mathbb{T}) \subseteq L^p(\mathbb{T}) \subseteq L^1(\mathbb{T}).$$

Σειρές Fourier συναρτήσεων κλάσεως $\mathscr{L}^2$

Ορισμός (Συντελεστές Fourier)

Έστω $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{T})$. *Ορίζουμε*

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f e_{-k}\, dm = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt}\, dm(t) \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$

Παρατηρήσεις. (α) Η συνάρτηση $S_n(f) = \sum_{|k|\le n} \hat{f}(k) e_k$ είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο, άρα συνεχής (και 2π-περιοδική) συνάρτηση, όποια κι αν είναι η $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{T})$.
(β) Αν $f = g$ σχεδόν παντού, τότε $\hat{f}(k) = \hat{g}(k)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. Αντίστροφα;

Πρόταση

Αν $f \in \mathscr{L}^2(\mathbb{T})$, *τότε* $S_n(f) \xrightarrow{\|\cdot\|_2} f$ *δηλαδή*

$$\lim_n \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |S_n(f) - f|^2 dm = 0.$$

Σειρές Fourier συναρτήσεων κλάσεως $\mathscr{L}^2$

Πρόταση (Ισότητα Parseval)

Αν $f, g \in \mathscr{L}^2(\mathbb{T})$, *τότε*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty}|\hat{f}(k)|^2 \quad \textit{και} \quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\bar{g} = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\hat{f}(k)\overline{\hat{g}(k)}.$$

... άρα η ανισότητα Bessel $\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\hat{f}(k)|^2 \leq \|f\|_2^2$ ισχύει για κάθε $f \in \mathscr{L}^2(\mathbb{T})$.

Πόρισμα

Η απεικόνιση

$$\mathscr{F}_2 : (L^2(\mathbb{T}), \|\cdot\|_2) \to (\ell^2(\mathbb{Z}), \|\cdot\|_2) : f \to \hat{f}$$

είναι καλά ορισμένη γραμμική ισομετρία.
(Μοναδικότητα) Ειδικότερα, η $f \to \hat{f}$ *είναι 1-1 στον* $L^2(\mathbb{T})$*: αν* $\hat{f}(k) = \hat{g}(k)$ *για κάθε* $k \in \mathbb{Z}$, *τότε οι* f *και* g *ορίζουν το ίδιο στοιχείο του* $L^2(\mathbb{T})$, *είναι δηλαδή ίσες σχεδόν παντού.*

Σειρές Fourier συναρτήσεων κλάσεως $\mathscr{L}^2$

Η $(C(\mathbb{T}), \|\cdot\|_{L^2}) \to (\ell^2(\mathbb{Z}), \|\cdot\|_{\ell^2}) : f \to (\hat{f}(k))_k \in \mathbb{Z}$ είναι ισομετρία, άρα 1-1, με πυκνή εικόνα, αλλά όχι επί. Η πληρότητα του $L^2(\mathbb{T})$ δίνει:

Πρόταση

Η $\mathscr{F}_2$ απεικονίζει τον $L^2(\mathbb{T})$ επί του $\ell^2(\mathbb{Z})$:
Αν $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2 < +\infty$ τότε υπάρχει $f \in \mathscr{L}^2(\mathbb{T})$ ώστε $\hat{f}(k) = c_k$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. Μάλιστα αν $s_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikt}$ ισχύει ότι $\|f - s_n\|_2 \to 0$.

Σειρές Fourier συναρτήσεων κλάσεως $\mathscr{L}^1$

Πρόταση (Riemann - Lebesgue)

Αν $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{T})$, τότε

$$\lim_{k \to +\infty} \hat{f}(k) = \lim_{k \to -\infty} \hat{f}(k) = 0.$$

Δηλαδή

$$\mathscr{F}_1 : (L^1(\mathbb{T}), \|\cdot\|_1) \to (c_0(\mathbb{Z}), \|\cdot\|_\infty) : f \to \hat{f}$$

είναι γραμμική, συνεχής, με πυκνή εικόνα. Είναι 1-1; Ναι!

Πρόταση (Μοναδικότητα)

Αν $f, g \in \mathscr{L}^1(\mathbb{T})$ και $\hat{f}(k) = \hat{g}(k)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, τότε $f = g$ σχεδόν παντού.

Είναι επί; ΟΧΙ! (εξήγηση αργότερα...)

Η συνέλιξη: πρώτα στον $\ell^1(\mathbb{Z})$

$$\text{Αν } p(t) = \sum_{k=-N}^{N} a_k e^{ikt} \quad \text{και} \quad q(t) = \sum_{k=-N}^{N} b_k e^{ikt}$$

$$\text{τότε} \quad p(t)q(t) = \sum_n \left(\sum_k a_k b_{n-k} \right) e^{int} .$$

Γράφουμε $(c_k) = (a_k) * (b_k)$ όπου $c_n = \sum_k a_k b_{n-k}$.

Λήμμα

Αν $a = (a_n)$ και $b = (b_n)$ είναι στον $\ell^1(\mathbb{Z})$, τότε (α) η σειρά $c_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k b_{n-k}$ συγκλίνει απόλυτα και (β) η ακολουθία (c_n) ανήκει στον $\ell^1(\mathbb{Z})$ και

$$\|c\|_1 \leq \|a\|_1 \, \|b\|_1 .$$

Η συνέλιξη: πιθανοθεωρητικά

X, Y ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με πεπερασμένο πλήθος τιμών.

$$\begin{aligned} P[X+Y=z] &= \sum_y P[X+y=z|Y=y]\cdot P[Y=y] \\ &= \sum_y P[X=z-y|Y=y]\cdot P[Y=y] \end{aligned}$$

Ανεξάρτητες: $P[X=z-y|Y=y]=P[X=z-y]$ άρα

$$P[X+Y=z]=\sum_y P[X=z-y]\cdot P[Y=y]$$

Δηλαδή,

$$p_{X+Y}(z)=\sum_y p_X(z-y)\cdot p_Y(y) \quad \text{δηλαδή} \quad p_X * p_Y = p_{X+Y}.$$

Η άλγεβρα Wiener ή Fourier

Πρόταση

Αν $f, g : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ είναι δύο συναρτήσεις με απολύτως συγκλίνουσες σειρές Fourier, τότε και το κατά σημείο γινόμενο $h(t) = f(t)g(t)$ έχει απολύτως συγκλίνουσα σειρά Fourier και μάλιστα

$$\hat{h} = \hat{f} * \hat{g}$$

$$\text{οπότε} \qquad \sum_n |\hat{h}(n)| \le \sum_k |\hat{f}(k)| \sum_m |\hat{g}(m)|.$$

Ορισμός

Η άλγεβρα Wiener ή Fourier $A(\mathbb{T})$ είναι το σύνολο των συναρτήσεων $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ που ικανοποιούν $\sum_k |\hat{f}(k)| < \infty$.

Είναι άλγεβρα με τις πράξεις κατά σημείο. Είναι χώρος Banach ως προς τη νόρμα $\|f\|_A = \sum_k |\hat{f}(k)|$. Περιέχεται στην άλγεβρα $C(\mathbb{T})$, αλλά δεν είναι πλήρης ως προς τη νόρμα $\|\cdot\|_\infty$.

Άλγεβρες Banach

Ορισμός

Μια άλγεβρα Banach είναι μια (πραγματική ή μιγαδική) άλγεβρα $(\mathscr{A}, +, \cdot)$ εφοδιασμένη με μια νόρμα που είναι (α) υποπολλαπλασιαστική, δηλ. $\|a \cdot b\| \le \|a\| \, \|b\|$ και (β) πλήρης, δηλ. ο χώρος $(\mathscr{A}, \|\cdot\|)$ είναι πλήρης μετρικός χώρος.

Παραδείγματα (α) Οι μιγαδικοί αριθμοί $(\mathbb{C}, |\cdot|)$.

(β) Αν X συμπαγής χώρος Hausdorff (πχ. συμπαγής μετρικός χώρος) ο χώρος $C(X)$ με πράξεις κατά σημείο και νόρμα $\|\cdot\|_\infty$.

(γ) Αν $(E, \|\cdot\|_E)$ είναι χώρος Banach, ο χώρος $\mathscr{B}(E)$ των συνεχών γραμμικών απεικονίσεων $T : E \to E$ με πρόσθεση κατά σημείο, πολλαπλασιασμό την σύνθεση απεικονίσεων και $\|T\| := \sup\{\|Tx\|_E : x \in E, \|x\|_E \le 1\}$, είναι άλγεβρα Banach.

(δ) Ο χώρος $(\ell^1, \|\cdot\|_1)$ με πρόσθεση και πολλαπλασιασμό κατά συντεταγμένη, είναι άλγεβρα Banach.

(ε) Ο χώρος $(\ell^1, \|\cdot\|_1)$ με πρόσθεση κατά συντεταγμένη και πολλαπλασιασμό την συνέλιξη, είναι άλλη άλγεβρα Banach.

(ζ) Η άλγεβρα Wiener με πρόσθεση και πολλαπλασιασμό κατά συντεταγμένη και νόρμα $\|\cdot\|_\infty$, είναι άλγεβρα με υποπολλαπλασιαστική νόρμα, αλλά όχι πλήρης. Με τις ίδιες πράξεις, αλλά με την νόρμα $\|\cdot\|_A$ είναι άλγεβρα Banach.

Η Συνέλιξη στον $L^1(\mathbb{R})$

Αν $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ είναι συνεχείς συναρτήσεις με συμπαγή φορέα (γράφουμε $f, g \in C_c(\mathbb{R})$), τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση $y \to f(x-y)g(y)$ είναι συνεχής με συμπαγή φορέα και άρα το ολοκλήρωμα Riemann

$$(f * g)(x) \equiv \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy$$

υπάρχει και ορίζει μια συνάρτηση $f * g \in C_c(\mathbb{R})$.

Ο ορισμός επεκτείνεται για $f, g \in L^1(\mathbb{R})$:

Υπενθύμιση: Θεωρήματα Tonelli και Fubini

Μέτρο γινόμενο

Έστω $(X, \mathscr{A}, \mu)$ και $(Y, \mathscr{B}, \nu)$: χώροι σ-πεπερασμένου μέτρου.

Γράφω $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B} = \sigma(\{A \times B : A \in \mathscr{A}, B \in \mathscr{B}\})$.

Υπάρχει μοναδικό σ-πεπερασμένο μέτρο $\pi = \mu \otimes \nu$ στην $\mathscr{C}$ ώστε

$$\pi(A \times B) = \mu(A)\nu(B) \quad \text{για κάθε } A \in \mathscr{A}, B \in \mathscr{B}.$$

Για παράδειγμα, όταν $X = Y = \mathbb{R}$ τότε το μέτρο $m \otimes m$ είναι το διδιάστατο μέτρο Lebesgue m_2, δηλαδή
$m_2([a,b] \times [c,d]) = m([a,b])m([c,d]) = (b-a)(c-d)$.

Υπενθύμιση: Θεωρήματα Tonelli και Fubini

Θεώρημα (Tonelli)

Έστω $h : X \times Y \to [0, +\infty]$. Αν η h είναι $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$-μετρήσιμη, τότε
(α) οι συναρτήσεις

$$X \to [0, +\infty] : \; x \to \int_Y h(x, y) d\nu(y)$$
$$Y \to [0, +\infty] : \; y \to \int_X h(x, y) d\mu(x)$$

είναι $\mathscr{A}$- (αντιστοίχως $\mathscr{B}$)-μετρήσιμες και
(β) το $\int_{X \times Y} hd(\mu \otimes \nu)$ είναι ίσο με τα διαδοχικά ολοκληρώματα:

$$\begin{aligned} \int_X \left(\int_Y h(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) &= \int_Y \left(\int_X h(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y) \\ &= \int_{X \times Y} hd(\mu \otimes \nu). \end{aligned}$$

Υπενθύμιση: Θεωρήματα Tonelli και Fubini

Θεώρημα (Fubini)

Έστω $f \in \mathscr{L}^1(X \times Y, \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}, \mu \otimes \nu)$. *Τότε*

(α) μ*-σχεδόν για κάθε* $x \in X$ *ισχύει ότι* $\int_Y |f(x,y)|d\nu(y) < +\infty$ *και* ν*-σχεδόν για κάθε* $y \in Y$ *ισχύει ότι* $\int_X |f(x,y)|d\mu(x) < +\infty$

(β) οι (σχεδόν παντού ορισμένες) συναρτήσεις

$$x \to \int_Y f(x,y)d\nu(y) \quad \text{και} \quad y \to \int_X f(x,y)d\mu(x)$$

ορίζουν στοιχεία του $L^1(X, \mathscr{A}, \mu)$ *(αντιστοίχως* $L^1(Y, \mathscr{B}, \nu)$*) και*

(γ) ισχύουν οι ισότητες

$$\begin{aligned}\int_X \left(\int_Y f(x,y)d\nu(y) \right) d\mu(x) &= \int_Y \left(\int_X f(x,y)d\mu(x) \right) d\nu(y) \\ &= \int_{X \times Y} fd(\mu \otimes \nu).\end{aligned}$$

Η Συνέλιξη στον $L^1(\mathbb{R})$

Θεωρούμε δυο συναρτήσεις $f, g \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$ και ορίζουμε την

$$\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C} : (x,y) \to f(x-y)g(y).$$

- Η ϕ είναι Borel.
- Δείχνουμε ότι είναι $\mathscr{L}^1(\mathbb{R}^2)$, δηλ. ότι

$$\int_{\mathbb{R}^2} |f(x-y)g(y)| dm_2(x,y) < \infty.$$

(κρίσιμο: $\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)| dx = \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx$: αναλλοίωτο του m.)

- Τότε από Fubini ορίζεται, σχεδόν για κάθε x, η

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y) dy$$

και είναι $L^1(\mathbb{R})$ με $\|f * g\|_1 \leq \|g\|_1 \|f\|_1$.

Η Συνέλιξη στον $L^1(\mathbb{R})$

Παρατήρηση:
Αν $f = f'$ σ.π. και $g = g'$ σ.π., τότε $f * g = f' * g'$ σ.π.
Άρα ορίζεται μια απεικόνιση

$$(L^1(\mathbb{R}), \|\cdot\|_1) \times (L^1(\mathbb{R}), \|\cdot\|_1) \to (L^1(\mathbb{R}), \|\cdot\|_1) : (f,g) \to f * g$$

προφανώς διγραμμική.
Επειδή $\|f * g\|_1 \leq \|g\|_1 \|f\|_1$, η $*$ είναι συνεχής!

Λήμμα

Η συνέλιξη είναι (διγραμμική) μεταθετική και προσεταιριστική στον L^1: αν οι f, g, h ανήκουν στον L^1 τότε

$$(i) \quad f * g = g * f \quad \text{και} \quad (ii) \quad (f * g) * h = f * (g * h).$$

Απόδ.: Αρκεί στον $C_c(\mathbb{R})$.

Υπενθύμιση: Ο $L^\infty(X,\mathscr{S},\mu)$

Αν $(X,\mathscr{S},\mu)$ είναι χώρος μέτρου, μία $f:X\to\mathbb{C}$ ανήκει στον $\mathscr{L}^\infty(X,\mathscr{S},\mu)$ αν (α) είναι $\mathscr{S}$-μετρήσιμη και
(β) είναι ουσιωδώς φραγμένη (essentially bounded),
δηλ. υπάρχει $M<+\infty$ ώστε $|f(x)|\le M$ σχεδόν παντού,
δηλ. $\mu(\{x\in X:|f(x)>M\})=0$.

Ο μικρότερος τέτοιος M (υπάρχει και) λέγεται το ουσιώδες φράγμα (essential supremum) της $|f|$.
Δηλ. ορίζουμε
$\|f\|_\infty := \mathrm{esssup}|f| := \min\{M:\mu(\{x\in X:|f(x)>M\})=0\}$.

Αν $f\in\mathscr{L}^\infty(X,\mathscr{S},\mu)$, τότε
$\|f\|_\infty=0$ ανν $f(x)=0$ μ-σχεδόν για κάθε $x\in X$.

Ο $L^\infty(X,\mathscr{S},\mu)$ είναι ο χώρος των κλάσεων ισοδυναμίας, modulo ισότητα μ-σχεδόν παντού, συναρτήσεων του $\mathscr{L}^\infty(X,\mathscr{S},\mu)$.

Η $\|\cdot\|_\infty$ είναι νόρμα στον $L^\infty(X,\mathscr{S},\mu)$, που γίνεται άλγεβρα Banach με τις πράξεις κατά σημείο.

Η δράση του $\mathbb{R}$ στον $L^p(\mathbb{R})$

Λήμμα (Αναλλοίωτο του m σε μεταφορές και ανάκλαση)

Αν η $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ ανήκει στον $\mathscr{L}^1$ τότε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}} f(y-x)dy = \int_{\mathbb{R}} f(t)dt \qquad \textit{και} \qquad \int_{\mathbb{R}} f(-y)dy = \int_{\mathbb{R}} f(t)dt.$$

Επομένως αν $f_x(y)=f(y-x)$ τότε $f_x\in\mathscr{L}^1$ και

$$\|f_x\|_1 = \|f\|_1 \quad \textit{για κάθε} \;\; x\in\mathbb{R}.$$

Πρόταση

Έστω $p\in[1,\infty]$. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ η απεικόνιση $T_x : g\to g_x$ είναι μια καλά ορισμένη γραμμική ισομετρία $L^p(\mathbb{R})\to L^p(\mathbb{R})$ $(\|g_x\|_p = \|g\|_p)$.
Επίσης $T_{x+y}=T_x\circ T_y$ και $T_x^{-1}=T_{-x}$,
άρα η $\{T_x : x\in\mathbb{R}\}$ αποτελεί ομάδα ισομετριών.

Η δράση του $\mathbb{R}$ στον $L^p(\mathbb{R})$

Πρόταση

Αν $f \in C_0(\mathbb{R})$ η απεικόνιση

$$\mathbb{R} \to (C_0(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty) : x \to f_x$$

είναι ομοιόμορφα συνεχής.
Αυτό δεν είναι εν γένει αληθές όταν $f \in L^\infty(\mathbb{R})$.

Πρόταση

Έστω $p \in [1, \infty)$. Για κάθε $f \in L^p(\mathbb{R})$ η απεικόνιση

$$\mathbb{R} \to (L^p(\mathbb{R}), \|\cdot\|_p) : x \to f_x$$

είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Η δράση της συνέλιξης στον $L^p(\mathbb{R})$

Πρόταση

Έστω $f \in L^1(\mathbb{R})$. *Για κάθε* $p \in [1,\infty)$, *αν* $g \in L^p(\mathbb{R})$ *τότε* $g * f \in L^p(\mathbb{R})$ *και*

$$\|g * f\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p .$$

Δηλαδή η απεικόνιση $C_f : g \to g * f$ *είναι φραγμένος τελεστής* $L^p(\mathbb{R}) \to L^p(\mathbb{R})$ *με νόρμα το πολύ* $\|f\|_1$.

$$C_f(\mathbf{g}) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\mathbf{g_t} dt.$$

Όταν $f \geq 0$ και $\int f(t)dt = 1$, η $C_f(\mathbf{g})$ είναι η συνάρτηση - μέσος όρος των συναρτήσεων $\{\mathbf{g_t} : t \in \mathbb{R}\}$ ως προς το μέτρο με πυκνότητα f.

Προσεγγιστικές μονάδες, καλοί πυρήνες ...

Ορισμός

Έστω $(\mathscr{A}, *, \|\cdot\|)$ *μια άλγεβρα Banach. Μια ακολουθία* (u_n) *όπου* $u_n \in A$ *λέγεται προσεγγιστική μονάδα (approximate identity) για την* $\mathscr{A}$ *αν για κάθε* $f \in \mathscr{A}$ *έχουμε* $\|f - (u_n * f)\| \to 0$ *και* $\|f - (f * u_n)\| \to 0$.

Προσεγγιστικές μονάδες, καλοί πυρήνες ...

Θεώρημα

Αν μια ακολουθία (u_n) *όπου* $u_n \in L^1(\mathbb{R})$ *έχει τις ιδιότητες*

(α) *Υπάρχει* M *ώστε* $\|u_n\|_1 \leq M$ *για κάθε* n.

(β) *Για κάθε* $\delta \in (0, \pi)$ *ισχύει* $\lim_m \int_{(-\delta,\delta)^c} |u_m(x)| dx = 0$.

(γ) $\int_{\mathbb{R}} u_n(x) dx = 1$ *για κάθε* n

τότε η (u_n) *είναι προσεγγιστική μονάδα για την* $L^1(\mathbb{R})$.
Μάλιστα για κάθε $p \in [1, \infty)$ *και κάθε* $f \in L^p(\mathbb{R})$ *έχουμε* $u_n * f \in L^p(\mathbb{R})$ *για κάθε* n *και* $\|f - (u_n * f)\|_p \to 0$.
Επιπλέον αν η f *είναι ομοιόμορφα συνεχής* *και φραγμένη* [2] *τότε η* $u_n * f$ *είναι ομοιόμορφα συνεχής για κάθε* n *και* $\|f - (u_n * f)\|_\infty \to 0$.

---

[2] Ευχαριστώ για την διόρθωση

Υπενθύμιση

Ορισμός

Μία γραμμική απεικόνιση $T : (E, \|.\|_E) \to (F, \|.\|_F)$ μεταξύ χώρων με νόρμα λέγεται φραγμένος τελεστής (bounded operator) αν ο περιορισμός της T στην μοναδιαία μπάλα του E είναι φραγμένη συνάρτηση.

Αν $T : E \to F$ είναι γραμμική απεικόνιση, θέτουμε

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\|_F : x \in E, \|x\|_E \leq 1\} \in [0, +\infty].$$

Η T είναι φραγμένη αν και μόνον αν $\|T\| < +\infty$.
Μια γραμμική απεικόνιση T είναι συνεχής αν και μόνον αν είναι φραγμένος τελεστής.

Παράδειγμα Αν $f \in L^1(\mathbb{R})$ η απεικόνιση $C_f : L^p \to L^p : g \to f * g$ είναι φραγμένος τελεστής με νόρμα $\|C_f\|_p \leq \|f\|_1$.

Υπενθύμιση

Ορισμός

Αν $(X, \|\cdot\|)$ είναι χώρος με νόρμα, ο τοπολογικός δυϊκός X^* του X είναι ο γραμμικός χώρος όλων των γραμμικών και συνεχών απεικονίσεων $\phi : X \to \mathbb{K}$, δηλαδή $X^* = \mathscr{B}(X, \mathbb{K})$ (εδώ $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$).

Αν ο X είναι χώρος με νόρμα, τότε ο X^* με νόρμα την $\|\phi\| = \sup\{|\phi(x)| : \|x\|_X = 1\}$ είναι χώρος Banach.

Παράδειγμα Έστω $1 \leq p \leq \infty$, $q = \infty$ αν $p = 1$ και $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$ αν $p > 1$. Κάθε $h \in L^q(\mathbb{R})$ ορίζει μια $\phi_h \in (L^p(\mathbb{R}))^*$ από τον τύπο

$$\phi_h(f) = \int f(s)h(s)ds, \; f \in L^p(\mathbb{R})$$

και $\|\phi_h\| = \|h\|_q$. Η απεικόνιση $h \to \phi_h : L^q(\mathbb{R}) \to (L^p(\mathbb{R}))^*$ είναι γραμμική ισομετρία, και είναι επί ανν $p < \infty$.

Υπενθύμιση: Θεώρημα Hahn-Banach

Θεώρημα

Έστω X χώρος με νόρμα, Y γραμμικός υπόχωρος του X, και $\phi : Y \to \mathbb{K}$ φραγμένη γραμμική μορφή.
*Τότε, υπάρχει $\tilde{\phi} : X \to \mathbb{K}$ φραγμένη **γραμμική** μορφή με $\tilde{\phi}|_Y = \phi$ **και** $\|\tilde{\phi}\| = \|\phi\|_{Y^*}$. (Δηλαδή, υπάρχει συνεχής και γραμμική επέκταση της ϕ στον X, με διατήρηση της νόρμας.)*

Πόρισμα

*Έστω X **πραγματικός ή μιγαδικός** χώρος με νόρμα, και $x \in X$. Τότε,*
$$\|x\| = \max\{|\phi(x)| : \phi \in X^*, \|\phi\| = 1\}.$$

Πόρισμα (Ο X^* χωρίζει τα σημεία)

Αν $x, y \in X$ με $x \neq y$, $X \neq \{0\}$, τότε υπάρχει $\phi \in X^*$ με $\phi(x) \neq f(y)$.

Ολοκλήρωση συναρτήσεων με τιμές σε χώρους Banach

Αν $(\Omega, \mathscr{S}, \mu)$ είναι χώρος μέτρου και $(X, \|\cdot\|)$ είναι χώρος Banach, μια $F : \Omega \to X$ λέγεται ασθενώς μετρήσιμη (αντ. ασθ. ολοκληρώσιμη) αν για κάθε $\phi \in X^*$ η $\phi \circ F : \Omega \to \mathbb{C}$ είναι μετρήσιμη (αντ. ολοκληρώσιμη).
Λέμε ότι το ολοκλήρωμα $\int F d\mu$ υπάρχει αν υπάρχει ένα στοιχείο $y \in X$ ώστε

$$\phi(y) = \int \phi(F(\omega)) d\mu(\omega)$$

δηλ. $\phi\left(\int F(\omega) d\mu(\omega)\right) = \int \phi(F(\omega)) d\mu(\omega)$ για κάθε $\phi \in X^*$.

Ολοκλήρωση συναρτήσεων με τιμές σε χώρους Banach

Θεώρημα

Έστω X χώρος Banach, Q συμπαγής χώρος Hausdorff (π.χ. συμπαγής μετρικός) και μ ένα κανονικό μέτρο Borel πιθανότητας στον Q. Για κάθε συνεχή συνάρτηση $F : Q \to X$ το ολοκλήρωμα $\int F d\mu$ υπάρχει και ανήκει στην κλειστή κυρτή θήκη του συνόλου τιμών $F(Q)$ της F. Επιπλέον ισχύει η ανισότητα

$$\left\| \int F(\omega) d\mu(\omega) \right\|_X \leq \int \|F(\omega)\|_X \, d\mu(\omega)$$

(γνωστή και ως «ανισότητα Minkowski για ολοκληρώματα»).

Όμως:

$$f * g = \int_{\mathbb{R}} f(t) g_t dt, \quad f \in L^1(\mathbb{R}), g \in L^p(\mathbb{R}).$$

Εδώ $t \to g_t : \mathbb{R} \to L^p(\mathbb{R})$ συνεχής, $\mathbb{R}$ μη συμπαγής.
Χρησιμοποιούμε το

Ολοκλήρωση συναρτήσεων με τιμές σε χώρους Banach

Θεώρημα

Έστω X χώρος Banach, Ω τοπικά συμπαγής χώρος Hausdorff (π.χ. $\Omega = \mathbb{R}^n$) και μ ένα κανονικό μέτρο Borel στον Ω. Για κάθε L^1-συνάρτηση $f : \Omega \to \mathbb{C}$ και κάθε συνεχή και φραγμένη συνάρτηση $G : \Omega \to X$ το ολοκλήρωμα $\int fGd\mu$ υπάρχει και ανήκει στην κλειστή γραμμική θήκη του συνόλου τιμών της G. Επιπλέον ισχύει η ανισότητα

$$\left\| \int f(\omega)G(\omega)d\mu(\omega) \right\|_X \leq \sup_{\omega} \|G(\omega)\|_X \int |f(\omega)|d\mu(\omega).$$

Θεώρημα (Mazur)

Αν $(X, \|\cdot\|)$ είναι χώρος Banach και $K \subseteq X$ είναι $\|\cdot\|$-συμπαγές, τότε η κλειστή κυρτή θήκη $\overline{\mathrm{conv}(K)}$ του K είναι $\|\cdot\|$-συμπαγής.

Παραδείγματα

Οι τριγωνομετρικές σειρές $f(x) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sin kx}{\log k}$ και $g(x) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sin kx}{k \log k}$ συγκλίνουν για κάθε x.

Απόδ. Αν $x \in (0, 2\pi)$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \sin kx \right| \leq \frac{1}{\left| \sin \frac{x}{2} \right|}.$$

Επιπλέον για κάθε $\delta > 0$ η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων είναι ομοιόμορφα φραγμένη στο διάστημα $[\delta, 2\pi - \delta]$:
Για κάθε $x \in [\delta, 2\pi - \delta]$ και κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \sin kx \right| \leq \frac{1}{\sin \frac{\delta}{2}}. \qquad \rightsquigarrow$$

Παραδείγματα

Υπενθύμιση:

Πρόταση (Dirichlet)

Έστω (a_k) ακολουθία συναρτήσεων $a_k : X \to \mathbb{C}$ και (b_k) ακολουθία αριθμών. Αν

$$(i) \text{ υπάρχει } M < \infty \text{ ώστε } \forall t \in X, \forall n \in \mathbb{N}, : \left|\sum_{k=1}^{n} a_k(t)\right| \leq M,$$

$$(ii)\ b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_n \geq 0$$

και $(iii)\ b_n \to 0,$

τότε η σειρά $\sum_k b_k a_k$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο X.

Συμπέρασμα Για κάθε $\delta > 0$, οι σειρές $f(x) = \displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sin kx}{\log k}$ και $g(x) = \displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sin kx}{k \log k}$ συγκλίνουν ομοιόμορφα στο $[\delta, 2\pi - \delta]$.
Άρα ορίζουν συνεχείς συναρτήσεις στο $(0, 2\pi)$.

Παραδείγματα

Η σειρά $g(x) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sin kx}{k \log k}$ συγκλίνει ομοιόμορφα, άρα είναι συνεχής στο $[0, 2\pi]$ και είναι σειρά Fourier.

Απόδ: Γράψε $g(x) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\log k} \frac{\sin kx}{k}$, παρατήρησε ότι τα $\sum_{k=2}^{N} \frac{\sin kx}{k}$ είναι ομοιόμορφα φραγμένα στο $[0, 2\pi]$ (γιατί η σειρά συγκλίνει στο $(0, 2\pi)$ και προφανώς στα άκρα) και εφάρμοσε Dirichlet! $\square$

Αλλά δεν συγκλίνει απόλυτα: $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \log k} = +\infty$. Δεν είναι στην άλγεβρα Fourier $A(\mathbb{T})$:

$$\mathscr{P} \subsetneq A(\mathbb{T}) \subsetneq C(\mathbb{T}).$$

Μια τριγωνομετρική σειρά που δεν είναι σειρά Fourier

Η σειρά $f(x) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sin kx}{\log k}$ δεν ορίζει συνεχή συνάρτηση στο $[0, 2\pi]$ (παρόλο που συγκλίνει). Γιατί θα έπρεπε $\sum_{k=2}^{\infty} \left| \frac{1}{\log k} \right|^2 = \|f\|_{L^2}^2 < \infty$ (Parseval).

Χειρότερα: δεν είναι σειρά Fourier καμμιάς συνάρτησης του $L^1(\mathbb{T})$! Διότι:

Πρόταση

Αν $h \in L^1(\mathbb{T})$ *και* $\hat{h}(|n|) = -\hat{h}(-|n|) \geq 0$ *για κάθε* $n \in \mathbb{Z}$ *τότε*

$$\sum_{k \neq 0} \frac{1}{k} \hat{h}(k) < \infty.$$

... αν η f ήταν L^1, θα έπρεπε $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \log k} < +\infty$.

Άλλη άσκηση

Αν $f \in \mathscr{L}^\infty(\mathbb{R})$ και το όριο $\lim_{x\to 0} \|f_x - f\|_\infty$ υπάρχει και είναι 0, τότε η f είναι σχεδόν παντού ίση με μια ομοιόμορφα συνεχή συνάρτηση.

Έστω $\mathscr{G}$ προσεγγιστική μονάδα για τον $L^1(\mathbb{R})$ από άρτιες συναρτήσεις g με $\|g\|_1 \leq 1$. Ορίζω

$$\phi_g(s) = (f * g)(s), \quad g \in \mathscr{G}$$

Πρώτο βήμα Η οικογένεια $\Phi = \{\phi_g : g \in \mathscr{G}\}$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη και ισοσυνεχής.

Άρα από Ascoli σε κάθε $[-M, M]$ υπάρχει ακολουθία (ϕ_n) στην Φ που συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[-M, M]$. Βρίσκω έτσι μια $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ομοιόμορφα συνεχή και φραγμένη.

Δεύτερο βήμα Δείχνω ότι $\phi_n(x) \to f(x)$ σχεδόν για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα, $\tilde{f}(x) = f(x)$ σχεδόν για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Θεώρημα (Ascoli)

Έστω (X, d) συμπαγής μετρικός χώρος και (ϕ_n) μια ακολουθία συναρτήσεων $\phi_n : X \to \mathbb{C}$ που είναι
(α) ισοσυνεχής και (β) ομοιόμορφα φραγμένη
Τότε η (ϕ_n) έχει μια υπακολουθία που συγκλίνει ομοιόμορφα.

Ισοσυνεχής: για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ ώστε αν $d(x, y) < \delta$ τότε $|\phi_n(x) - \phi_n(y)| < \varepsilon$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$
Ομοιόμορφα φραγμένη: υπάρχει $M > 0$ ώστε $|\phi_n(x)| \leq M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και κάθε $x \in X$.

Σειρές ημιτόνων και σειρές συνημιτόνων

Πρόταση (Ημίτονα)

Αν $h \in L^1(\mathbb{T})$ *και* $\hat{h}(|n|) = -\hat{h}(-|n|) \geq 0$ *για κάθε* $n \in \mathbb{Z}$ *τότε*

$$\sum_{k \neq 0} \frac{1}{k} \hat{h}(k) < \infty .$$

Πρόταση (Συνημίτονα)

Έστω (a_n) *μηδενική ακολουθία μη αρνητικών αριθμών, με την ιδιότητα* $a_{n-1} + a_{n+1} - 2a_n \geq 0$ *για κάθε* n*. Υπάρχει τότε* $f \in L^1(\mathbb{T})$ *μη αρνητική ώστε* $\hat{f}(n) = \hat{f}(-n) = a_n$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$*.*

Βήματα της απόδειξης (i) Αν $b_n = a_n - a_{n+1}$, τότε $(\sum b_n = a_0$ και$)$ $nb_n \to 0$.

(ii) Αν $c_n = n(a_n - 2a_{2n} + a_{n+1})$, τότε $(c_n \geq 0$ και$)$ $\sum\limits_{n=m}^{\infty} c_n = a_{m-1}$.

(iii) Η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n K_{n-1}$ συγκλίνει απόλυτα ως προς τη $\|\cdot\|_1$, άρα ορίζει $f \in L^1(\mathbb{T})$, $f \geq 0$ και, για κάθε $m \in \mathbb{Z}$,

$$\hat{f}(m) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \hat{K}_{n-1}(m) = \sum_{n=|m|+1}^{\infty} c_n \left(1 - \frac{n}{|m|}\right) = a_{|m|}. \qquad \square$$

Αθροισιμότητα στον $L^p(\mathbb{T})$

Παρατήρηση Ο πυρήνας του Féjer (K_m) ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρ. 4, άρα είναι προσεγγιστική μονάδα για τον $L^p(\mathbb{T})$. Αλλά $\sigma_m(f) = K_m * f$, άρα

Θεώρημα

Έστω $p \in [1, \infty)$ και $f \in L^p(\mathbb{T})$. Τότε

$$\lim_{m\to\infty} \|\sigma_m(f) - f\|_p = 0.$$

Πόρισμα (Μοναδικότητα, τρίτη απόδειξη)

Αν $f, g \in \mathscr{L}^1(\mathbb{T})$ και $\hat{f} = \hat{g}$ τότε $f = g$ σχεδόν παντού.

Παρατήρηση

Αν $f \in L^\infty(\mathbb{T})$, δεν ισχύει πάντα $\lim_{m\to\infty} \|\sigma_m(f) - f\|_\infty = 0$. Ισχύει όμως «ασθενώς-$*$», δηλαδή για κάθε $g \in L^1(\mathbb{T})$ έχουμε

$$\lim_m \langle \sigma_m(f), g\rangle = \langle f, g\rangle$$

όπου $\langle f, g\rangle = \dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}dt.$

Παράδειγμα: f συνεχής με $\limsup |S_n(f,0)| = \infty$

Αν

$$p_n(x) = e^{i2nx} \sum_{1\le|k|\le n} \frac{e^{ikx}}{k}.$$

δείξαμε ότι υπάρχει M ώστε $|p_n(x)| \le M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επίσης η συνάρτηση $\hat{p}_n : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$,

$$\hat{p}_n(m) = \sum_{1\le|k|\le n} \frac{1}{k} \hat{e}_{2n-k}(m)$$

φέρεται στο $[n, 2n) \cup (2n, 3n]$. Θέτουμε, για μια υπακολουθία (n_k)

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} p_{n_k}(x),$$

Συγκλίνει ομοιόμορφα, άρα f συνεχής. Αν όμως $n_k = 2^{2^k}$, $k = 1, 2, \ldots$, τότε

$$|S_{3n_k}(0) - S_{2n_k}(0)| = \left| \sum_{n=2n_k+1}^{3n_k} \hat{f}(n) \right| = \frac{1}{k^2} \sum_{m=1}^{n_k} \frac{1}{m} \ge \frac{1}{k^2} \log(n_k) \to \infty.$$

Υπενθύμιση: Η αρχή ομοιομόρφου φράγματος

Έστω E χώρος Banach και $\mathscr{P} = \{p_i\}$ μια οικογένεια από *συνεχείς* ημινόρμες $p : E \to \mathbb{R}$.
Τότε

είτε η $\mathscr{P}$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη, δηλαδή υπάρχει M ώστε $p(x) \leq M \|x\|$ για κάθε $x \in E$ και κάθε $p \in \mathscr{P}$

ή αλλιώς το σύνολο $B = \{x \in E : \sup_i p_i(x) = \infty\}$ είναι πυκνό G_δ.

Αποκλίνουσες σειρές Fourier

Για κάθε $t \in (-\pi, \pi]$, το σύνολο

$$B_t := \{f \in C(\mathbb{T}) : \sup_m |S_m(f,t)| = \infty\},$$

των συνεχών συναρτήσεων που η σειρά Fourier τους στο συγκεκριμένο σημείο t δεν είναι καν φραγμένη, είναι «τοπολογικά μεγάλο» σύνολο: είναι πυκνό και G_δ στον πλήρη μετρικό χώρο $(C(\mathbb{T}), \|\cdot\|_\infty)$.
Επίσης πυκνό και G_δ είναι το σύνολο των συνεχών συναρτήσεων που η σειρά Fourier τους δεν είναι φραγμένη σε κανένα ρητό:

$$B := \{f \in C(\mathbb{T}) : \sup_m |S_m(f,q)| = \infty \ \forall q \in \mathbb{Q}\}$$

Συντελεστές Fourier ενός μέτρου

Όταν $f \in L^1(\mathbb{T})$,

$$\hat{f}(k) := \int e^{-ikt} f(t) \frac{dt}{2\pi}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Γενικότερα,

Ορισμός

Αν μ είναι κανονικό (θετικό) μέτρο Borel στο $\mathbb{T}$ ορίζουμε

$$\hat{\mu}(k) := \int e^{-ikt} d\mu(t), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ισχύει $|\hat{\mu}(k)| \leq \mu(\mathbb{T})$ για κάθε k, αλλά όχι πάντα $\lim_{|k|\to\infty} \hat{\mu}(k) = 0$, πχ. $\mu = \delta_0$.

Θεώρημα (Μοναδικότητα)

Αν μ, ν είναι κανονικά (θετικά) μέτρα Borel στο $\mathbb{T}$ με $\hat{\mu}(k) = \hat{\nu}(k)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, τότε $\mu = \nu$.

Συντελεστές Fourier ενός μέτρου

Κάθε $f \in L^1(\mathbb{T})$ ορίζει γραμμική μορφή $\phi_f : C(\mathbb{T}) \to \mathbb{C}$:

$$\phi_f(g) := \int g(t)f(t)dt \quad (g \in C(\mathbb{T})).$$

Παρατήρηση

Η ϕ_f είναι θετική γραμμική μορφή (δηλ. $g \geq 0 \Rightarrow \phi_f(g) \geq 0$) αν και μόνον αν $f(t) \geq 0$ σχεδόν παντού.

Πρόταση

Μια $f \in L^1(\mathbb{T})$ είναι μη αρνητική σχεδόν παντού αν και μόνον αν οι συντελεστές Fourier της f ικανοποιούν τη σχέση

$$\sum_{n,m} \hat{f}(n-m)c_n\bar{c}_m \geq 0 \quad \text{για κάθε } c = (c_m) \in c_{00}(\mathbb{Z}).$$

Ακολουθίες θετικού τύπου (of positive type)

Ορισμός

Μια ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ μιγαδικών αριθμών λέγεται ***θετικού τύπου*** *αν*

$$\sum_{n,m} a_{n-m} c_n \bar{c}_m \geq 0 \quad \text{για κάθε } c=(c_m)\in c_{00}(\mathbb{Z}).$$

Η (a_n) είναι θετικού τύπου αν και μόνον αν, για κάθε $n\in\mathbb{N}$, ο $(n+1)\times(n+1)$ πίνακας Toeplitz

$$A=\begin{bmatrix} a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \dots & a_{-n} \\ a_1 & a_0 & a_{-1} & \dots & a_{-n+1} \\ \vdots & \vdots & a_0 & & \\ & & & \ddots & \\ a_n & a_{n-1} & \dots & & a_0 \end{bmatrix}$$

είναι θετικός, δηλ. $\langle Ac,c\rangle \geq 0$ για κάθε $c=(c_m)\in\ell^2(n+1)$.

Ακολουθίες θετικού τύπου και θετικά μέτρα

Παρατήρηση Αν μ θετικό μέτρο, τότε $(\hat{\mu}(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ θετικού τύπου.

Θεώρημα (Herglotz)

Αν (a_n) είναι μια ακολουθία θετικού τύπου, τότε υπάρχει μοναδικό θετικό μέτρο Borel στο $\mathbb{T}$ ώστε

$$\hat{\mu}(k) = a_k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Χρησιμοποιεί:

Θεώρημα (Riesz)

Για κάθε θετική γραμμική μορφή $\phi : C(\mathbb{T}) \to \mathbb{C}$ υπάρχει μοναδικό (θετικό) μέτρο Borel μ στο $\mathbb{T}$ ώστε

$$\phi(g) = \int g d\mu \quad \text{για κάθε } g \in C(\mathbb{T}).$$

Θεώρημα (Féjer – Riesz)

Αν ένα τριγ. πολυώνυμο $p \in \mathscr{P}$ είναι γνησίως θετικό, αν δηλαδή $p(e^{it}) > 0$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$, τότε υπάρχει $q \in \mathscr{P}$ ώστε $p = |q|^2$.

Ο δυικός του $L^p(\mu)$

Αν $1 \le p \le +\infty$ και $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ ή $(p,q)=(1,+\infty)$ ή $(p,q)=(+\infty,1)$, για κάθε $g \in L^q(X,\mathscr{S},\mu)$ ορίζουμε

$$\phi_g : L^p(\mu) \to \mathbb{C} : f \to \int_X fg d\mu\,.$$

Τότε $\phi_g \in (L^p(\mu))^*$ και $\|\phi_g\| \le \|g\|_q$.

Θεώρημα

Αν $p \in [1,\infty)$ και μ είναι σ-πεπερασμένο, για κάθε συνεχή γραμμική μορφή $\phi : L^p(\mu) \to \mathbb{C}$ υπάρχει μοναδική $g \in L^q(\mu)$ με $\|g\|_q \le \|\phi_g\|$ ώστε $\phi = \phi_g$.
Επομένως η απεικόνιση

$$g \to \phi_g : L^q(\mu) \to (L^p(\mu))^*$$

είναι γραμμική ισομετρία επί.

(Για $p=+\infty$ είναι ισομετρική εμφύτευση.)

Ο δυικός του $L^p(\mu)$

Λήμμα

Έστω $\mu(X) < \infty$ *και* $g \in L^1(\mu)$. *Αν υπάρχει* $M < \infty$ *ώστε*

$$\left| \int_X fg d\mu \right| \leq M \|f\|_q \quad \text{για κάθε απλή } f$$

τότε $g \in L^q(\mu)$ *και* $\|g\|_q \leq M$.

Άλγεβρα Banach: Ορισμός

Μία (προσεταιριστική) άλγεβρα $\mathscr{A}$ είναι ένας (μιγαδικός) γραμμικός χώρος που είναι συγχρόνως δακτύλιος και ισχύει $(\lambda x)y = \lambda(xy) = x(\lambda y)$ για κάθε $x, y \in \mathscr{A}$ και $\lambda \in \mathbb{C}$. Μία άλγεβρα λέγεται μεταθετική αν $xy = yx$ για κάθε $x, y \in \mathscr{A}$.

Ένας υπόχωρος $\mathscr{J} \subseteq \mathscr{A}$ λέγεται (γνήσιο) αριστερό (αντίστοιχα δεξιό) ιδεώδες της $\mathscr{A}$ αν $x \in \mathscr{A}, y \in \mathscr{J} \Rightarrow xy \in \mathscr{J}$ (αντίστοιχα $yx \in \mathscr{J}$). Αν ένα ιδεώδες είναι δεξιό και αριστερό τότε λέγεται αμφίπλευρο ιδεώδες ή απλά ιδεώδες.

Αν $\mathscr{A}$ είναι μία άλγεβρα και $\|.\|$ είναι μία νόρμα στην $\mathscr{A}$ με την επιπλέον ιδιότητα

$$\|x.y\| \leq \|x\|.\|y\|$$

για κάθε $x, y \in \mathscr{A}$, τότε η $\mathscr{A}$ λέγεται άλγεβρα με νόρμα ή νορμαρισμένη άλγεβρα. Αν επιπλέον η $(\mathscr{A}, \|.\|)$ είναι πλήρης, τότε η $\mathscr{A}$ λέγεται άλγεβρα Banach.

Παραδείγματα αλγεβρών Banach

- Το σώμα των μιγαδικών αριθμών $(\mathbb{C}, |.|)$ είναι άλγεβρα Banach. Θα δείξουμε αργότερα (Θεώρημα Gelfand-Mazur) ότι είναι «η μόνη» διαιρετική άλγεβρα Banach.
- Έστω $\Gamma \neq \emptyset$ σύνολο. Το σύνολο $(\ell^\infty(\Gamma), \|.\|_\infty)$ είναι άλγεβρα Banach ως προς τις πράξεις κατά σημείο και την νόρμα $\|f\|_\infty = \sup\{|f(\gamma)| : \gamma \in \Gamma\}$. Είναι μεταθετική άλγεβρα με μονάδα $\mathbf{1}$, όπου $\mathbf{1}(\gamma) = 1$ για κάθε $\gamma \in \Gamma$.
- Έστω K συμπαγής Hausdorff τοπολογικός χώρος (π.χ. $K = [0,1]$). Η άλγεβρα $(C(K), \|.\|_\infty)$ των συνεχών συναρτήσεων $f : K \to \mathbb{C}$ είναι (κλειστή υπάλγεβρα του $\ell^\infty(K)$, άρα) άλγεβρα Banach, μεταθετική και με μονάδα (την σταθερή συνάρτηση $\mathbf{1}$).

Παραδείγματα αλγεβρών Banach

- Έστω X τοπικά συμπαγής Hausdorff τοπολογικός χώρος (π.χ. $X = \mathbb{R}$) και $C_0(X)$ το σύνολο των συνεχών συναρτήσεων $f : X \to \mathbb{C}$ που «μηδενίζονται στο άπειρο». (Δηλαδή μία συνεχής f ανήκει στον $C_0(X)$ ανν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $K_\varepsilon \subseteq X$ συμπαγές ώστε $t \notin K_\varepsilon \Rightarrow |f(t)| < \varepsilon$.) Επειδή ο $C_0(X)$ είναι και $\|.\|_\infty$-κλειστός (άσκηση), είναι (μεταθετική) άλγεβρα Banach. Παρατηρούμε όμως ότι δεν έχει μονάδα, εκτός αν ο X είναι συμπαγής (άσκηση).
- Αν $(X, \mathscr{S}, \mu)$ είναι χώρος μέτρου, ο $L^\infty(X, \mathscr{S}, \mu)$ είναι ο χώρος των κλάσεων ισοδυναμίας, modulo ισότητα μ-σχεδόν παντού, μετρήσιμων και ουσιωδώς φραγμένων συναρτήσεων $f : X \to \mathbb{C}$. Με τη νόρμα $\|f\|_\infty := \mathrm{esssup}|f|$ και με τις πράξεις κατά σημείο, ο $L^\infty(X, \mathscr{S}, \mu)$ γίνεται άλγεβρα Banach.

Παραδείγματα αλγεβρών Banach

- Η άλγεβρα Wiener ή Fourier $A(\mathbb{T})$ είναι το σύνολο των συναρτήσεων $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ που ικανοποιούν $\sum_k |\hat{f}(k)| < \infty$. Είναι άλγεβρα με τις πράξεις κατά σημείο. Είναι άλγεβρα Banach ως προς τη νόρμα $\|f\|_A = \sum_k |\hat{f}(k)|$.
- Η χώρος Banach $(L^1(\mathbb{R}), \|.\|_1)$ των Lebesgue ολοκληρώσιμων συναρτήσεων $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ γίνεται μεταθετική άλγεβρα Banach χωρίς μονάδα αν εφοδιασθεί με την συνέλιξη

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)g(t-s)ds.$$

- Αν $(E, \|\cdot\|_E)$ είναι χώρος Banach (ή χώρος Hilbert), ο χώρος $\mathscr{B}(E)$ των συνεχών γραμμικών απεικονίσεων $T : E \to E$ με πρόσθεση κατά σημείο, πολλαπλασιασμό την σύνθεση απεικονίσεων και $\|T\| := \sup\{\|Tx\|_E : x \in E, \|x\|_E \leq 1\}$, είναι άλγεβρα Banach.

Η ομάδα των αντιστρεψίμων στοιχείων

Έστω $\mathscr{A}$ άλγεβρα με μονάδα $\mathbf{1}$. Ένα $x \in \mathscr{A}$ λέγεται **αντιστρέψιμο** αν υπάρχει $y \in \mathscr{A}$ ώστε $xy = \mathbf{1} = yx$. Το y, αν υπάρχει, είναι μοναδικό και συμβολίζεται x^{-1}. Το σύνολο $\mathrm{Inv}(\mathscr{A})$ ή $\mathscr{A}^{-1}$ των αντιστρεψίμων στοιχείων της $\mathscr{A}$ είναι (εν γένει μη αβελιανή) ομάδα.

Λήμμα

Αν $x \in \mathscr{A}$ και $\|x\| < 1$ τότε το $(\mathbf{1} - x)^{-1}$ υπάρχει.

Λήμμα

Αν $b \in \mathrm{Inv}(\mathscr{A})$, $y \in \mathscr{A}$ και $\|y\| < (2\|b^{-1}\|)^{-1}$, τότε $b - y \in \mathrm{Inv}(\mathscr{A})$ και

$$\|(b-y)^{-1} - b^{-1}\| < 2\|b^{-1}\|^2.\|y\|$$

Θεώρημα

(α) Το σύνολο $\mathrm{Inv}(\mathscr{A})$ είναι ανοικτό στην $\mathscr{A}$.
(β) Η απεικόνιση $b \mapsto b^{-1} : \mathrm{Inv}(\mathscr{A}) \to \mathrm{Inv}(\mathscr{A})$ είναι συνεχής (άρα ομοιομορφισμός).

Το φάσμα ενός $x \in \mathscr{A}$

Αν T είναι γραμμικός φραγμένος τελεστής σ΄ έναν χώρο Banach X το σύνολο $\sigma_p(T) \equiv \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \text{ όχι 1-1}\}$ είναι το σύνολο των ιδιοτιμών του T, ενδεχομένως κενό. Όμως θα δούμε ότι το $\sigma(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \notin \mathrm{Inv}(\mathscr{B}(X))\}$ δεν είναι ποτέ κενό.

Ορισμός

Έστω $\mathscr{A}$ άλγεβρα Banach με μονάδα και $x \in \mathscr{A}$. Το φάσμα $\sigma(x)$ του x είναι το σύνολο

$$\sigma(x) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \mathbf{1} - x \notin \mathrm{Inv}(\mathscr{A})\}.$$

Το φάσμα ενός $x \in \mathscr{A}$

Αν $\mathscr{A}$ είναι άλγεβρα Banach χωρίς μονάδα, ορίζουμε

$$\mathscr{A}^+ = \mathscr{A} \oplus C := \{(a,\lambda) : a \in \mathscr{A}, \lambda \in \mathbb{C}\} \quad \text{και} \quad \|(a,\lambda)\|_1 := \|a\| + |\lambda|.$$

Με την πράξη $(a,\lambda)\cdot(b,\mu) = (ab + \mu a + \lambda b, \lambda\mu)$ και τη νόρμα $\|\cdot\|_1$, η $\mathscr{A}^+$ είναι άλγεβρα Banach με μονάδα, η μοναδοποίηση της $\mathscr{A}$. Η απεικόνιση $a \to (a,0) : \mathscr{A} \to \mathscr{A}^+$ είναι ισομετρικός μορφισμός αλγεβρών.

Ορισμός

Έστω $\mathscr{A}$ άλγεβρα Banach χωρίς μονάδα και $x \in \mathscr{A}$. Το φάσμα $\sigma(x)$ του x ορίζεται στην μοναδοποίηση

$$\sigma(x) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \mathbf{1} - x \notin Inv(\mathscr{A}^+)\}.$$

Το φάσμα ενός $x \in \mathscr{A}$

Θεώρημα

Το φάσμα κάθε στοιχείου a της $\mathscr{A}$ είναι μη κενό και συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{C}$.

Θεώρημα (Gelfand-Mazur)

Κάθε μιγαδική διαιρετική άλγεβρα Banach είναι ισομετρικά ισόμορφη με το $\mathbb{C}$.

Παρατήρηση Η μεταθετικότητα της άλγεβρας δεν προϋποτίθεται, αλλά είναι ένα από τα συμπεράσματα του Θεωρήματος.

Ιδεώδη και μορφισμοί

Αν $\mathscr{A}$ άλγεβρα και $\mathscr{J}$ ιδεώδες της $\mathscr{A}$, το πηλίκο $\mathscr{A}/\mathscr{J}$ γίνεται άλγεβρα με τις πράξεις

$$\begin{aligned}(x+\mathscr{J})+(y+\mathscr{J}) &= (x+y)+\mathscr{J}\\ \lambda(x+\mathscr{J}) &= (\lambda x)+\mathscr{J}\\ (x+\mathscr{J}).(y+\mathscr{J}) &= (x.y)+\mathscr{J}\end{aligned}$$

και η κανονική απεικόνιση πηλίκο

$$\pi:\mathscr{A}\to\mathscr{A}/\mathscr{J}:x\to x+\mathscr{J}$$

είναι μορφισμός με πυρήνα $\ker\pi=\mathscr{J}$. Κάθε ιδεώδες είναι αυτής της μορφής.

Παρατηρήσεις (ι) Ένα ιδεώδες μιάς άλγεβρας με μονάδα είναι γνήσιο αν και μόνον αν δεν περιέχει την μονάδα, ισοδύναμα αν δεν περιέχει κανένα αντιστρέψιμο στοιχείο.
(ιι) Κάθε άλγεβρα Banach $\mathscr{A}$ με μονάδα, εκτός από το $\mathbb{C}$, έχει γνήσια αριστερά ιδεώδη και δεξιά ιδεώδη.

Ιδεώδη και μορφισμοί

Αν $\mathscr{A}$ είναι μία άλγεβρα με μονάδα και υπάρχει $\phi : \mathscr{A} \to \mathbb{C}$ μορφισμός $\neq 0$, ο πυρήνας $\ker\phi$ είναι μεγιστικό ιδεώδες.
Στόχος: Το αντίστροφο όταν η $\mathscr{A}$ είναι μεταθετική άλγεβρα Banach με μονάδα.

Θεώρημα (Krull)

Αν $\mathscr{A}$ είναι μία άλγεβρα με μονάδα, κάθε (αριστερό, δεξί ή αμφίπλευρο) γνήσιο ιδεώδες $\mathscr{J}$ της $\mathscr{A}$ περιέχεται σε ένα μεγιστικό (ομοειδές) ιδεώδες.

Πρόταση

Αν $\mathscr{A}$ είναι μία άλγεβρα Banach με μονάδα και $\mathscr{J}$ ένα (αριστερό, δεξί ή αμφίπλευρο) γνήσιο ιδεώδες της $\mathscr{A}$, τότε η κλειστή θήκη $\overline{\mathscr{J}}$ του $\mathscr{J}$ είναι γνήσιο (ομοειδές) ιδεώδες.
Άρα, κάθε μεγιστικό (αριστερό, δεξί ή αμφίπλευρο) ιδεώδες μίας άλγεβρας Banach με μονάδα είναι κλειστό.

Ιδεώδη και μορφισμοί

Πρόταση

Αν $\mathscr{A}$ είναι μία άλγεβρα Banach με μονάδα και $\mathscr{J}$ ένα αμφίπλευρο κλειστό ιδεώδες της $\mathscr{A}$, τότε ο χώρος πηλίκο $\mathscr{A}/\mathscr{J}$ εφοδιασμένος με την νόρμα πηλίκο

$$\|a+\mathscr{J}\|_q \equiv \inf\{\|a+x\| : x \in \mathscr{J}\} = d(a, \mathscr{J})$$

είναι άλγεβρα Banach με μονάδα, και η κανονική απεικόνιση πηλίκο $\pi : \mathscr{A} \to \mathscr{A}/\mathscr{J}$ είναι συνεχής (επι-)μορφισμός.

Θεώρημα

Έστω $\mathscr{A}$ μεταθετική άλγεβρα Banach με μονάδα και $\mathscr{J}$ γνήσιο ιδεώδες της $\mathscr{A}$. Το $\mathscr{J}$ είναι μεγιστικό ιδεώδες αν και μόνον αν η $\mathscr{A}/\mathscr{J}$ είναι ισομετρικά ισόμορφη με το $\mathbb{C}$.

Ιδεώδη και μορφισμοί

Ορισμός

Χαρακτήρας ή πολλαπλασιαστική γραμμική μορφή ϕ *σε μία άλγεβρα* $\mathscr{A}$ *λέγεται ένας μη μηδενικός μορφισμός* $\phi : \mathscr{A} \to \mathbb{C}$. *Το σύνολο των χαρακτήρων της* $\mathscr{A}$ *συμβολίζουμε* $\mathscr{M}(\mathscr{A})$ *ή* $\sigma(\mathscr{A})$.

Θεώρημα

Έστω $\mathscr{A}$ *μία μεταθετική άλγεβρα Banach με μονάδα. Η απεικόνιση*

$$\phi \to \ker \phi$$

είναι αμφιμονοσήμαντη μεταξύ του συνόλου των χαρακτήρων και του συνόλου των μεγιστικών ιδεωδών της $\mathscr{A}$.

Πόρισμα

Το σύνολο $\mathscr{M}(\mathscr{A})$ *των χαρακτήρων κάθε μεταθετικής άλγεβρας Banach* $\mathscr{A}$ *με μονάδα δεν είναι κενό.*

Παράδειγμα $\mathscr{M}(M_n(\mathbb{C})) = \emptyset$ για $n \geq 2$.

Πρόταση

Κάθε χαρακτήρας μιας άλγεβρας Banach (μεταθετικής ή όχι) είναι συνεχής, με νόρμα το πολύ 1. Αν μάλιστα η άλγεβρα έχει μονάδα, τότε κάθε χαρακτήρας έχει νόρμα ακριβώς 1.

Πρόταση

Έστω $\mathscr{A}$ μεταθετική άλγεβρα Banach με μονάδα και $x \in \mathscr{A}$.
(α) Το x είναι αντιστρέψιμο στην $\mathscr{A}$ ανν $\phi(x) \neq 0$ για κάθε $\phi \in \mathscr{M}(\mathscr{A})$, ισοδύναμα αν το x δεν περιέχεται σε κανένα (μεγιστικό) ιδεώδες της $\mathscr{A}$.
(β) $\sigma(x) = \{\phi(x) : \phi \in \mathscr{M}(\mathscr{A})\}$.

Ο μετασχηματισμός Gelfand

Αν $\mathscr{A}$ είναι μεταθετική άλγεβρα Banach με μονάδα, θα δείξουμε ότι υπάρχει ένας συμπαγής Hausdorff χώρος K και ένας συνεχής μορφισμός αλγεβρών $\mathscr{G} : \mathscr{A} \to C(K)$ ο οποίος μάλιστα, σε πολλές περιπτώσεις, είναι 1-1. Τότε η $\mathscr{A}$ είναι ισόμορφη, ως άλγεβρα, με μία άλγεβρα συνεχών συναρτήσεων στον K.

Υπενθύμιση

Έστω X χώρος Banach. Η ασθενής-* (w^*) τοπολογία του τοπολογικού δυικού X^* είναι η τοπολογία της σύγκλισης στα σημεία του X: Αν (ϕ_i) είναι δίκτυο στον X^*,

$$\phi_i \xrightarrow{w^*} \phi \iff \phi_i(x) \to \phi(x) \quad \forall x \in X\,.$$

Η w^* είναι δηλαδή ο περιορισμός της τοπολογίας γινόμενο του $\mathbb{C}^X$ στον X^*.

Ο μετασχηματισμός Gelfand

Πρόταση

Έστω $\mathscr{A}$ άλγεβρα Banach με μονάδα. Το σύνολο $\mathscr{M}(\mathscr{A})$ γίνεται συμπαγής χώρος Hausdorff αν εφοδιασθεί με την ασθενή- τοπολογία.*

Χωρίς μονάδα: Αν $\dim \mathscr{A} < \infty$, τότε $\mathscr{M}(\mathscr{A})$ συμπαγής.
Όμως, $\mathscr{M}(c_o)$ μη συμπαγής (άσκηση).

Ορισμός

Έστω $\mathscr{A}$ μεταθετική άλγεβρα Banach με μονάδα και $x \in \mathscr{A}$. Ορίζουμε

$$\hat{x} : \mathscr{M}(\mathscr{A}) \to \mathbb{C} : \phi \to \phi(x).$$

Η απεικόνιση $\mathscr{G} : x \to \hat{x}$ λέγεται μετασχηματισμός Gelfand.

Ο μετασχηματισμός Gelfand

$$\hat{x} : \mathscr{M}(\mathscr{A}) \to \mathbb{C} : \phi \to \phi(x).$$

Θεώρημα (Gelfand)

Ο μετασχηματισμός Gelfand

$$\mathscr{G} : x \to \hat{x} : \mathscr{A} \to C(\mathscr{M}(\mathscr{A}), w^*)$$

(α) Είναι μορφισμός αλγεβρών με την ιδιότητα $\mathscr{G}(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$.
(β) Ικανοποιεί $\hat{x}(\mathscr{M}(\mathscr{A})) = \sigma(x)$ *για κάθε* $x \in \mathscr{A}$.
(γ) Είναι συνεχής, μάλιστα

$$\|\hat{x}\|_\infty = \rho(x) \leq \|x\|.$$

για κάθε $x \in \mathscr{A}$.
(δ) $\ker(\mathscr{G}) = \{x \in \mathscr{A} : \rho(x) = 0\}$.

Ο μετασχηματισμός Gelfand

Ορισμός

Έστω $\mathscr{A}$ άλγεβρα με μονάδα. Το ριζικό (Radical) του Jacobson $\mathrm{Rad}(\mathscr{A})$ της $\mathscr{A}$ είναι η τομή όλων των αριστερών μεγιστικών ιδεωδών της. Αν $\mathrm{Rad}(\mathscr{A}) = \{0\}$, η $\mathscr{A}$ λέγεται ημιαπλή.

Αν η $\mathscr{A}$ είναι μεταθετική άλγεβρα Banach με μονάδα, τότε

$$\begin{aligned}
\mathrm{Rad}(\mathscr{A}) &= \bigcap\{\mathscr{M} \subseteq \mathscr{A} : \mathscr{M} \text{ μεγιστικό ιδεώδες}\} \\
&= \{x \in \mathscr{A} : \phi(x) = 0 \ \forall \phi \in \mathscr{M}(\mathscr{A})\} \\
&= \{x \in \mathscr{A} : \rho(x) = 0\} \\
&= \ker(\mathscr{G}).
\end{aligned}$$

Παραδείγματα: Η άλγεβρα $C(K)$

Αν K είναι χώρος συμπαγής και Hausdorff και $t \in K$, το σύνολο

$$\mathscr{M}_t = \{f \in C(K) : f(t) = 0\}$$

είναι μεγιστικό ιδεώδες της $C(K)$.
Κάθε μεγιστικό ιδεώδες της $C(K)$ είναι αυτής της μορφής.
Ο χώρος των χαρακτήρων της $C(K)$ είναι ομοιομορφικός με το K.
Η απεικόνιση Gelfand «είναι» η ταυτοτική απεικόνιση. Είναι ισομετρία και επί.

Παραδείγματα: Η άλγεβρα του δίσκου $A(\mathbb{D})$

Για κάθε $z \in \overline{\mathbb{D}}$, η απεικόνιση $f_z : A(\mathbb{D}) \to \mathbb{C}$ όπου $f_z(f) = \tilde{f}(z)$ είναι χαρακτήρας της $A(\mathbb{D})$, και κάθε χαρακτήρας της είναι αυτής της μορφής. Η απεικόνιση $z \to f_z$ είναι ομοιομορφισμός του $\overline{\mathbb{D}}$ επί του χώρου των χαρακτήρων της $A(\mathbb{D})$.
Η απεικόνιση Gelfand «είναι» η απεικόνιση $f \to \tilde{f}$. Είναι ισομετρία (άρα είναι 1-1, και έχει κλειστή εικόνα) αλλά δεν είναι επί.

Παρατήρηση *Παρόλο που η $A(\mathbb{D})$ είναι υπάλγεβρα της $C(\mathbb{T})$ που έχει χώρο χαρακτήρων $\mathscr{M}(C(\mathbb{T})) \simeq \mathbb{T}$, η $A(\mathbb{D})$ έχει 'πολύ μεγαλύτερο' χώρο χαρακτήρων: $\mathscr{M}(A(\mathbb{D})) \simeq \overline{\mathbb{D}}$.*

Παράδειγμα: Η άλγεβρα Fourier ή άλγεβρα Wiener $\mathscr{W}$

Πρόκειται για το σύνολο $\mathscr{W}$ των συναρτήσεων f της μορφής

$$f(e^{it}) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} a_k e^{ikt} \ \ (e^{it} \in \mathbb{T}) \ \text{ όπου } \sum_k |a_k| < \infty,$$

με πράξεις κατά σημείο και τη νόρμα $\|f\|_W := \sum_k |a_k|$.
Ο χώρος $\mathscr{M}(\mathscr{W})$ των χαρακτήρων είναι ομοιομορφικός με τον μοναδιαίο κύκλο $\mathbb{T}$ μέσω της $\Phi : \mathbb{T} \to \mathscr{M}(\mathscr{W}) : e^{it} \to \delta_{e^{it}}$ όπου $\delta_{e^{it}}(f) = f(e^{it})$, $f \in \mathscr{W}$.

Η απεικόνιση Gelfand είναι 1-1, αλλά δεν είναι επί. Έχει πυκνή εικόνα, άρα όχι κλειστή, και (επομένως) η αντίστροφη απεικόνιση δεν είναι συνεχής.

Θεώρημα (Wiener)

Αν μια $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ έχει απολύτως συγκλίνουσα σειρά Fourier και δεν μηδενίζεται πουθενά στον $\mathbb{T}$, τότε η $1/f$ έχει και αυτή απολύτως συγκλίνουσα σειρά Fourier. Δηλαδή:

Αν $f \in \mathscr{W}$ και $f(e^{it}) \neq 0$ για κάθε $e^{it} \in \mathbb{T}$, τότε $1/f \in \mathscr{W}$.

Παράδειγμα: Η άλγεβρα $(\ell^1(\mathbb{Z}), *)$

Είναι ισόμορφη ως άλγεβρα με την $\mathscr{M}(\mathscr{W})$ μέσω του μετασχηματισμού Fourier $\mathscr{F} : \mathscr{W} \to \ell^1(\mathbb{Z}) : f \to \hat{f}$.
Επομένως ο χώρος $\mathscr{M}(\ell^1)$ των χαρακτήρων της είναι ομοιομορφικός με τον $\mathbb{T}$.
Συγκεκριμένα η απεικόνιση $\Psi : \mathbb{T} \to \mathscr{M}(\ell^1) : z \to \psi_z$ όπου $\psi_z(a) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n$, $a = (a_n) \in \ell^1(\mathbb{Z})$ είναι ομοιομορφισμός.
Αν «ταυτίσουμε» τους χώρους αυτούς, τότε ο μετασχηματισμός Gelfand «ταυτίζεται» με τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier, δηλαδή για κάθε $a = (a_n) \in \ell^1(\mathbb{Z})$,

$$(\mathscr{G}(a))(\Psi(e^{i\theta})) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{in\theta} = (\mathscr{F}^{-1}(a))(\theta)$$

$$\text{ή} \qquad \mathscr{G}(a) \equiv \mathscr{F}^{-1}(a).$$

Ο μετασχηματισμός Gelfand είναι 1-1, και έχει πυκνή εικόνα, αλλά δεν είναι επί της $C(\mathscr{M}(\ell^1))$.

Παράδειγμα: Η άλγεβρα $(L^1(\mathbb{R}), *)$

Ο χώρος των χαρακτήρων της $L^1(\mathbb{R})$ είναι ομοιομορφικός με τον $\mathbb{R}$ μέσω της απεικόνισης $\mathbb{R} \to \mathscr{M}(L^1(\mathbb{R})) : \xi \to \phi_\xi$, όπου

$$\phi_\xi(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-it\xi}dt, \quad f \in L^1(\mathbb{R}).$$

Ο μετασχηματισμός Gelfand «είναι» ο μετασχηματισμός Fourier $L^1(\mathbb{R}) \to C_0(\mathbb{R})$.

Ο μετασχηματισμός Gelfand είναι 1-1, επομένως η $L^1(\mathbb{R})$ είναι ημιαπλή άλγεβρα.
Έχει πυκνή εικόνα, αλλά δεν είναι επί. Επομένως η αντίστροφη απεικόνιση δεν είναι συνεχής.
Αποδείξεις: Αργότερα, μέσω Fourier.

Μετασχηματισμός Gelfand, σύνοψη παραδειγμάτων

Στην πρώτη στήλη εμφανίζεται η άλγεβρα $\mathscr{A}$. Στη δεύτερη εμφανίζεται η άλγεβρα $C(\mathscr{M}(\mathscr{A}))$ ή $C_0(\mathscr{M}(\mathscr{A}))$, όπου ο $\mathscr{M}(\mathscr{A})$ έχει αντικατασταθεί από την ομοιομορφική του εικόνα που υπολογίσαμε, και από την οποία προκύπτει και η μορφή της απεικόνισης Gelfand $\mathscr{G}$ στην τρίτη στήλη.

$C(K) \xrightarrow{\mathscr{G}} C(K)$	$\mathscr{G} = id$	ισομετρία επί
$A(\mathbb{D}) \xrightarrow{\mathscr{G}} C(\overline{\mathbb{D}})$	$\mathscr{G} = id$	ισομετρία, όχι επί
$\mathscr{W} \xrightarrow{\mathscr{G}} C(\mathbb{T})$	$\mathscr{G} = id$	1-1, όχι ισομετρία, όχι επί
$\ell^1(\mathbb{Z}) \xrightarrow{\mathscr{G}} C(\mathbb{T})$	$\mathscr{G} = \mathscr{F}^{-1}$	1-1, όχι ισομετρία, όχι επί
$L^1(\mathbb{R}) \xrightarrow{\mathscr{G}} C_0(\mathbb{R})$	$\mathscr{G} = \mathscr{F}$	1-1, όχι ισομετρία, όχι επί

Ο Μετασχηματισμός Fourier για το $\mathbb{R}$

Αν $f \in L^1(\mathbb{R})$ ορίζουμε

$$\boxed{\mathscr{F} f(\xi) := \hat{f}(\xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-it\xi} dt = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-it\xi} dm(t).}$$

(όπου $dm(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} dt$).

Συμβολισμοί: Αν $f, g \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$,

$$(T_a f)(x) := f(x-a) \quad (a \in \mathbb{R})$$
$$(M_h f)(x) := h(x) f(x) \quad (h \in L^\infty(\mathbb{R}))$$
$$e_a(x) := e^{iax}.$$

(i) $g(x) = e^{iax} f(x) \xrightarrow{\mathscr{F}} \hat{g}(\xi) = \hat{f}(\xi - a)$ $(\mathscr{F} M_{e_a} = T_a \mathscr{F})$

(ii) $g(x) = f(x-a) \xrightarrow{\mathscr{F}} \hat{g}(\xi) = e^{-ia\xi} \hat{f}(\xi)$ $(\mathscr{F} T_a = M_{e_{-a}} \mathscr{F})$

(iii) $g(x) = (f * h)(x) \xrightarrow{\mathscr{F}} \hat{g}(\xi) = \hat{f}(\xi) \hat{h}(\xi)$ $(\mathscr{F}(f * g) = (\mathscr{F} f)(\mathscr{F} h))$

(iv) $g(x) = \overline{f(-x)} \xrightarrow{\mathscr{F}} \hat{g}(\xi) = \overline{\hat{f}(\xi)}$

(v) $g(x) = f(\frac{x}{\lambda}) \xrightarrow{\mathscr{F}} \hat{g}(\xi) = \lambda \hat{f}(\lambda \xi)$ $(\lambda > 0)$

Ο Μετασχηματισμός Fourier για το $\mathbb{R}$

Πρόταση

Αν $f \in L^1(\mathbb{R})$ τότε η $\hat{f}$ είναι συνεχής και φραγμένη στο $\mathbb{R}$ και μάλιστα

$$\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1 .$$

Θεώρημα (Riemann - Lebesgue)

Αν $f \in L^1(\mathbb{R})$ τότε $\hat{f} \in C_0(\mathbb{R})$. Επομένως ο μετασχηματισμός Fourier

$$\mathscr{F} : (L^1(\mathbb{R}), \|\cdot\|_1) \to (C_0(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$$

είναι (γραμμικός και) συνεχής τελεστής.

Ο Μετασχηματισμός Fourier και η παραγώγιση

Αν $f : R \to \mathbb{C}$, ορίζουμε $(Mf)(t) = tf(t)$ και $Df = f'$ (αν υπάρχει).

Παρατήρηση

Αν $f \in L^1(\mathbb{R})$ και $Mf \in L^1(\mathbb{R})$ τότε η παράγωγος $D(\hat{f})$ υπάρχει και

$$D\mathscr{F}f = -i\mathscr{F}Mf.$$

Παρατήρηση

Αν η $f \in C_0(\mathbb{R}) \cap C_1(\mathbb{R})$ και $f, f' \in L^1(\mathbb{R}))$, τότε $\widehat{(f')}(\xi) = i\xi\hat{f}(\xi)$. Δηλαδή,

$$\mathscr{F}Df = iM\mathscr{F}f.$$

Οι χώροι $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ και $\mathscr{S}(\mathbb{R})$

$$\mathscr{D}(\mathbb{R}) := \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) : \mathrm{supp} f \ \text{ συμπαγές } \} \subseteq$$

$$\mathscr{S}(\mathbb{R}) := \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) : \sup_{x\in\mathbb{R}} |x^n f^{(m)}(x)| < \infty \, \forall n, m \in \mathbb{N}\}$$

Δηλαδή μια f ανήκει στον $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ αν είναι απεριόριστα παραγωγίσιμη και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι οι συναρτήσεις $M^n f$ και οι παράγωγοί τους κάθε τάξης είναι φραγμένες.

Παρατήρηση

Για κάθε $p \in [1, \infty]$, ο $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ περιέχεται στον $L^p(\mathbb{R})$ (άρα, το ίδιο ισχύει και για τον $\mathscr{D}(\mathbb{R})$).

Πρόταση

(α) Ο χώρος $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ είναι πυκνός στον χώρο $(C_c(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$.
(β) Αν $1 \leq p < \infty$, ο χώρος $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ είναι πυκνός στον $(L^p(\mathbb{R}), \|\cdot\|_p)$ (άρα, το ίδιο ισχύει και για τον $\mathscr{S}(\mathbb{R})$).

Ο Μετασχηματισμός Fourier στον $\mathscr{S}(\mathbb{R})$

Προφανώς, $D(\mathscr{S}(\mathbb{R})) \subseteq \mathscr{S}(\mathbb{R})$ και $M(\mathscr{S}(\mathbb{R})) \subseteq \mathscr{S}(\mathbb{R})$.

Παρατήρηση

Οι D και M, θεωρούμενοι ως τελεστές $\mathscr{S}(\mathbb{R}) \to \mathscr{S}(\mathbb{R})$, ικανοποιούν τις σχέσεις

$$\mathscr{F}D = iM\mathscr{F} \qquad \text{και} \qquad D\mathscr{F} = -i\mathscr{F}M.$$

Πρόταση

Αν $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ τότε $\hat{f} \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$. Δηλαδή $\mathscr{F}(\mathscr{S}(\mathbb{R})) \subseteq \mathscr{S}(\mathbb{R})$.

Θα δούμε ότι $\mathscr{F}(\mathscr{S}(\mathbb{R})) = \mathscr{S}(\mathbb{R})$.

Ο τύπος αντιστροφής για τον $\mathscr{S}(\mathbb{R})$

Λήμμα (Αλλαγή στέγης)

Αν $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ τότε

$$\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(x) g(x) dm(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y) \hat{g}(y) dm(y).$$

Παράδειγμα $f_a(x) = e^{\left(-\frac{1}{2}ax^2\right)} \Rightarrow \hat{f}_a(\xi) = \frac{1}{\sqrt{a}} e^{\left(-\frac{\xi^2}{2a}\right)} \quad (a > 0).$

Θεώρημα (Αντιστροφής I)

Αν $g \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(\xi) e^{+ix\xi} d\xi.$$

Πόρισμα

Ο μετασχηματισμός Fourier απεικονίζει τον $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ 1-1 και επί του $\mathscr{S}(\mathbb{R})$.

Τύπος αντιστροφής για τον $\mathscr{S}(\mathbb{R})$: σχήμα απόδειξης

Για κάθε $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, από αλλαγή στέγης f βρίσκω ότι $\forall \lambda > 0$,

$$\int \hat{f}(t) g\left(\frac{t}{\lambda}\right) dm(t) = \int f\left(\frac{\xi}{\lambda}\right) \hat{g}(\xi) dm(\xi).$$

Στέλνοντας $\lambda \to \infty$, από κυριαρχημένη σύγκλιση βρίσκω

$$\left(\int \hat{f}(t) dm(t)\right) g(0) = f(0) \int \hat{g}(\xi) dm(\xi).$$

Όμως για $f(t) = \exp(-\frac{1}{2}x^2)$ έχω $\hat{f}(0) = f(0) \neq 0$, άρα

$$g(0) = \int \hat{g}(\xi) dm(\xi).$$

Βάλε τώρα την g_{-x} στη θέση της g οπότε $\hat{g}_{-x}(\xi) = e^{ix\xi}\hat{g}(\xi)$ και αποδείχθηκε ότι $g(x) = \int \hat{g}(\xi) e^{ix\xi} dm(\xi)$.

Ο $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ είναι πυκνός στον $L^1(\mathbb{R})$

Έστω $\phi \in C^\infty(\mathbb{R})$ με $\operatorname{supp}\phi \subseteq [-1,1]$ τέτοια ώστε $\phi \geq 0$ και $\|\phi\|_1 = 1$. Για παράδειγμα $\phi(t) = \begin{cases} c\exp\left(\frac{-1}{1-t^2}\right), & |t| < 1 \\ 0, & |t| \geq 1 \end{cases}$ με $c > 0$ κατάλληλο. Τότε η (ϕ_n) όπου

$$\phi_n(x) = n\phi(nx),\ n \in \mathbb{N}.$$

είναι προσεγγιστική μονάδα για τον $L^1(\mathbb{R})$ από συναρτήσεις του $\mathscr{D}(\mathbb{R})$.

Πρόταση

(α) Ο χώρος $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ είναι πυκνός στον $(C_c(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$.
(β) Αν $1 \leq p < \infty$, ο χώρος $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ είναι πυκνός στον $(L^p(\mathbb{R}), \|\cdot\|_p)$.
(γ) Επομένως ο $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ είναι πυκνός στον $(L^p(\mathbb{R}), \|\cdot\|_p)$.

Το «Θεώρημα αντιστροφής» για τον $L^1(\mathbb{T})$

Υπενθύμιση Αν $f \in L^1(\mathbb{T})$ και $\hat{f}(k) = \int_{\mathbb{T}} f(t)e^{-ikt}dm(t)$ (όπου $dm(t) = \frac{d\lambda(t)}{2\pi}$) είναι αλήθεια ότι η $(S_n(f))$ συγκλίνει στην f, δηλ. ότι

$$f(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k)e^{ikt} \ ?$$

Όχι εν γένει. Αν όμως $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(k)| < \infty$, δηλ. αν $\hat{f} \in \ell^1(\mathbb{Z})$, τότε η $(S_n(f))$ συγκλίνει, αναγκαστικά στην f (λόγω μοναδικότητας). Δηλαδή

$$f \in L^1(\mathbb{T}) \text{ και } \hat{f} \in \ell^1(\mathbb{Z}) \ \Rightarrow \ f(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k)e^{ikt} \ \text{ σχ.π.}$$

Το Θεώρημα αντιστροφής για τον $L^1(\mathbb{R})$

Θεώρημα (Αντιστροφής ΙΙ)

Αν $g \in L^1(\mathbb{R})$ και $\hat{g} \in L^1(\mathbb{R})$ τότε

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(\xi) e^{+ix\xi} d\xi \quad \text{σχεδόν για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Πόρισμα

Ο μετασχηματισμός Fourier είναι 1-1 στον $L^1(\mathbb{R})$, με πυκνή εικόνα.

Επομένως ο μετασχηματισμός Gelfand $L^1(\mathbb{R}) \to C_0(\mathbb{R})$ είναι 1-1, και άρα η $(L^1(\mathbb{R}), *)$ είναι ημιαπλή άλγεβρα.

Θεώρημα αντιστροφής: σχήμα απόδειξης

Ορίζεται η $g_0(x) = \int \hat{g}(\xi) e^{+ix\xi} dm(\xi)$ αφού $\hat{g} \in L^1(\mathbb{R})$.
Ν.δ.ο. $g(x) - g_0(x) := u(x)$ είναι σχ.π. ίση με 0.

Για κάθε $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, από αλλαγή στέγης και Θ. αντιστροφής για την f βρίσκω ότι

$$\int \hat{f}(x) u(x) dm(x) = 0 \quad \text{για κάθε } \; f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$$

άρα η u σκοτώνει όλες τις $\hat{f}$, $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, άρα όλον τον $S(\mathbb{R})$ αφού $\mathscr{F}(S(\mathbb{R})) = S(\mathbb{R})$.
Τώρα κάθε χ_E όπου $E \subseteq \mathbb{R}$ Borel φραγμένο την προσεγγίζω (πώς;) με $h \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$, οπότε $\int \chi_E(x) u(x) dm(x) = 0$. Έπεται ότι $u(x) = 0$ σχεδόν για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Ο Τύπος άθροισης του Poisson

Πρόταση

Αν $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, *τότε*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} f(2k\pi + x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k) e^{ikx}, \quad x \in \mathbb{R},$$

ειδικότερα $$\sum_{k\in\mathbb{Z}} f(2k\pi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k).$$

Ο Μετασχηματισμός Fourier στον $L^2(\mathbb{R})$

Θεώρημα (Plancherel)

Αν $f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ *τότε* $\left\langle \hat{f}, \hat{g} \right\rangle = \langle f, g \rangle$

δηλαδή

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)}d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{g(x)}dx.$$

Ειδικότερα, $\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$.

Συνεπώς ο μετασχηματισμός Fourier $f \to \hat{f}$ *επεκτείνεται μοναδικά σε μια* ***ισομετρία***

$$\mathscr{F}_2 : (L^2(\mathbb{R}), \|\cdot\|_2) \longrightarrow (L^2(\mathbb{R}), \|\cdot\|_2)$$

που είναι επί.

Αν $\quad f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) \quad$ τότε: $\quad f \in L^1 \Rightarrow \hat{f} \in C_0(\mathbb{R})$

$$f \in L^2 \Rightarrow \mathscr{F}_2 f \in L^2(\mathbb{R})$$

Τι σχέση έχουν οι $\hat{f}$ και $\mathscr{F}_2 f$;

Πρόταση

Αν $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, τότε $\hat{f} = \mathscr{F}_2 f$ σχεδόν παντού.

Συμβολισμός Αν $f \in L^2(\mathbb{R})$, γράφουμε $\hat{f}$ για τον μετασχηματισμό Fourier $\mathscr{F}_2 f$ της f.

Ο Μετασχηματισμός Fourier στον $L^2(\mathbb{R})$

Πρόταση

Για κάθε $f \in L^2(\mathbb{R})$ *έχουμε*

$$(i)\ \lim_n \left\|\hat{f} - \hat{f}_n\right\|_2 = 0 \quad \textit{όπου}\ \ f_n = \chi_{[-n,n]} f,$$

$$\textit{δηλαδή}\ \lim_n \left\|\hat{f} - \psi_n\right\|_2 = 0 \quad \textit{όπου}\ \ \psi_n(\xi) = \int_{-n}^{n} f(x) e^{-ix\xi}\, dm(x),$$

$$(ii)\ \lim_n \|f - \phi_n\|_2 = 0 \quad \textit{όπου}\ \ \phi_n(x) = \int_{-n}^{n} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi}\, dm(\xi).$$

Σε περίπτωση που $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, *έχουμε* $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi}\, dm(\xi)$ *σχεδόν για κάθε* $x \in \mathbb{R}$.

Να χαρακτηρίσουμε ως άλγεβρες Banach (και όχι απλώς ως χώρους Banach) τις άλγεβρες της μορφής $C(K)$, όπου K συμπαγής και Hausdorff τοπολογικός χώρος
ή γενικότερα $C_0(X)$ όπου X τοπικά συμπαγής και Hausdorff .

Παρατήρηση $C(K) = C_{\mathbb{R}}(K) + iC_{\mathbb{R}}(K)$ και
$\forall f \in C_{\mathbb{R}}(K)$, $f = f_+ - f_-$ όπου $f_\pm \geq 0$.

Μεταθετικές C^* άλγεβρες

Ορισμός

Ενέλιξη (involution) σε μια (μιγαδική) άλγεβρα $\mathscr{A}$ είναι μια απεικόνιση

$$x \to x^* : \mathscr{A} \to \mathscr{A}$$

με τις ιδιότητες

$$\begin{aligned} (x+y)^* &= x^* + y^* \\ (\lambda x)^* &= \bar{\lambda} x^* \\ (xy)^* &= y^* x^* \\ (x^*)^* &= x \end{aligned}$$

για κάθε $x, y \in \mathscr{A}$ και $\lambda \in \mathbb{C}$.

Μια C^* άλγεβρα $\mathscr{A}$ είναι μια άλγεβρα Banach με ενέλιξη που έχει την ιδιότητα

$$C^* : \quad \|x^* x\| = \|x\|^2 \qquad (x \in \mathscr{A}).$$

C^* άλγεβρες: Παραδείγματα

1. Η άλγεβρα Banach $\mathbb{C}$ είναι C^* άλγεβρα ως προς την ενέλιξη $\lambda \to \bar{\lambda}$. Κάθε διαιρετική C^* άλγεβρα είναι ισομετρικά ισόμορφη με την $\mathbb{C}$ (Gelfand-Mazur)
2. Η άλγεβρα $C(K)$ είναι C^* άλγεβρα ως προς την ενέλιξη $f \to f^*$, όπου $f^*(t) := \overline{f(t)}$ $(t \in K)$. Θα δείξουμε (Θεώρημα Gelfand-Naimark) ότι κάθε μεταθετική C^* άλγεβρα με μονάδα είναι ισομετρικά *-ισόμορφη με κάποιον $C(K)$.
3. Η $A(\mathbb{D})$ δεν είναι C^*-άλγεβρα.
4. Αν X είναι τοπικά συμπαγής χώρος Hausdorff (πχ. $X = \mathbb{R}^d$), η άλγεβρα Banach $C_o(X)$ είναι C^* -άλγεβρα με την ενέλιξη $f \to \bar{f}$.
5. Το ίδιο για τις άλγεβρες Banach $\ell^\infty(\Gamma)$ και $L^\infty(\Omega, \mathscr{S}, \mu)$.
6. Η άλγεβρα $\mathscr{B}(H)$ όλων των γραμμικών και φραγμένων τελεστών $T : H \to H$ (H: Hilbert) είναι C^*-άλγεβρα ως προς την ενέλιξη $T \to T^*$ που ορίζεται καλά από την

$$\langle T^* x, y \rangle = \langle x, Ty \rangle \quad (x, y \in H).$$

Μεταθετικές C^*-άλγεβρες: Θεώρημα Gelfand-Naimark

Θεώρημα

Αν $\mathscr{A}$ είναι μεταθετική C^*-άλγεβρα με μονάδα, τότε ο μετασχηματισμός Gelfand $\mathscr{G} : \mathscr{A} \to C(\mathscr{M}(\mathscr{A}), w^*)$ είναι ισομετρία επί και διατηρεί την ενέλιξη, δηλαδή $(\mathscr{G}x)^* = \mathscr{G}(x^*)$ για κάθε $x \in \mathscr{A}$.

Χρειάζονται τα λήμματα:

Λήμμα

(ι) Αν $x \in \mathscr{A}$ και $x = x^*$, τότε $\phi(x) \in \mathbb{R}$ για κάθε $\phi \in \mathscr{M}(\mathscr{A})$.
(ιι) Για κάθε $y \in \mathscr{A}$ και $\phi \in \mathscr{M}(\mathscr{A})$, ισχύει $\phi(y^*) = \overline{\phi(y)}$.

Παρατήρηση Το συμπέρασμα του Λήμματος ισχύει για κάθε γραμμική απεικόνιση $f : \mathscr{A} \to \mathbb{C}$ που έχει την ιδιότητα $\|f\| = f(\mathbf{1})$. (Ισχύει χωρίς μεταθετικότητα της $\mathscr{A}$.)

Λήμμα

Για κάθε $x \in \mathscr{A}$ ισχύει $\|x\| = \rho(x)$.

Υπενθύμιση: Θεώρημα Stone – Weierstrass

Έστω K συμπαγής μετρικός χώρος (ή, γενικότερα, συμπαγής χώρος Hausdorff) και έστω $C(K)$ η μιγαδική άλγεβρα όλων των συνεχών συναρτήσεων $f : K \to \mathbb{C}$ (με πράξεις κατά σημείο και τη νόρμα supremum). Έστω

$$\mathscr{A} \subseteq C(K)$$

με τις εξής ιδιότητες

(1) είναι υπάλγεβρα (δηλ. περιέχει το άθροισμα και το γινόμενο των στοιχείων της)

(2) περιέχει τις σταθερές συναρτήσεις (δηλ. $\mathbf{1} \in \mathscr{A}$)

(3) χωρίζει τα σημεία του X (δηλ. αν $f(x) = f(y)$ για κάθε $f \in \mathscr{A}$ τότε $x = y$)

(4) περιέχει το συζυγές κάθε στοιχείου της (δηλ. $f \in \mathscr{A} \Rightarrow \bar{f} \in \mathscr{A}$).

Τότε η $\mathscr{A}$ είναι ομοιόμορφα πυκνή στην $C(K)$.

(Δες το αρχείο `stoneweixe.pdf`.)

Μοναδοποίηση

Αν $(\mathscr{A}, \|.\|)$ είναι C^* -άλγεβρα χωρίς μονάδα, η μοναδοποιημένη άλγεβρα $\mathscr{A}_1 \equiv \mathscr{A} \oplus \mathbb{C}$ εφοδιάζεται με την ενέλιξη
$(x,\lambda)^* = x^* + \bar{\lambda} \quad ((x,\lambda) \in \mathscr{A}_1)$.
Με τη νόρμα

$$\|(x,\lambda)\| := \sup\{\|xy + \lambda y\| : y \in \mathscr{A}, \|y\| \leq 1\}$$

η $\mathscr{A}_1$ γίνεται C^*-άλγεβρα.

Μεταθετικές C^*-άλγεβρες: Θεώρημα Gelfand-Naimark

Θεώρημα

*Αν $\mathscr{A}$ μεταθετική C^*-άλγεβρα, ο μετασχηματισμός Gelfand $x \to \hat{x}$ είναι ισομετρικός *-ισομορφισμός της $\mathscr{A}$ επί της $C_o(\mathscr{M}(\mathscr{A}), w^*)$.*
Η $\mathscr{A}$ έχει μονάδα αν και μόνον αν ο $\mathscr{M}(\mathscr{A})$ είναι w^*-συμπαγής.