Αρμονική Ανάλυση: Ασκήσεις Ι

1. Έστω G μια (αριθμήσιμη) ομάδα. Θεωρούμε τον χώρο Banach $(\ell^1(G), \|\cdot\|_1)$ των συναρτήσεων $f : G \to \mathbb{C}$ που ικανοποιούν $\|f\|_1 := \sum_{t\in G} |f(t)| < \infty$ και τον πυκνό υπόχωρό του $c_{00}(G) = \text{span}\{\delta_s : s \in G\}$ των συναρτήσεων με πεπερασμένο φορέα (εδώ, $\delta_s(t) = 1$ αν $t = s$ και $\delta_s(t) = 0$ αν $t \neq s$).

Δείξτε ότι η πράξη της ομάδας επεκτείνεται στον $c_{00}(G)$ θέτοντας $\delta_s * \delta_t = \delta_{st}$.

Δείξτε ότι η πράξη $*$ επεκτείνεται στον $\ell^1(G)$ και ότι η $(\ell^1(G), *, \|\cdot\|_1)$ είναι άλγεβρα Banach, που είναι μεταθετική αν και μόνον αν η $(G, \cdot)$ είναι αβελιανή ομάδα. Έχει η άλγεβρα αυτή μονάδα;

Τι γίνεται με την πράξη $G \to G : t \to t^{-1}$;

2. Δείξτε ότι οι σειρές $\sum_{k=2}^{\infty} \dfrac{\sin kx}{\log k}$ και $\sum_{k=2}^{\infty} \dfrac{\sin kx}{k \log k}$ συγκλίνουν για κάθε x. Εξετάστε αν οι συναρτήσεις που ορίζονται είναι συνεχείς.

3. Για την άσκηση αυτή, αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, γράφουμε $\|f\|_u = \sup\{|f(s)| : s \in \mathbb{R}\}$ και $\|f\|_\infty = \text{esssup}\{|f(s)| : s \in \mathbb{R}\}$.

(α) Δείξτε ότι μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής αν και μόνον αν το όριο $\lim_{s\to 0} \|f_s - f\|_u$ υπάρχει και είναι 0.

(β) Αν $f \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$ και το όριο $\lim\limits_{x\to 0} \|f_x - f\|_\infty$ υπάρχει και είναι 0, δείξτε ότι η f είναι σχεδόν παντού ίση με μια ομοιόμορφα συνεχή συνάρτηση.

4. Λέμε ότι μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ανήκει (α) στον $C_c(\mathbb{R})$ αν είναι συνεχής με συμπαγή φορέα, (β) στον $C_0(\mathbb{R})$ αν είναι συνεχής και "μηδενίζεται στο άπειρο", (γ) στον $C_{bu}(\mathbb{R})$ αν είναι ομοιόμορφα συνεχής και φραγμένη, (δ) στον $C_b(\mathbb{R})$ αν είναι συνεχής και φραγμένη.

Δείξτε ότι τα σύνολα αυτά είναι άλγεβρες και ότι $C_c(\mathbb{R}) \subseteq C_0(\mathbb{R}) \subseteq C_{bu}(\mathbb{R}) \subseteq C_b(\mathbb{R}) \subseteq L^\infty(\mathbb{R})$.

Δείξτε επίσης ότι η $\|\cdot\|_u = \|\cdot\|_\infty$ είναι υποπολλαπλασιαστική νόρμα στην $C_b(\mathbb{R})$, ότι οι $C_0(\mathbb{R})$, $C_{bu}(\mathbb{R})$ και $C_b(\mathbb{R})$ είναι άλγεβρες Banach ως προς τη νόρμα αυτή, και ότι η $C_c(\mathbb{R})$ είναι πυκνή στην $(C_0(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$.