Απάντηση σε μια ερώτηση

Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$. Αν η ακολουθία $(k^2\hat{f}(k))_{k\in\mathbb{Z}}$ ανήκει στον $\ell^\infty(\mathbb{Z})$, τότε η f είναι σ.π. παραγωγίσιμη.

Απόδειξη Αν $|k^2\hat{f}(k)| \le M$ για κάθε k, τότε

$$\sum_{k\neq 0} |ik\hat{f}(k)|^2 = \sum_{k\neq 0} |k^2\hat{f}(k)||\hat{f}(k)| \le M\sum_{k\neq 0}|\hat{f}(k)| \le M\sum_{k\neq 0}\frac{M}{k^2} < \infty$$

συνεπώς η ακολουθία $(ik\hat{f}(k))_{k\in\mathbb{Z}}$ ανήκει στον $\ell^2(\mathbb{Z})$, άρα υπάρχει $g \in L^2(\mathbb{T})$ ώστε $\hat{g}(k) = ik\hat{f}(k)$ για κάθε k.

Ορίζουμε $G(x) = \int_{-\pi}^{x} g(t)dt$ (το ολοκλήρωμα υπάρχει αφού η g είναι στον $L^1(\mathbb{T})$ και μάλιστα η G είναι συνεχής συνάρτηση με $G(\pi) = \hat{g}(0) = 0 = G(-\pi)$.)

Από το Θεώρημα διαφόρισης του Lebesgue γνωρίζουμε ότι η G είναι σχεδόν παντού παραγωγίσιμη με παράγωγο την g. Επομένως, για κάθε k, και σχεδόν για κάθε t, έχουμε $\left(G(t)e^{-ikt}\right)' = g(t)e^{-ikt} + G(t)(-ike^{-ikt})$, άρα

$$G(\pi)e^{-ik\pi} = \int_{-\pi}^{\pi}(g(t)e^{-ikt} + G(t)(-ike^{-ikt})dt = 2\pi(\hat{g}(k) - ik\hat{G}(k)).$$

Αλλά $G(\pi) = 0$ άρα $\hat{g}(k) = ik\hat{G}(k)$ για κάθε k.

Επομένως $\hat{G}(k) = \hat{f}(k)$ για κάθε $k \neq 0$, άρα η $F := G - f$ έχει $\hat{F}(k) = 0$ αν $k \neq 0$, συνεπώς είναι (σ.π. ίση με) σταθερή συνάρτηση (είναι κάθετη σε όλα τα e_k εκτός ενδεχομένως απο το $e_0 = \mathbf{1}$).

Επομένως η f είναι σχεδόν παντού ίση με την συνάρτηση $G - F$, που είναι σχεδόν παντού παραγωγίσιμη.

Σχόλια (1) Δεν είναι πάντα σωστό ότι η f είναι (σχεδόν παντού ίση με) παντού παραγωγίσιμη συνάρτηση. Ένα παράδειγμα είναι η $f(x) = |x|$ (που παραγωγίζεται για κάθε $x \neq 0$, αλλά όχι στο 0) για την οποία υπολογίζεται ότι $|k^2\hat{f}(k)| \le \frac{2}{\pi}$ για κάθε k.

(2) Με την ισχυρότερη υπόθεση: "η $(k^3\hat{f}(k))_{k\in\mathbb{Z}}$ ανήκει στον $\ell^\infty(\mathbb{Z})$", μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η f είναι παντού παραγωγίσιμη, μάλιστα με συνεχή παράγωγο.

Πράγματι, αν $|k^3\hat{f}(k)| \le M$ για κάθε k, τότε

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k\neq 0}|ik\hat{f}(k)|\right)^2 &= \left(\sum_{k\neq 0}|k^2\hat{f}(k)|\frac{1}{|k|}\right)^2 \le \sum_{k\neq 0}|k^2\hat{f}(k)|^2\sum_{k\neq 0}\frac{1}{k^2} \le \frac{\pi^2}{3}\sum_{k\neq 0}|k^3\hat{f}(k)||k\hat{f}(k)| \\ &\le \frac{\pi^2}{3}\sum_{k\neq 0}M|k\hat{f}(k)| \le \frac{\pi^2}{3}M\sum_{k\neq 0}\frac{M}{k^2} < \infty\end{aligned}$$

συνεπώς η σειρά $\sum_k ik\hat{f}(k)e^{ikx}$ συγκλίνει απόλυτα και ομοιόμορφα σε μια συνάρτηση g η οποία είναι *συνεχής* (ομοιόμορφο όριο τριγ. πολυωνύμων) και επομένως το αόριστο ολοκλήρωμά της, G, είναι συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση, η οποία ικανοποιεί $ik\hat{G}(k) = \hat{g}(k) = ik\hat{f}(k)$ για κάθε k, και η f είναι σχεδόν παντού ίση με την συνάρτηση $G - F$, όπως πριν.

(3) Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι αν $|k^m\hat{f}(k)| \le M$ για κάθε k, τότε $f \in C^{m-2}(\mathbb{T})$.