Αρμονική Ανάλυση: Ασκήσεις ΙΙ

1. Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$. Για $r \in (0,1)$ θέτουμε $\quad f_r(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} r^{|k|}\hat{f}(k)e^{ikt}, \quad t \in [-\pi,\pi]$.
Δείξτε ότι $\lim\limits_{r\nearrow 1} \|f_r - f\|_1 = 0$.

[Υπόδειξη: Δείξτε ότι $f_r = f * P_r$ όπου $P_r(t) := \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}e^{int} = \frac{1-r^2}{1-2r\cos t + r^2}$ $0 \le r < 1$ και ότι η $(P_{r_n})_n$, όπου $0 < r_n \nearrow 1$, είναι προσεγγιστική μονάδα για την $L^1(\mathbb{T})$].

Δείξτε επίσης ότι η συνάρτηση $u : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ με

$$u(re^{it}) = f_r(e^{it}), \qquad re^{it} \in \mathbb{D}$$

είναι αρμονική στον δίσκο $\mathbb{D}$, δηλαδή ικανοποιεί την εξίσωση του Laplace $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

2. Αν $f \in C^m(\mathbb{T})$, δείξτε ότι $\hat{f}(k) = O(\frac{1}{|k|^m})$ (δηλαδή ότι η $(|k|^m \hat{f}(k))_{k\in\mathbb{Z}}$ είναι φραγμένη). Αν $\hat{f}(k) = O(\frac{1}{|k|^m})$, τι μπορείτε να συμπεράνετε για την παραγωγισιμότητα της f;

3. Αν $h \in \mathcal{L}^1(\mathbb{T})$ και υπάρχει ανοικτό διάστημα J στο οποίο η h μηδενίζεται, δείξτε ότι η σειρά Fourier της h συγκλίνει στο 0 *ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα* του J.
[Υπόδειξη: Δείξτε ότι η οικογένεια $\{S_n(h)\}$ είναι ισοσυνεχής.]
Θεωρώντας για παράδειγμα την χαρακτηριστική συνάρτηση του J, δείξτε ότι η σύγκλιση δεν είναι πάντα ομοιόμορφη στο J. (Ευχαριστούμε τον Κ. Καββαδία για τη διόρθωση.)

4. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{T}$ και $f' \in L^2(\mathbb{T})$, [1] δείξτε ότι η f ανήκει στην άλγεβρα Wiener (δηλ. ότι $\sum_k |\hat{f}(k)| < \infty$). [Υπόδειξη: Δείξτε ότι $\|f'\|_{L^2}^2 = \sum_k |k\hat{f}(k)|^2$ και εφαρμόστε Cauchy-Schwarz.]

5. Ο πυρήνας του de la Vallée Poussin (V_n) ορίζεται ως εξής: $V_n = 2K_{2n+1} - K_n$. Δείξτε ότι είναι προσεγγιστική μονάδα για την $L^1(\mathbb{T})$, με την ιδιότητα ότι η V_n είναι πολυώνυμο βαθμού $2n+1$ με συντελεστές Fourier $\hat{V}_n(k) = 1$ όταν $|k| \le n+1$.

6. Αν $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ και η f έχει συνεχή και φραγμένη παράγωγο, δείξτε ότι η συνάρτηση $f * g$ είναι παραγωγίσιμη και $(f*g)' = f' * g$.

7. Έστω $F \in L^1(\mathbb{R})$ με $\int F(x)dx = 1$. Για κάθε $\lambda > 0$, ορίζουμε $F_\lambda(x) := \lambda F(\lambda x)$. Δείξτε ότι η οικογένεια $\{F_\lambda : \lambda > 0\}$ είναι προσεγγιστική μονάδα για την $L^1(\mathbb{R})$ (δηλαδή, για κάθε ακολουθία (λ_n) θετικών αριθμών με $\lambda_n \nearrow \infty$, η $(F_{\lambda_n})_n$ είναι προσεγγιστική μονάδα για την $L^1(\mathbb{R})$.

Δείξτε ότι οι επόμενες συναρτήσεις έχουν τις απαιτούμενες ιδιότητες

πυρήνας Féjer για το $\mathbb{R}$: $\quad K(x) = \dfrac{1}{2\pi}\left(\dfrac{\sin x/2}{x/2}\right)^2$

πυρήνας Poisson για το $\mathbb{R}$: $\quad P(x) = \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$

πυρήνας Gauss ή της θερμότητας: $\quad G(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$

8. Αν $\{F_\lambda : \lambda > 0\}$ είναι όπως στην προηγούμενη άσκηση, δείξτε ότι για κάθε $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ ισχύει ότι

$$\lim_{\lambda\to\infty} F_\lambda * f = f \quad \text{ασθενώς-*},$$

δηλαδή $$\lim_{\lambda\to\infty} \int_{\mathbb{R}} (F_\lambda * f)(x)g(x)dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)dx$$

για κάθε $g \in L^1(\mathbb{R})$.

[1] αρκεί να υποθέσουμε ότι η f είναι απολύτως συνεχής (οπότε παραγωγίζεται σχεδόν παντού) και ότι $f' \in L^2(\mathbb{T})$.