Τα ιδεώδη συμπεριφέρονται ιδεωδώς στην $C(X)$

10 Ιουνίου 2017

Θεώρημα 1 *Αν X είναι συμπαγής* [1] *και Hausdorff τοπολογικός χώρος, κάθε κλειστό ιδεώδες $J \subseteq C(X)$ είναι της μορφής*

$$J = \{f \in C(X) : f|_Z = 0\}$$

όπου

$$Z = Z(J) := \{x \in X : f(x) = 0 \ \ \forall f \in J\}.$$

Παρατήρηση Επομένως, το ιδεώδες J είναι η τομή των μεγιστικών ιδεωδών που το περιέχουν:

$$J = \bigcap \{\ker \delta_x : x \in Z\}$$

Απόδειξη Έστω

$$I(Z) = \{f \in C(X) : f|_Z = 0\}.$$

Προφανώς κάθε $f \in J$ μηδενίζεται στο Z, άρα $J \subseteq I(Z)$.

Για τον αντίστροφο εγκλεισμό, έστω $g \in C(X)$ που μηδενίζεται στο Z (δηλ. $g \in I(Z)$). Θα δείξουμε ότι $g \in J$.

• Υποθέτουμε πρώτα ότι υπάρχει *ανοικτή περιοχή* $V \supseteq Z$ ώστε $g|_V = 0$.

Έστω $x \in V^c = E$. Εφόσον $x \notin Z = Z(J)$, υπάρχει $u_x \in J$ ώστε $u_x(x) \neq 0$.

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $h_x := u_x \bar{u}_x$ ανήκει στο J (!), ότι $h_x \geq 0$ και ότι $h_x(x) > 0$. Το σύνολο

$$V_x := \{t \in X : h_x(t) > 0\}$$

είναι ανοικτή περιοχή του x.

Συνεπώς το $\{V_x : x \in E\}$ είναι ανοικτό κάλυμμα του συμπαγούς συνόλου E, οπότε υπάρχουν $x_1, \ldots, x_n \in E$ ώστε αν $V_k := V_{x_k}$ να έχουμε

[1] file: idealgr

$E \subseteq V_1 \cup \cdots \cup V_n$. Γράφουμε h_k για τις αντίστοιχες συναρτήσεις h_{x_k} και ορίζουμε

$$h := h_1 + \cdots + h_n .$$

Έπεται ότι $h \in J$, $h \geq 0$ και $h(t) > 0$ για κάθε $t \in E$ (γιατί αν $t \in E$ τότε υπάρχει k με $t \in V_k$, άρα $h(t) \geq h_k(t) > 0$). Αφού η h είναι συνεχής και γνησίως θετική στο συμπαγές σύνολο E, έχει ελάχιστη τιμή, έστω $\delta > 0$.

Ορίζουμε τώρα

$$f(x) := \begin{cases} \frac{g(x)}{h(x)}, & x \notin V \\ 0, & x \in V \end{cases}$$

Ισχυρισμός: Η f είναι συνεχής σε κάθε $x_0 \in X$.

Απόδειξη. Έστω $x_i \to x_0$. Αν $x_0 \in V$ τότε $x_i \in V$ τελικά (αφού το V είναι ανοικτό), άρα $f(x_i) = 0$ τελικά. Συνεπώς $f(x_i) \to f(x_0)$.

Αν $x_0 \notin V$, τότε υπάρχει k με $x_0 \in V_k$, οπότε $x_i \in V_k$ τελικά. Όμως $h(x_i) \geq \delta$ και $h(x_0) \geq \delta$, άρα $\frac{1}{h(x_i)} \to \frac{1}{h(x_0)}$ και συνεπώς $\frac{g(x_i)}{h(x_i)} \to \frac{g(x_0)}{h(x_0)}$. Αν $g(x_0) = 0$ τότε $|f(x_i)| \leq \frac{|g(x_i)|}{h(x_i)} \to 0$ οπότε $f(x_i) \to f(x_0)$· αν πάλι $g(x_0) \neq 0$ τότε $g(x_i) \neq 0$ τελικά, άρα $f(x_i) = \frac{g(x_i)}{h(x_i)} \to f(x_0)$.

Δείξαμε ότι $f \in C(X)$· αλλά από τον ορισμό της f έχουμε $g(x) = f(x)h(x)$, άρα $g \in J$ αφού $h \in J$ και το J είναι ιδεώδες.

Έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη στην περίπτωση που η g μηδενίζεται σε μια περιοχή του Z.

• Η γενική περίπτωση: $g|_Z = 0$.

Για κάθε $\epsilon > 0$, θα δείξουμε ότι υπάρχει $g_\epsilon \in C(X)$ ώστε η g_ϵ να μηδενίζεται σε μια ανοικτή περιοχή V του Z και να ισχύει $\|g - g_\epsilon\|_\infty < \epsilon$. Από τα προηγούμενα έχουμε $g_\epsilon \in J$· επειδή το $\epsilon > 0$ είναι τυχόν και το J είναι κλειστό, θα έχουμε δείξει ότι $g \in J$.

Έστω $V_\epsilon = \{x \in X : |g(x)| < \epsilon\}$. Το V_ϵ είναι ανοικτό και περιέχει το Z. Αν $V := V_{\epsilon/2}$, το V είναι ανοικτό και

$$Z \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq V_\epsilon.$$

Από το Λήμμα του Urysohn, υπάρχει $u \in C(X)$, $0 \leq u \leq 1$, με $u(t) = 0$ όταν $t \in \overline{V}$ και $u(t) = 1$ όταν $t \in V_\epsilon^c$.

Θέτουμε $g_\epsilon = gu$. Η g_ϵ είναι συνεχής, μηδενίζεται στο V και $|g(x) - g_\epsilon(x)| < \epsilon$ για κάθε $x \in X$. Πράγματι: αν $x \in V_\epsilon$ τότε

$$|g(x) - g_\epsilon(x)| = |g(x)|(1 - u(x)) \leq |g(x)| < \epsilon,$$

και αν $x \notin V_\epsilon$ τότε $1 - u(x) = 0$ οπότε

$$|g(x) - g_\epsilon(x)| = |g(x)|(1 - u(x)) = 0 < \epsilon.$$

Επομένως $\|g - g_\epsilon\|_\infty < \epsilon$ όπως θέλαμε.