Αρμονική Ανάλυση: Εξέταση 21 Σεπτεμβρίου 2017

1. (α) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{T}$ και $f' \in L^2(\mathbb{T})$, δείξτε ότι η f ανήκει στην άλγεβρα Wiener (δηλ. ότι $\sum_k |\hat{f}(k)| < \infty$).
[Υπόδειξη: Parseval για την f' και Cauchy-Schwarz.]

(β) Έστω $p \in [1, \infty]$. Δείξτε ότι για κάθε $\xi \in \mathbb{R}$ ορίζεται μια γραμμική ισομετρία $T_\xi : L^p(\mathbb{R}) \to L^p(\mathbb{R})$ τέτοια ώστε $T_\xi u(\eta) = u(\eta - \xi)$ όταν $u \in C_c(\mathbb{R})$.

2. (α) Αν $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ και η f έχει συνεχή και φραγμένη παράγωγο, δείξτε ότι η συνάρτηση $f * g$ είναι παραγωγίσιμη και $(f * g)' = f' * g$.

(β) Αν $f \in L^1(\mathbb{R})$ και η συνάρτηση $g(x) = xf(x)$ ανήκει επίσης στον $L^1(\mathbb{R})$, δείξτε ότι η $\hat{f}$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη.

3. (α) Έστω $g \in L^1(\mathbb{R})$ με $\widehat{g} = 0$. Χωρίς τη χρήση του θεωρήματος αντιστροφής για τον $L^1(\mathbb{R})$, δείξτε ότι για κάθε $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ισχύει $\int \widehat{f}(x)g(x)dx = 0$ και να συμπεράνετε ότι $g(x) = 0$ σχεδόν για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(β) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ συνεχώς παραγωγίσιμη και με συμπαγή φορέα. Δείξτε ότι (η f' ανήκει στον $L^1(\mathbb{R})$ και)

$$\widehat{f'}(\xi) = i\xi\widehat{f}(\xi) \quad \text{για κάθε } \ \xi \in \mathbb{R}.$$

4. Εξηγείστε προσεκτικά, με αιτιολόγηση, πώς ορίζεται ο μετασχηματισμός Fourier (α) μιας συνάρτησης $f \in L^1(\mathbb{R})$ και (β) μιας συνάρτησης $f \in L^2(\mathbb{R})$.

Δείξτε ότι
(ι) αν η f είναι συνεχής με συμπαγή φορέα, οι δύο ορισμοί συμπίπτουν και
(ιι) αν η $f \in L^1(\mathbb{R})$, τότε η $\hat{f}$ είναι συνεχής.

5. (α) Έστω $\mathcal{A}$ μεταθετική άλγεβρα Banach με μονάδα. Δείξτε ότι κάθε χαρακτήρας της $\mathcal{A}$ είναι συνεχής γραμμική μορφή νόρμας 1.

(β) Αν J είναι ένα γνήσιο ιδεώδες στην άλγεβρα Banach $(L^1(\mathbb{R}), *, \|\cdot\|_1)$, δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in \mathbb{R}$ ώστε $\hat{f}(\xi) = 0$ για κάθε $f \in J$.

6. Δείξτε ότι ο χώρος $C_b(\mathbb{R}) := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : f \text{ συνεχής και φραγμένη}\}$, εφοδιασμένος με πράξεις κατά συντεταγμένη και τη νόρμα supremum, είναι μεταθετική άλγεβρα Banach με μονάδα. Δείξτε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η απεικόνιση $f \to f(x)$ είναι χαρακτήρας της $C_b(\mathbb{R})$. Υπάρχουν άλλοι;

Να διατυπώνετε πλήρως τα θεωρήματα που χρησιμοποιείτε
Κάθε θέμα βαθμολογείται με 2 μονάδες
ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!