Αρμονική Ανάλυση: Ασκήσεις IV

1. Δείξτε ότι για κάθε συμπαγές $K \subseteq \mathbb{R}$ και κάθε $\xi \in \mathbb{R} \backslash K$ υπάρχει $f \in L^1(\mathbb{R})$ ώστε $\hat{f}|_K = 0$ και $\hat{f}(\xi) \neq 0$. Αυτό δείχνει ότι η άλγεβρα Fourier ή Wiener $\{\hat{f} : f \in L^1(\mathbb{R})\}$ είναι κανονική (regular) άλγεβρα Banach.

2. (α) Δείξτε ότι για κάθε $g, h \in L^2(\mathbb{R})$ η συνάρτηση $\phi = g * h$ ανήκει στην άλγεβρα Fourier ή Wiener $\{\hat{f} : f \in L^1(\mathbb{R})\}$.

(β) Δείξτε ότι κάθε $\phi = \hat{f}$ όπου $f \in L^1(\mathbb{R})$ γράφεται ως συνέλιξη $\phi = g * h$ όπου $g, h \in L^2(\mathbb{R})$ αλλά και ως εσωτερικό γινόμενο $\phi(\xi) = \langle T_\xi u, v \rangle$ όπου $u, v \in L^2(\mathbb{R})$ και $T_\xi u(\eta) = u(\eta - \xi)$.

[Υπόδειξη: Plancherel.]

3. Δείξτε ότι υπάρχουν ακολουθίες (f_n) και (g_n) στην $L^1(\mathbb{R})$ με $\|f_n\|_1 \leq 1$ και $\|g_n\|_1 \leq 1$ για κάθε n ώστε κάθε $\operatorname{supp} g_n$ και κάθε $\operatorname{supp} \hat{f}_n$ να είναι συμπαγές σύνολο, τέτοιες ώστε $\|h * f_n - h\|_1 \to 0$ και $\|h * g_n - h\|_1 \to 0$ για κάθε $h \in L^1(\mathbb{R})$.

4. Έστω $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$. Αν $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ είναι n-φορές συνεχώς παραγωγίσιμη και έχει συμπαγή φορέα, δείξτε ότι $g = \hat{f}$, όπου $f \in L^1(\mathbb{R})$ είναι συνεχής και ικανοποιεί $|f(x)| \leq \frac{M}{(1+|x|)^n}$, $(x \in \mathbb{R})$ για κάποια σταθερά M.

5. Έστω $a > 0$. Θεωρούμε το σύνολο $\mathcal{C}_a$ όλων των συναρτήσεων $h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ της μορφής $h(t) = p(t)e^{-at^2}$, όπου p είναι πολύωνυμο. Αποδείξτε ότι το $\mathcal{C}_a$ είναι $\|\cdot\|_\infty$ πυκνό στην $C_0(\mathbb{R})$ που περιέχεται στην $L^1(\mathbb{R})$ και στην άλγεβρα Fourier ή Wiener $\{\hat{f} : f \in L^1(\mathbb{R})\}$ και ότι $\{\hat{h} : h \in \mathcal{C}_a\} = \mathcal{C}_a$.

Χρησιμοποιώντας το $\mathcal{C}_a$, δώστε μια απόδειξη ότι ο μετασχηματισμός Fourier είναι 1-1 στην $L^1(\mathbb{R})$.

[Παρατήρηση[1]-Υπόδειξη: Το $\mathcal{C}_a$ είναι γραμμικός χώρος, αλλά δεν είναι άλγεβρα. Για να δείξουμε ότι το $\mathcal{C}_a$ είναι πυκνό στον $C_0(\mathbb{R})$, αρκεί να δείξουμε ότι στην κλειστή του θήκη περιέχεται κάθε $f \in C_c(\mathbb{R})$. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει πολυώνυμο p ώστε $|p(t)e^{-at^2} - f(t)| < \epsilon$ για κάθε t στον συμπαγή φορέα $K \subseteq \mathbb{R}$ της f. Όμως η συνάρτηση $g(t) := e^{at^2} f(t)$ προσεγγίζεται από πολυώνυμα, ομοιόμορφα στο K, κι αυτό αρκεί.]

6. (α) Υπολογείστε τον μετασχηματισμό Fourier της συνάρτησης $\chi_a(x) = \chi_{[-a,a]}(x)$ όπου $a > 0$, καθώς και της συνάρτησης $\Delta(x) = (1 - |x|)\chi_1(x)$. [Παρατηρείστε ότι $\Delta = \chi_{1/2} * \chi_{1/2}$].

(β) Δείξτε ότι για κάθε $f \in L^1(\mathbb{R})$ ισχύει ότι $\lim\limits_{\lambda\to\infty} \|f - u_\lambda\|_1 = 0$, όπου $\hat{u}_\lambda(\xi) = \chi_{[-\lambda,\lambda]}(\xi) \left(1 - \frac{|\xi|}{\lambda}\right) \hat{f}(\xi)$.

Καμμιά φορά γράφουμε (καταχρηστικά)

$$f(x) = \lim_{\lambda\to\infty} \int_{-\lambda}^{\lambda} \left(1 - \frac{|\xi|}{\lambda}\right) \hat{f}(\xi) e^{+ix\xi} d\xi \qquad \text{ως προς την } \ \|\cdot\|_1 \ .$$

[Υπόδειξη: Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τον πυρήνα Féjer για το $\mathbb{R}$, $K(x) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\sin x/2}{x/2}\right)^2$.]

7. Έστω $f \in L^1(\mathbb{R})$. Δείξτε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $g \in L^1(\mathbb{R})$ τέτοια ώστε $\hat{g}(\xi) = 1$ για κάθε ξ σε μια περιοχή του $0 \in \mathbb{R}$ και

$$\left\| f * g - \left(\int f(x)dx\right) g \right\|_1 < \epsilon \, .$$

[1] Ευχαριστώ για τη διόρθωση