Αρμονική Ανάλυση 2017-18:
Πρόχειρες Περιληπτικές Σημειώσεις

Α. Κ.

13 Ιουνίου 2017

Περιεχόμενα

1 Υπενθύμιση: χώροι L^p

Αν $p \in [1, \infty)$, με το σύμβολο $\mathcal{L}^p(\mathbb{T})$ εννοούμε το σύνολο των μετρησίμων *συναρτήσεων* $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ που ικανοποιούν
$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p dm(t) < \infty \quad \text{(μέτρο Lebesgue)}.$$
Γράφουμε
$$\|f\|_p := \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p dm(t) \right)^{1/p}.$$

Ο χώρος $\mathcal{L}^p(\mathbb{T})$ είναι γραμμικός χώρος και η $\|\cdot\|_p = 0$ είναι ημινόρμα στον $\mathcal{L}^p(\mathbb{T})$, δηλαδή ικανοποιεί, για κάθε $f, g \in \mathcal{L}^p$ και $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\|f\|_p \geq 0$$
$$\|\lambda f\|_p = |\lambda| \, \|f\|_p$$
$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

Η τριγωνική ανισότητα είναι άμεση για $p = 1$ (από τη γραμμικότητα του ολοκληρώματος) και για $p > 1$ έπεται από την ανισότητα Hölder

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t) \frac{dm(t)}{2\pi} \right| \leq \|f\|_p \, \|g\|_q \,, \quad f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{T}), \, g \in \mathcal{L}^q(\mathbb{T})$$

($\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$ για $p > 1$, $q = \infty$ για $p = 1$).

Παρατηρούμε ότι $\|f\|_p = 0$ αν και μόνον αν $f(t) = 0$ *m-σχεδόν για κάθε* t.

Με το σύμβολο $L^p(\mathbb{T})$ συμβολίζουμε τον χώρο των κλάσεων ισοδυναμίας $[f]$, των $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{T})$, modulo ισότητα σχεδόν παντού.

Ο $L^p(\mathbb{T})$ είναι γραμμικός χώρος και η $\|\cdot\|_p$ είναι νόρμα στον $L^p(\mathbb{T})$ ως προς την οποία ο $L^p(\mathbb{T})$ είναι *χώρος Banach* (Θεώρημα Riesz-Fisher). [1]

Ειδικότερα ο χώρος $L^2(\mathbb{T})$ είναι *χώρος Hilbert* ως προς το εσωτερικό γινόμενο

$$\langle f, g \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)} dm(t)$$

που καθορίζει τη νόρμα $\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f \rangle}$.

Αν $1 \leq p \leq q < \infty$ και f μετρήσιμη, έχουμε

$$\|f\|_p \leq \|f\|_q \leq \|f\|_\infty \,, \;\; \text{άρα} \quad L^q(\mathbb{T}) \subseteq L^p(\mathbb{T}) \subseteq L^1(\mathbb{T}).$$

Επίσης, αν $f \in C(\mathbb{T})$ και $f(t) = 0$ m-σχεδόν παντού τότε $f(t) = 0$ για κάθε t· δηλαδή η απεικόνιση $f \to [f] : C(\mathbb{T}) \to L^p(\mathbb{T})$ είναι 1-1 (και συνεχής), γι'αυτό γράφουμε $C(\mathbb{T}) \subseteq L^p(\mathbb{T})$.

Θα χρησιμοποιήσουμε ότι,[1] αν $1 \leq p < \infty$ και μ είναι ένα κανονικό μέτρο Borel στο $\mathbb{T}$, ο χώρος των συνεχών συναρτήσεων είναι πυκνός στον $L^p(\mathbb{T}, \mu)$. Δηλαδή για κάθε $\epsilon > 0$ και κάθε $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{T}, \mu)$ υπάρχει $h \in C(\mathbb{T})$ ώστε $\int |f - h|^p d\mu < \epsilon$.

[1] εκκρεμεί η απόδειξη

2 Σειρές Fourier συναρτήσεων κλάσεως $\mathcal{L}^2$

Έστω $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{T})$. Αν $e_k(t) = e^{ikt}$ όπου k ακέραιος, παρατηρούμε ότι η e_k είναι συνεχής, άρα η fe_k ανήκει στον $\mathcal{L}^1(\mathbb{T})$. Ομοίως, αν $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{T})$ τότε $fe_k \in \mathcal{L}^2(\mathbb{T})$.

Ορισμός 2.1 (Συντελεστές Fourier) *Έστω $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{T})$.*
Ορίζουμε

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} fe_{-k}dm = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}dm(t) \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $S_n(f)$ είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο, άρα συνεχής (και 2π-περιοδική) συνάρτηση, όποια κι αν είναι η $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{T})$.

Παρατήρηση 2.1 *Αν $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{T})$, τότε $\hat{f}(k) = \langle f, e_k\rangle$ και, για κάθε $n \in \mathbb{N}$,*

$$\begin{aligned} (i) \quad & \|f\|_2^2 = \|S_n(f) - f\|_2^2 + \|S_n(f)\|_2^2 \\ \text{άρα} \quad & \|S_n(f)\|_2 \le \|f\|_2 \\ (ii) \quad & \|S_n(f)\|_2^2 = \sum_{k=-n}^{n} |\hat{f}(k)|^2 \end{aligned}$$

Απόδειξη Επειδή $S_n(f) = \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k)e_k$, η $S_n(f)$ ανήκει στη γραμμική θήκη των $\{e_k : |k| \le n\}$ και για κάθε $k = -n, \dots, n$ ισχύει $\langle S_n(f), e_k\rangle = \hat{f}(k) = \langle f, e_k\rangle$, άρα $\langle S_n(f) - f, e_k\rangle = 0$. Δηλαδή η $S_n(f) - f$ είναι κάθετη σε κάθε e_k, $|k| \le n$, άρα είναι κάθετη και στο $S_n(f)$, που είναι γραμμικός συνδυασμός τους. Επομένως από το Πυθαγόρειο Θεώρημα [2] έχουμε

$$\|f\|_2^2 = \|S_n(f) - f\|_2^2 + \|S_n(f)\|_2^2 \,.$$

Η (ii) είναι επίσης συνέπεια του Πυθαγορείου Θεωρήματος (αφού οι προσθετέοι $\hat{f}(k)e_k$ είναι ανά δύο κάθετοι) ή προκύπτει με απευθείας υπολογισμό. $\square$

Πρόταση 2.2 *Αν η $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{T})$, τότε*

$$S_n(f) \xrightarrow{\|\cdot\|_2} f$$

δηλαδή

$$\lim_n \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |S_n(f) - f|^2 dm = 0.$$

Απόδειξη Έστω $\epsilon > 0$. Όπως είναι γνωστό, υπάρχει $g \in C(\mathbb{T})$ ώστε $\|f - g\|_2 < \epsilon$. Επίσης, παρατηρήσαμε ότι $\|S_n(h)\|_2 \le \|h\|_2$ για κάθε $h \in \mathcal{L}^2(\mathbb{T})$, άρα $\|S_n(f) - S_n(g)\|_2 = \|S_n(f - g)\|_2 < \epsilon$ (η S_n είναι γραμμική απεικόνιση!). Επίσης,

$$\|f - S_n(f)\|_2 \le \|f - g\|_2 + \|g - S_n(g)\|_2 + \|S_n(f) - S_n(g)\|_2 < \epsilon + \|g - S_n(g)\|_2 + \epsilon.$$

Έχουμε όμως ήδη δείξει ότι $\|S_n(g) - g\|_2 \to 0$. Έπεται ότι $\|S_n(f) - f\|_2 \to 0$. $\square$

[2] Οι $f, g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{T})$ λέγονται *κάθετες* όταν $\langle f, g\rangle = 0$.
Ένας εύκολος υπολογισμός δείχνει ότι τότε $\|f + g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2$.

Πρόταση 2.3 (Ισότητα Parseval) *Αν $f, g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{T})$, τότε*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2$$

$$\text{και} \quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\bar{g} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)\overline{\hat{g}(k)}.$$

Απόδειξη Από την Παρατήρηση 2.1 έχουμε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$\|f\|_2^2 - \sum_{k=-n}^{n} |\hat{f}(k)|^2 = \|f\|_2^2 - \|S_n(f)\|_2^2 = \|S_n(f) - f\|_2^2 .$$

Όμως από την Πρόταση 2.2 ξέρουμε ότι $\|S_n(f) - f\|_2^2 \to 0$.

Για τη δεύτερη ισότητα, έχουμε, πάλι από την Πρόταση 2.2

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\bar{g} = \langle f, g\rangle = \lim_n \langle S_n(f), g\rangle = \lim_n \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k)\langle e_k, g\rangle = \lim_n \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k)\overline{\langle g, e_k\rangle} . \qquad \square$$

Παρατήρηση 2.4 *Έπεται ότι η ανισότητα Bessel $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(k)|^2 \leq \|f\|_2^2$ ισχύει για κάθε $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{T})$.*

Σχόλιο Το όριο $\lim_n \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k)\overline{\langle g, e_k\rangle}$ ταυτίζεται στην περίπτωσή μας με το διαδοχικό όριο $\lim_n \left(\lim_m \sum_{k=-n}^{m} \hat{f}(k)\overline{\langle g, e_k\rangle}\right)$. Εξηγείστε γιατί.

Πόρισμα 2.5 *Η απεικόνιση*

$$\mathcal{F}_2 : (L^2(\mathbb{T}), \|\cdot\|_2) \to (\ell^2(\mathbb{Z}), \|\cdot\|_2) : f \to \hat{f}$$

είναι καλά ορισμένη γραμμική ισομετρία.
*(***Μοναδικότητα***) Ειδικότερα, η $f \to \hat{f}$ είναι 1-1 στον $L^2(\mathbb{T})$: αν $\hat{f}(k) = \hat{g}(k)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, τότε οι f και g ορίζουν το ίδιο στοιχείο του $L^2(\mathbb{T})$, είναι δηλαδή ίσες σχεδόν παντού.*

Απόδειξη Αν $f, g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{T})$ και $f = g$ σχεδόν παντού, τότε $\hat{f}(k) = \hat{g}(k)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. Άρα η $f \to \hat{f}$ επάγει μια καλά ορισμένη απεικόνιση $[f] \to \hat{f}$ ορισμένη στον $L^2(\mathbb{T})$ (όπως συνηθίζεται, θα ταυτίζουμε παρακάτω την συνάρτηση f με την κλάση ισοδυναμίας της, $[f]$.

Από την ισότητα Parseval έπεται ότι η ακολουθία των συντελεστών Fourier της f ανήκει στον χώρο $\ell^2(\mathbb{Z})$ των τετραγωνικά αθροίσιμων ακολουθιών, και ότι η (προφανώς γραμμική) απεικόνιση $f \to \hat{f}$ είναι ισομετρία. $\square$

Παρατήρηση 2.6 *Γνωρίζουμε ήδη ότι αν $f \in C(\mathbb{T})$ τότε $(\hat{f}(k)) \in \ell^2(\mathbb{Z})$. Το αντίστροφο δεν αληθεύει.*

Παράδειγμα *Η ακολουθία (c_n) με $c_0 = 0$ και $c_n = \dfrac{1}{in}$ για $n \neq 0$, παρόλο που είναι τετραγωνικά αθροίσιμη, δεν είναι ακολουθία συντελεστών Fourier καμμιάς συνεχούς συνάρτησης.*

Πράγματι, ας θεωρήσουμε την (σχεδόν παντού ορισμένη) συνάρτηση f με

$$f(t) = \begin{cases} t+\pi\,, & t \in (-\pi, 0) \\ t-\pi\,, & t \in (0,\pi) \end{cases}$$

Προφανώς $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{T})$. Εύκολα βρίσκει κανείς ότι $\hat{f}(k) = c_k$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. Όμως η f παρουσιάζει άλμα για $t = 0$, επομένως δεν μπορεί να είναι σχεδόν παντού ίση με μια συνεχή συνάρτηση.

Η *πληρότητα* του χώρου $L^2(\mathbb{T})$ ως προς την $\|\cdot\|_2$ οδηγεί στην άρση αυτής της «ανωμαλίας»:

Πρόταση 2.7 *Η $\mathcal{F}_2$ απεικονίζει τον $L^2(\mathbb{T})$ επί του $\ell^2(\mathbb{Z})$:*
Αν $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2 < +\infty$ τότε υπάρχει $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{T})$ ώστε $\hat{f}(k) = c_k$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.
Μάλιστα αν $s_n(t) = \sum\limits_{k=-n}^{n} c_k e^{ikt}$ ισχύει ότι $\|f - s_n\|_2 \to 0$.

Απόδειξη Στην ακολουθία $(c_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ αντιστοιχούμε την τριγωνομετρική σειρά $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}$.
(Δεν ενδιαφερόμαστε αν η σειρά συγκλίνει για κάθε t). Θα δείξουμε ότι η σειρά αυτή συγκλίνει *ως προς την* $\|\cdot\|_2$, οπότε ορίζει ένα στοιχείο του χώρου $L^2(\mathbb{T})$. Από την *πληρότητα* του $L^2(\mathbb{T})$ ως προς την $\|\cdot\|_2$ (Θεώρημα Riesz - Fisher), αρκεί να δείξουμε ότι τα μερικά αθροίσματα της σειράς αποτελούν βασική ακολουθία. Αυτό έπεται αμέσως από το γεγονός ότι ο μετασχηματισμός Fourier είναι ισομετρία από τον $L^2(\mathbb{T})$ στον $\ell^2(\mathbb{Z})$:

Έστω $\epsilon > 0$. Θέτω $a_n = \sum\limits_{k=-n}^{n} |c_k|^2$. Αφού $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2 < +\infty$, από το κριτήριο Cauchy έχουμε ότι υπάρχει $n_o \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $m, n \in \mathbb{N}$ με $m > n \geq n_o$ να ισχύει $|a_m - a_n| < \epsilon$ δηλαδή $\sum\limits_{n<|k|\leq m} |c_k|^2 < \epsilon$. Από την ισότητα Parseval,

$$\sum_{n<|k|\leq m} |c_k|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{n<|k|\leq m} c_k e^{ikt} \right|^2 dt.$$

Θεωρούμε τώρα την $s_n = \sum\limits_{|k|\leq n} c_k e_k \in L^2(\mathbb{T})$ (είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο). Παρατηρούμε όμως ότι για κάθε $m, n \in \mathbb{N}$ με $m > n$ έχουμε

$$s_m - s_n = \sum_{n<|k|\leq m} c_k e_k.$$

Συνεπώς

$$\|s_m - s_n\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{n<|k|\leq m} c_k e^{ikt} \right|^2 dt = \sum_{n<|k|\leq m} |c_k|^2 < \epsilon.$$

Επομένως η ακολουθία (s_n) είναι βασική στον χώρο $L^2(\mathbb{T})$. Υπάρχει λοιπόν $f \in L^2(\mathbb{T})$ ώστε $\|s_n - f\|_2 \to 0$, δηλαδή

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - s_n(t)|^2 dm(t) \to 0.$$

Δείχνουμε ότι $\hat{f}(k) = c_k$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz έπεται ότι, αν $n > |k|$,

$$|\hat{f}(k) - c_k| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(t) - s_n(t)) e^{-ikt} dm(t) \right|^2 \leq \|f - s_n\|_2 \|e_k\|_2$$

και επειδή $\|e_k\|_2 = 1$ και $\|f - s_n\|_2 \to 0$ έχουμε τελικά $|\hat{f}(k) - c_k| = 0$. $\square$

Παρατήρηση 2.8 *Αποδείξαμε ότι αν $\sum |c_k|^2 < \infty$ τότε η σειρά $\sum c_k e_k$ συγκλίνει* **ως προς τη** *$\|\cdot\|_2$ σε μία $f \in L^2(\mathbb{T})$. Είναι αλήθεια ότι η σειρά $\sum c_k e^{ikt}$ συγκλίνει σχεδόν για κάθε t, αλλά αυτό είναι πολύ πιό δύσκολο να αποδειχθεί.* [L. Carleson, Acta Math. 116 (1966), 135–157.]

3 Σειρές Fourier συναρτήσεων κλάσεως $\mathcal{L}^1$

Έστω $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{T})$. Υπενθυμίζουμε τον ορισμό:

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f e_{-k} dm = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dm(t) \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$

Παρατηρήσεις 3.1 (α) Αν $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{T})$ τότε για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ έχουμε $|\hat{f}(k)| \leq \|f\|_1$, άρα

$$\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1 .$$

Πράγματι, $\quad |\hat{f}(k)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f e_{-k} dm \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f e_{-k}| dm = \|f\|_1 .$

Μάλιστα αν η f είναι Riemann-ολοκληρώσιμη, τότε $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ (αφού $\|f\|_1 \leq \|f\|_\infty$).

(β) Αν $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{T})$ και $f = g$ σχεδόν παντού, τότε $\hat{f}(k) = \hat{g}(k)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

Επομένως η απεικόνιση $f \to \hat{f}$ επάγει μια καλά ορισμένη γραμμική απεικόνιση

$$\mathcal{F}_1 : (L^1(\mathbb{T}), \|\cdot\|_1) \to (\ell^\infty(\mathbb{Z}), \|\cdot\|_\infty) : f \to \hat{f}$$

η οποία λόγω της ανισότητας $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$ είναι και συνεχής.

Πρόταση 3.2 (Riemann - Lebesgue) *Αν $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{T})$, τότε*

$$\lim_{k \to +\infty} \hat{f}(k) = \lim_{k \to -\infty} \hat{f}(k) = 0.$$

Δηλαδή

$$\mathcal{F}_1 : (L^1(\mathbb{T}), \|\cdot\|_1) \to (c_0(\mathbb{Z}), \|\cdot\|_\infty) : f \to \hat{f}.$$

Απόδειξη Για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $g \in C(\mathbb{T})$ ώστε $\|f - g\|_1 < \epsilon$. Όμως *για κάθε* $k \in \mathbb{Z}$ έχουμε

$$|\hat{f}(k) - \hat{g}(k)| \leq \|f - g\|_1 < \epsilon$$

(Παρατήρηση 3.1). Εφόσον η ακολουθία $(\hat{g}(k))$ είναι μηδενική (μάλιστα είναι τετραγωνικά αθροίσιμη, από την ανισότητα Bessel) και η $(\hat{f}(k))$ είναι *ομοιόμορφα* κοντά στην $(\hat{g}(k))$, θα είναι κι αυτή μηδενική. Ακριβέστερα: υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $|\hat{g}(k)| < \epsilon$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ με $|k| \geq n$, οπότε

$$|\hat{f}(k)| \leq |\hat{f}(k) - \hat{g}(k)| + |\hat{g}(k)| < 2\epsilon$$

για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ με $|k| \geq n$, άρα

$$\lim_{k\to+\infty} \hat{f}(k) = \lim_{k\to-\infty} \hat{f}(k) = 0. \qquad \square$$

Ας θυμηθούμε ότι είχαμε αποδείξει ότι αν δύο **συνεχείς** 2π-περιοδικές συναρτήσεις έχουν τους ίδιους συντελεστές Fourier, τότε είναι ίσες. Αυτό δεν ισχύει για Lebesgue ολοκληρώσιμες συναρτήσεις: μπορεί να διαφέρουν σε ένα σύνολο μέτρου μηδέν. Αυτό είναι «το χειρότερο που μπορεί να συμβεί»:

Πρόταση 3.3 (Μοναδικότητα) *Αν $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{T})$ και $\hat{f}(k) = \hat{g}(k)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, τότε $f = g$ σχεδόν παντού. Δηλαδή ο μετασχηματισμός Fourier είναι 1-1 στον $L^1(\mathbb{T})$.*

Απόδειξη Θεωρώντας την $f - g$ στη θέση της f, αρκεί να αποδείξω ότι

Αν $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{T})$ και $\hat{f}(k) = 0$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, τότε $f(t) = 0$ σχεδόν για κάθε t.

Απο τη σχέση $0 = \hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f e_{-k} dm$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ συμπεραίνουμε, λόγω της γραμμικότητας του ολοκληρώματος, ότι $0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} fp dm$ για κάθε τριγωνομετρικό πολυώνυμο $p = \sum_k c_k e_k \in \mathcal{P}$: πράγματι,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} fp dm = \sum_k c_k \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f e_k dm = 0.$$

Αν $h \in C(\mathbb{T})$, υπάρχει ακολουθία (p_n) από τριγωνομετρικά πολυώνυμα (π.χ. $p_n = \sigma_n(h)$) ώστε $p_n \to h$ ομοιόμορφα στο $\mathbb{T}$, οπότε

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} hf dm = \lim_n \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f p_n dm = 0.$$

Για να δείξω ότι $f = 0$ σχεδόν παντού, αρκεί να δείξω ότι για κάθε $A \subseteq \mathbb{T}$ Borel ισχύει ότι

$$\int_A f dm = 0$$

Έχουμε, για κάθε $h \in C(\mathbb{T})$, $\int hf dm = 0$ και επομένως

$$\left|\int_A f dm\right| = \left|\int \chi_A f dm\right| = \left|\int \chi_A f dm - \int hf dm\right| \leq \int |\chi_A - h||f| dm\,.$$

Όμως, η συνολοσυνάρτηση ν όπου $\nu(B) = \int_B |f| dm$ είναι μέτρο Borel στο $\mathbb{T}$, και $\int |\chi_A - h||f| dm = \int |\chi_A - h| d\nu$. Όμως, οι συνεχείς συναρτήσεις είναι πυκνές στον χώρο $L^1(\mathbb{T}, \nu)$. Επομένως, για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $h \in C(\mathbb{T})$ ώστε $\int |\chi_A - h| d\nu < \epsilon$. Δηλαδή

$$\left|\int_A f dm\right| \leq \int |\chi_A - h||f| dm = \int |\chi_A - h| d\nu < \epsilon$$

συνεπώς, αφού το $\epsilon > 0$ ήταν τυχόν, έχουμε $\int_A f dm = 0$ και η απόδειξη είναι πλήρης. $\square$

Μια πιο «άμεση» απόδειξη Έστω $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{T})$ με $\hat{f}(k) = 0$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. Θα δείξουμε ότι $f(t) = 0$ σχεδόν για κάθε t. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$F(x) := \int_{-\pi}^{x} f(t) dt, \quad x \in [-\pi, \pi].$$

Αφού η f είναι L^1, η F είναι συνεχής, και ικανοποιεί $F(\pi) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = 2\pi\hat{f}(0) = 0$. Συνεπώς αν δείξουμε ότι $\hat{F}(k) = 0$ για κάθε $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, τότε η F θα είναι σταθερή. (Αυτό προκύπτει από το Θεώρημα Μοναδικότητας για συνεχείς συναρτήσεις, καθώς η συνάρτηση $G(x) = F(x) - \hat{F}(0)\mathbf{1}$ ικανοποιεί $\hat{G}(k) = 0$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ και συνεπώς μηδενίζεται.) Θα έχουμε λοιπόν τότε $\int_x^y f(t)dt = F(y) - F(x) = 0$ για κάθε $x \leq y$, και συνεπώς $f(t) = 0$ σχεδόν για κάθε t (γιατί;).

Θα χρειασθεί το (καθόλου τετριμμένο) Θεώρημα ότι, αν μια συνάρτηση f είναι L^1 σε ένα διάστημα, το «αόριστο ολοκλήρωμά της» F είναι σχεδόν παντού παραγωγίσιμη συνάρτηση και $F'(x) = f(x)$ σχεδόν για κάθε x (βλ. πχ. Κουμουλλή – Νεγρεπόντη, 14,13).

Για κάθε $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}
2\pi\hat{F}(k) &= \int_{-\pi}^{\pi} F(x)e^{-ikx}dx = \frac{1}{-ik}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\left(e^{-ikx}\right)'dx \\
&= \frac{1}{-ik}\left[F(x)e^{-ikx}\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{-ik}\int_{-\pi}^{\pi} F'(x)e^{-ikx}dx \\
&= 0 + \frac{1}{ik}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx = 0 + \frac{2\pi}{ik}\hat{f}(k) = 0. \qquad \square
\end{aligned}$$

Παρατήρηση Θα δώσουμε αργότερα μια διαφορετική απόδειξη της μοναδικότητας.

4 Η συνέλιξη

4.1 Η Συνέλιξη στον $\ell^1(\mathbb{Z})$

Αν $\quad p(t) = \sum_{k=-N}^{N} a_k e^{ikt} \quad$ και $\quad q(t) = \sum_{k=-N}^{N} b_k e^{ikt}$

είναι δύο τριγωνομετρικά πολυώνυμα τότε το κατά σημείο γινόμενο

$$\begin{aligned}
p(t)q(t) &= \sum_k \sum_m a_k b_m e^{i(k+m)t} \quad (k+m=n) \\
&= \sum_k \sum_n a_k b_{n-k} e^{int} = \sum_n \left(\sum_k a_k b_{n-k}\right) e^{int}
\end{aligned}$$

είναι ένα τριγωνομετρικό πολυώνυμο $r(t) = \sum_n c_n e^{int}$ του οποίου οι συντελεστές

$$c_n = \sum_k a_k b_{n-k} = \sum_m a_{n-m} b_m$$

προκύπτουν από την «συνέλιξη» (“convolution”) των συντελεστών (a_k) και (b_k). Γράφουμε

$$(c_k) = (a_k) * (b_k).$$

Μια Πιθανοθεωρητική ερμηνεία:
Θεωρούμε δυο τυχαίες μεταβλητές X, Y που παίρνουν πεπερασμένο πλήθος τιμών. Για κάθε z,

$$P[X+Y=z] = \sum_y P[X+y=z|Y=y]\cdot P[Y=y] = \sum_y P[X=z-y|Y=y]\cdot P[Y=y]$$

Υποθέτουμε τώρα ότι οι X, Y είναι ανεξάρτητες, οπότε $P[X=z-y|Y=y] = P[X=z-y]$ και η προγούμενη σχέση γίνεται

$$P[X+Y=z] = \sum_y P[X=z-y]\cdot P[Y=y]$$

Δηλαδή, αν p_U είναι η συνάρτηση μάζας πιθανότητας μιας τυχαίας μεταβλητής U, τότε

$$p_{X+Y}(z) = \sum_y p_X(z-y)\cdot p_Y(y) \quad \text{δηλαδή} \quad p_{X+Y} = p_X * p_Y\,.$$

Παρατήρηση 4.1 *Με τους προηγούμενους συμβολισμούς,*

$$\|a*b\|_1 \le \|a\|_1\,\|b\|_1$$

Πράγματι, ορίζοντας $a_k = b_k = 0$ για κάθε k με $|k|>N$ έχουμε

$$\|a*b\|_1 = \sum_n |c_n| \le \sum_n\sum_k |a_k b_{n-k}| = \sum_k |a_k| \sum_n |b_{n-k}|$$

όπου οι αθροίσεις γίνονται σε όλο το $\mathbb{Z}$ και η εναλλαγή των αθροίσεων επιτρέπεται, εφόσον μόνο πεπερασμένο πλήθος όρων δεν είναι 0. Όμως το άθροισμα $\sum_{n\in\mathbb{Z}}|b_{n-k}|$ είναι ίσο με $\sum_{m\in\mathbb{Z}}|b_m|$, επομένως το δεξιά μέλος της ανισότητας ισούται με $\|a\|_1\,\|b\|_1$.

Γενικότερα, αν $a=(a_n)$ και $b=(b_n)$ είναι δύο στοιχεία του $\ell^1(\mathbb{Z})$, ορίζουμε μια νέα ακολουθία (c_n) από τον τύπο

$$c_n = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k b_{n-k}\,.$$

Ας δείξουμε (μ΄ έναν σμπάρο δυο τρυγόνια) ότι η σειρά για το κάθε c_n συγκλίνει απόλυτα και ότι η (c_n) ολόκληρη ανήκει στον $\ell^1(\mathbb{Z})$, ως εξής:

Για κάθε $N, M\in\mathbb{N}$, έχουμε όπως προηγουμένως

$$\begin{aligned}\sum_{|n|\le M}\sum_{|k|\le N}|a_k b_{n-k}| &= \sum_{|k|\le N}|a_k|\sum_{|n|\le M}|b_{n-k}| \le \sum_{|k|\le N}|a_k|\sum_{n\in\mathbb{Z}}|b_{n-k}| \\ &\le \sum_{k\in\mathbb{Z}}|a_k|\sum_{m\in\mathbb{Z}}|b_m| = \|a\|_1\,\|b\|_1\,.\end{aligned}$$

Από την ανισότητα αυτή έπεται, πρώτον ότι για κάθε $n\in\mathbb{Z}$ ισχύει ότι

$$\sum_{|k|\le N}|a_k b_{n-k}| \le \|a\|_1\,\|b\|_1 \quad \text{για κάθε } N\in\mathbb{N}$$

και συνεπώς ότι η σειρά $\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k b_{n-k}$ συγκλίνει απόλυτα, και δεύτερον ότι για κάθε $M \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{|n|\le M} |c_n| = \sum_{|n|\le M} \left| \lim_{N\to\infty} \sum_{|k|\le N} a_k b_{n-k} \right| \le \sum_{|n|\le M} \lim_{N\to\infty} \sum_{|k|\le N} |a_k b_{n-k}| \le \|a\|_1 \|b\|_1$$

άρα $(c_n) \in \ell^1(\mathbb{Z})$ και

$$\|c\|_1 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n| \le \|a\|_1 \|b\|_1 .$$

Δείξαμε λοιπόν ότι

Λήμμα 4.2 *Αν $a = (a_n)$ και $b = (b_n)$ είναι στον $\ell^1(\mathbb{Z})$, τότε (α) η σειρά $c_n = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k b_{n-k}$ συγκλίνει απόλυτα και (β) η ακολουθία (c_n) ανήκει στον $\ell^1(\mathbb{Z})$ και*

$$\|c\|_1 \le \|a\|_1 \|b\|_1 .$$

Άμεση συνέπεια για τις απόλυτα συγκλίνουσες σειρές Fourier είναι ότι αποτελούν άλγεβρα, τη λεγόμενη «άλγεβρα Wiener» ή «άλγεβρα Fourier»:

Πρόταση 4.3 *Αν $f, g : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ είναι δύο συναρτήσεις με* απολύτως συγκλίνουσες *σειρές Fourier, τότε και το κατά σημείο γινόμενο $h(t) = f(t)g(t)$ έχει απολύτως συγκλίνουσα σειρά Fourier και μάλιστα*

$$\hat{h} = \hat{f} * \hat{g}$$

$$\text{οπότε} \qquad \sum_n |\hat{h}(n)| \le \sum_k |\hat{f}(k)| \sum_m |\hat{g}(m)| .$$

Απόδειξη Οι ακολουθίες $(a_k) := (\hat{f}(k))$ και $(b_k) := (\hat{g}(k))$ ανήκουν στον $\ell^1(\mathbb{Z})$, άρα η $(c_n) = (a_k) * (b_m)$ ανήκει στον $\ell^1(\mathbb{Z})$. Όμως $c_n = \hat{h}(n)$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, διότι

$$\begin{aligned}\hat{h}(n) = \langle h, e_n \rangle &= \left\langle \left(\sum_k \hat{f}(k) e_k \right) \left(\sum_m \hat{g}(m) e_m \right), e_n \right\rangle \\ &= \sum_{k,m} \hat{f}(k)\hat{g}(m) \langle e_k e_m, e_n \rangle = \sum_k \hat{f}(k)\hat{g}(n-k)\end{aligned}$$

εφόσον $\langle e_k e_m, e_n \rangle = \langle e_{k+m}, e_n \rangle = 0$ εκτός αν $k + m = n$ οπότε $\langle e_k e_m, e_n \rangle = 1$.

4.2 Η Συνέλιξη στον $L^1(\mathbb{R})$

Μπορούμε να ορίσουμε μια αντίστοιχη πράξη στο «συνεχές ανάλογο» των ακολουθιών με πεπερασμένο φορέα, τις (συνεχείς) συναρτήσεις με συμπαγή φορέα:

Αν $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ είναι συνεχείς συναρτήσεις με συμπαγή φορέα (γράφουμε $f, g \in C_c(\mathbb{R})$), τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση $y \to f(x-y)g(y)$ είναι συνεχής με συμπαγή φορέα και άρα το ολοκλήρωμα Riemann

$$(f * g)(x) \equiv \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy$$

υπάρχει και ορίζει μια συνάρτηση [3] $f * g \in C_c(\mathbb{R})$. Ο ορισμός επεκτείνεται στον $f, g \in L^1(\mathbb{R})$.

Θα χρειασθούν δύο βασικά θεωρήματα της Θεωρίας Μέτρου:

[3] Μπορείς να δείξεις ότι, αν οι f, g έχουν *και οι δύο* συμπαγή φορέα, τότε η $f * g$ έχει συμπαγή φορέα. Επίσης αν μία από τις δύο είναι συνεχής, τότε η $f * g$ είναι συνεχής.

Θεωρήματα Tonelli και Fubini [4] Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ και $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ χώροι σ-πεπερασμένου μέτρου. Ονομάζουμε $\mathcal{C} = \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ την μικρότερη σ-άλγεβρα στον χώρο $X \times Y$ που περιέχει τα «μετρήσιμα ορθογώνια» $A \times B$ όπου $A \in \mathcal{A}$ και $B \in \mathcal{B}$. Τότε υπάρχει ένα μοναδικό σ-πεπερασμένο μέτρο $\pi = \mu \otimes \nu$ ορισμένο στην $\mathcal{C}$ που ικανοποιεί

$$\pi(A \times B) = \mu(A)\nu(B) \quad \text{για κάθε} \;\; A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}.$$

Για παράδειγμα, όταν $X = Y = \mathbb{R}$ τότε το μέτρο $m \otimes m$ είναι το διδιάστατο μέτρο Lebesgue m_2, δηλαδή $m_2([a,b] \times [c,d]) = m([a,b])m([c,d]) = (b-a)(c-d)$.

Θεώρημα 4.4 (Tonelli) *Έστω $h : X \times Y \to [0, +\infty]$. Αν η h είναι $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$-μετρήσιμη, τότε*

(α) οι συναρτήσεις

$$X \to [0, +\infty] : \;\; x \to \int_Y h(x,y) d\nu(y)$$

$$Y \to [0, +\infty] : \;\; y \to \int_X h(x,y) d\mu(x)$$

είναι $\mathcal{A}$- (αντιστοίχως $\mathcal{B}$-) μετρήσιμες και

(β) το $\int_{X \times Y} h d(\mu \otimes \nu)$ είναι ίσο με τα διαδοχικά ολοκληρώματα:

$$\int_X \left(\int_Y h(x,y) d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X h(x,y) d\mu(x) \right) d\nu(y) = \int_{X \times Y} h d(\mu \otimes \nu).$$

Θεώρημα 4.5 (Fubini) *Έστω $f \in \mathcal{L}^1(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \otimes \nu)$. Τότε*

(α) μ-σχεδόν για κάθε $x \in X$ ισχύει ότι $\displaystyle\int_Y |f(x,y)| d\nu(y) < +\infty$

και ν-σχεδόν για κάθε $y \in Y$ ισχύει ότι $\displaystyle\int_X |f(x,y)| d\mu(x) < +\infty$

(β) οι (σχεδόν παντού ορισμένες) συναρτήσεις

$$x \to \int_Y f(x,y) d\nu(y) \quad \text{και} \quad y \to \int_X f(x,y) d\mu(x)$$

ορίζουν στοιχεία του $L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ (αντιστοίχως $L^1(Y, \mathcal{B}, \nu)$) και

(γ) ισχύουν οι ισότητες

$$\int_X \left(\int_Y f(x,y) d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x,y) d\mu(x) \right) d\nu(y) = \int_{X \times Y} f d(\mu \otimes \nu).$$

Παρατήρηση 4.6 Τα Θεωρήματα Tonelli και Fubini συνήθως χρησιμοποιούνται σε συνδυασμό: αν δοθεί μια $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$-μετρήσιμη συνάρτηση $f : X \times Y \to \mathbb{C}$, ελέγχουμε αν κάποιο από τα διαδοχικά ολοκληρώματα

$$\int_X \left(\int_Y |f(x,y)| d\nu(y) \right) d\mu(x) \qquad \text{ή} \qquad \int_Y \left(\int_X |f(x,y)| d\mu(x) \right) d\nu(y)$$

δίνει πεπερασμένο αποτέλεσμα, οπότε θα έχουμε από το Θεώρημα Tonelli ότι $f \in \mathcal{L}^1(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \pi)$, και αν αυτό ισχύει, τότε εφαρμόζοντας το Θεώρημα Fubini συμπεραίνουμε ότι το «διπλό» ολοκλήρωμα $\int_{X \times Y} f d\pi$ υπάρχει και ισούται με οποιοδήποτε από τα τα διαδοχικά ολοκληρώματα $\int_Y \left(\int_X f(x,y) d\mu(x) \right) d\mu(x)$ και $\int_X \left(\int_Y f(x,y) d\nu(y) \right) d\mu(x)$.

[4] Αποδείξεις υπάρχουν στο: Κουμουλλή – Νεγρεπόντη, «Θεωρία Μέτρου», Κεφ. 9.

Η συνέλιξη: Μπορούμε τώρα να επεκτείνουμε τον ορισμό της συνέλιξης. Θεωρούμε δυο συναρτήσεις $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ και ορίζουμε τη συνάρτηση

$$\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C} : (x, y) \to f(x - y)g(y).$$

Η συνάρτηση αυτή είναι Borel μετρήσιμη, αφού οι συναρτήσεις

$$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \to x - y \text{ και } (x, y) \to y$$

είναι Borel και η ϕ είναι το γινόμενο των συναρτήσεων

$$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{C} : (x, y) \to (x - y) \to f(x - y) \text{ και } (x, y) \to y \to g(y).$$

Δείχνουμε ότι ανήκει στον $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^2)$: Έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}} |\phi(x, y)|dx = |g(y)| \int_{\mathbb{R}} |f(x - y)|dx \overset{(*)}{=} |g(y)| \int_{\mathbb{R}} |f(t)|dt = |g(y)| \, \|f\|_1$$

όπου η ισότητα $(*)$ οφείλεται στο αναλλοίωτο του μέτρου Lebesgue ως προς μεταθέσεις (δες το Λήμμα 4.10). Επομένως

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |\phi(x, y)|dx \right) dy = \int |g(y)| \, \|f\|_1 \, dy = \|g\|_1 \, \|f\|_1 < +\infty.$$

Από το Θεώρημα Tonelli, το ολοκλήρωμα της $|\phi|$ ως προς το μέτρο Lebesgue στον $\mathbb{R}^2$ είναι πεπερασμένο, επομένως $\phi \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}, m_2)$, και

$$\int_{\mathbb{R}^2} |f(x - y)g(y)|dm_2(x, y) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |\phi(x, y)|dx \right) dy = \|g\|_1 \, \|f\|_1 \, . \qquad (1)$$

Από το Θεώρημα Fubini (4.5(β)) προκύπτει ότι

Λήμμα 4.7 *Υπάρχει σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$ μέτρου μηδέν ώστε για κάθε $x \in A^c$ το ολοκλήρωμα $\int_{\mathbb{R}} f(x - y)g(y)dy$ να υπάρχει (στο $\mathbb{C}$). Γράφουμε*

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x - y)g(y)dy \qquad (x \in A^c).$$

Πάλι από το Θεώρημα Fubini έπεται ότι η σχέση αυτή ορίζει μια $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Παρατηρούμε ότι η $(f * g)(x)$ δεν αλλάζει αν οι f και g μεταβληθούν σε σύνολα μέτρου μηδέν, δηλ. εξαρτάται μόνον από τις κλάσεις $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Δηλαδή η $f * g$ ορίζει ένα στοιχείο του $L^1(\mathbb{R})$ που ονομάζεται **η συνέλιξη (convolution)** των f και g. Ισχύει μάλιστα η

$$\|f * g\|_1 = \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} f(x - y)g(y)dy \right| dx \leq \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |\phi(x, y)|dx \right) dy \overset{(4)}{=} \|g\|_1 \, \|f\|_1 \, . \qquad (2)$$

Παρατήρηση 4.8 *Η απεικόνιση*

$$(L^1(\mathbb{R}), \|\cdot\|_1) \times (L^1(\mathbb{R}), \|\cdot\|_1) \to (L^1(\mathbb{R}), \|\cdot\|_1) : (f, g) \to f * g$$

είναι συνεχής (και προφανώς διγραμμική).

Αυτό έπεται από την ανισότητα (2). Πράγματι, αν οι f_n, f, g_n, g είναι στον L^1 και $\|f_n - f\|_1 \to 0$ και $\|g_n - g\|_1 \to 0$ τότε

$$\|(f_n * g_n) - (f * g)\|_1 \to 0$$

γιατί

$$\begin{aligned} \|f_n * g_n - f * g\|_1 &= \|f_n * (g_n - g) + (f_n - f) * g\|_1 \\ &\leq \|f_n * (g_n - g)\|_1 + \|(f_n - f) * g\|_1 \\ &\leq \|f_n\|_1 \|g_n - g\|_1 + \|f_n - f\|_1 \|g\|_1 \to 0 . \end{aligned}$$

Η συνέχεια της συνέλιξης επιτρέπει, προκειμένου να αποδείξουμε ιδιότητες της συνέλιξης στον L^1, να περιοριζόμαστε σε έναν πυκνό υπόχωρο αποτελούμενο από «επαρκώς λείες» συναρτήσεις:

Λήμμα 4.9 *Η συνέλιξη είναι (διγραμμική) μεταθετική και προσεταιριστική στον L^1: αν οι f, g, h ανήκουν στον L^1 τότε*

$$(i) \quad f * g = g * f \quad \textit{και} \quad (ii) \quad (f * g) * h = f * (g * h) .$$

Απόδειξη Από την συνέχεια της συνέλιξης[5] και το γεγονός ότι ο χώρος $C_c(\mathbb{R})$ είναι πυκνός στον $(L^1, \|\cdot\|_1)$, αρκεί να υποθέσουμε ότι οι f, g, h είναι στον $C_c(\mathbb{R})$. Τότε, από τις γνωστές ιδιότητες του ολοκληρώματος Riemann,

$$\begin{aligned} (g * f)(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(x - t) f(t) dt = \int_{+\infty}^{-\infty} g(y) f(x - y)(-dy) \qquad (x - t = y) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x - y) g(y) dy = (f * g)(x) . \end{aligned} \tag{3}$$

Επίσης

$$\begin{aligned} (f * (g * h))(x) &= \int f(x - y)(g * h)(y) dy = \int f(x - y) \left(\int g(y - t) h(t) dt \right) dy \\ &= \int \left(\int f(x - y) g(y - t) dy \right) h(t) dt \\ &= \int \left(\int f(x - t - u) g(u) du \right) h(t) dt \qquad (u = y - t) \\ &= \int (f * g)(x - t) h(t) dt = ((f * g) * h)(x) . \qquad \square \end{aligned}$$

Σχόλιο Αξίζει να σημειωθεί ότι οι ιδιότητες αυτές της συνέλιξης έπονται από το γεγονός ότι ο $(\mathbb{R}, +)$ είναι αβελιανή ομάδα: η σχέση $x + y = y + x$ δίνει την $f * g = g * f$ και η προσεταιριστικότητα $(x + y) + t = x + (y + t)$ την $(f * g) * h = f * (g * h)$.

[5] για την ακρίβεια, χρειαζόμαστε τη συνέχεια της $(f, g) \to f * g$, καθώς και της $(f, g, h) \to (f * g) * h - f * (g * h)$

4.3 Η δράση του $\mathbb{R}$ και της συνέλιξης στον $L^p(\mathbb{R})$

Θεμελιώδης ιδιότητα του μέτρου Lebesgue m στον $\mathbb{R}$ (ή γενικότερα στον $\mathbb{R}^n$) είναι *το αναλλοίωτο ως προς τις μεταθέσεις* $x \to x+t$ *και τις ανακλάσεις* $x \to -x$. Το επόμενο Λήμμα είναι ουσιαστικά μια αναδιατύπωση των ιδιοτήτων αυτών.

Λήμμα 4.10 *Αν η* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *ανήκει στον* $\mathcal{L}^1$ *τότε για κάθε* $x \in \mathbb{R}$ *έχουμε*

$$(i) \quad \int_{\mathbb{R}} f(y-x)dy = \int_{\mathbb{R}} f(t)dt \quad \textit{και} \quad (ii) \quad \int_{\mathbb{R}} f(-y)dy = \int_{\mathbb{R}} f(t)dt.$$

Επομένως αν $f_x(y) = f(y-x)$ *τότε* $f_x \in \mathcal{L}^1$ *και*

$$\|f_x\|_1 = \|f\|_1 \quad \textit{για κάθε} \;\; x \in \mathbb{R}.$$

Απόδειξη Αν $f = \chi_E$ όπου $E \subseteq \mathbb{R}$ είναι Borel ή Lebesgue μετρήσιμο τότε $f(y-x) = \chi_{E+x}(y)$ και άρα $\int f(y-x)dy = m(E+x) = m(E) = \int f(t)dt$. Από τη γραμμικότητα του ολοκληρώματος έπεται ότι $\int f(y-x)dy = \int f(t)dt$ όταν η f είναι απλή μετρήσιμη συνάρτηση. Η γενική περίπτωση αποδεικνύεται προσεγγίζοντας την f με μια ακολουθία απλών μετρήσιμων συναρτήσεων και χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης.

Ανάλογα αποδεικνύεται και η (ii), εφόσον $\int \chi_E(-y)dy = m(-E) = m(E) = \int \chi_E(t)dt$. $\square$

Πρόταση 4.11 *Έστω* $p \in [1, \infty]$. *Για κάθε* $x \in \mathbb{R}$ *η απεικόνιση* $T_x : g \to g_x$ *είναι μια καλά ορισμένη γραμμική ισομετρία* $L^p(\mathbb{R}) \to L^p(\mathbb{R})$: $(\|g_x\|_p = \|g\|_p)$.
Επίσης $T_{x+y} = T_x \circ T_y$ *και άρα κάθε* T_x *είναι αντιστρέψιμη με* $T_x^{-1} = T_{-x}$. *Δηλαδή η* $\{T_x : x \in \mathbb{R}\}$ *αποτελεί ομάδα ισομετριών.*

Απόδειξη Αν $h, g \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ είναι σχεδόν παντού ίσες, τότε οι συναρτήσεις h_x, g_x είναι (μετρήσιμες και) σχεδόν παντού ίσες (γιατί αν $h(t) = g(t)$ για κάθε $t \notin A$ τότε $h_x(t) = g_x(t)$ για κάθε $t \notin (A+x)$, και $m(A+x) = m(A)$). Έτσι η $g \to g_x$ απεικονίζει κλάσεις ισοδυναμίας σε κλάσεις ισοδυναμίας.

Δείχνουμε ότι $g_x \in L^p$ όταν $g \in L^p$:

Για την περίπτωση $p = +\infty$ αρκεί να παρατηρήσουμε ότι αν $|g(t-x)| \le M$ σχεδόν για κάθε $t \in \mathbb{R}$ τότε $|g(s)| \le M$ σχεδόν για κάθε $s \in \mathbb{R}$· επομένως $\|g_x\|_\infty = \|g\|_\infty$.

Για την περίπτωση $p < \infty$, εφαρμόζοντας το προηγούμενο Λήμμα στην συνάρτηση $f(t) = |g(t)|^p$ (οπότε $f_x = |g_x|^p$), έχουμε ότι $g_x \in L^p(\mathbb{R})$ (άρα η T_x είναι καλά ορισμένη) και

$$\|T_x g\|_p^p = \int |g(t-x)|^p dt = \int |g(t)|^p dt = \|g\|_p^p.$$

Οι υπόλοιποι ισχυρισμοί είναι προφανείς. $\square$

Παρατήρηση 4.12 *Για κάθε* $f \in C_0(\mathbb{R})$ *η απεικόνιση*

$$\mathbb{R} \to C_0(\mathbb{R}) : x \to f_x$$

είναι ομοιόμορφα συνεχής. Αυτό δεν είναι εν γένει αληθές όταν $f \in L^\infty(\mathbb{R})$.

Απόδειξη Ο πρώτος ισχυρισμός είναι άμεση συνέπεια της ομοιόμορφης συνέχειας της f: αν $\epsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $|x| < \delta \Rightarrow |f(t-x) - f(t)| < \epsilon$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$, αφού $|(t-x)-t| < \delta$, οπότε $\|f_x - f\|_\infty \leq \epsilon$.

Ένα παράδειγμα για τον δεύτερο είναι η συνάρτηση $f = \chi_{[0,1]}$: εδώ $\|f_x - f\|_\infty = 1$ όταν $x \neq 0$.

Πρόταση 4.13 *Έστω $p \in [1, \infty)$. Για κάθε $f \in L^p(\mathbb{R})$ η απεικόνιση*

$$(\mathbb{R}, |\cdot|) \to (L^p(\mathbb{R}), \|\cdot\|_p) : x \to f_x$$

είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Απόδειξη Έστω $\epsilon > 0$. Υπάρχει $g \in C_c(\mathbb{R})$ ώστε $\|f - g\|_p < \epsilon$, οπότε και $\|f_x - g_x\|_p = \|T_x(f-g)\|_p < \epsilon$ για κάθε x, άρα έχουμε για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\|f_x - f_y\|_p \leq \|f_x - g_x\|_p + \|g_x - g_y\|_p + \|g_y - f_y\|_p < 2\epsilon + \|g_x - g_y\|_p .$$

Αλλά $g \in C_c(\mathbb{R})$, οπότε υπάρχει $M > 0$ ώστε $g(t) = 0$ όταν $|t| > M$ και η g είναι ομοιόμορφα συνεχής, υπάρχει λοιπόν $\delta > 0$ (και μπορώ να υποθέσω $\delta < 2M$) ώστε $|u - v| < \delta \Rightarrow |g(u) - g(v)| < \frac{\epsilon}{(2M)^{1/p}}$. Αν $|x - y| < \delta$, η διαφορά $|g(t-x) - g(t-y)|$ μηδενίζεται για κάθε t που δεν ανήκει στο σύνολο $K := [x - M, x + M] \cup [y - M, y + M]$ που είναι ένα συμπαγές με μήκος μικρότερο από $\delta + 2M$, [6] και $|g(t-x) - g(t-y)|^p < \frac{\epsilon^p}{2M}$ για κάθε t, άρα έχουμε

$$\begin{aligned} |x - y| < \delta \quad \Rightarrow \quad \|g_x - g_y\|_p^p &= \int |g(t-x) - g(t-y)|^p dt = \int_K |g(t-x) - g(t-y)|^p dt \\ &\leq \int_K \frac{\epsilon^p}{2M} dt = (2M + \delta)\frac{\epsilon^p}{2M} < 2\epsilon^p \leq (2\epsilon)^p \end{aligned}$$

(διότι $|(t-x) - (t-y)| < \delta$ για κάθε t) άρα τελικώς

$$|x - y| < \delta \quad \Rightarrow \quad \|f_x - f_y\|_p < 2\epsilon + \|g_x - g_y\|_p < 3\epsilon. \qquad \square$$

Πρόταση 4.14 *Έστω $f \in L^1(\mathbb{R})$. Για κάθε $p \in [1, \infty)$, αν $g \in L^p(\mathbb{R})$ τότε $g * f \in L^p(\mathbb{R})$ και*

$$\|g * f\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p .$$

Δηλαδή η απεικόνιση $C_f : g \to g * f$ είναι φραγμένος τελεστής $L^p(\mathbb{R}) \to L^p(\mathbb{R})$ με νόρμα το πολύ $\|f\|_1$.

Απόδειξη Η περίπτωση $p = 1$ καλύπτεται από την ανισότητα (2). Έστω λοιπόν $p > 1$. Όπως στην απόδειξη του Λήματος 4.7, η συνάρτηση $(t, s) \to g(s-t)f(t)$ είναι μετρήσιμη. Πρέπει να δείξουμε ότι σχεδόν για κάθε $s \in \mathbb{R}$ η $t \to g(s-t)f(t)$ είναι ολοκληρώσιμη και ότι το ολοκλήρωμα $\int g(s-t)f(t)dt$ ορίζει ένα στοιχείο $g * f$ του $L^p(\mathbb{R})$. Ακολουθούμε την ίδια μέθοδο με τον ορισμό της συνέλιξης (όταν $p = 1$), μόνο που «κατεβαίνουμε» στον $L^1(\mathbb{R})$ πολλαπλασιάζοντας με μία συνάρτηση του $L^q(\mathbb{R})$.

[6] π.χ. αν $y > x$ τότε $K \subseteq [x - M, y + M]$ που έχει μήκος $y + M - (x - M) = y - x + 2M < \delta + 2M$

Έστω $h \in \mathcal{L}^q(\mathbb{R})$. Τότε η συνάρτηση $\psi(s,t) = g(s-t)f(t)h(s)$ είναι μετρήσιμη και

$$\begin{aligned}\int\left(\int|\psi(s,t)|ds\right)dt &= \int\left(\int|g(s-t)f(t)h(s)|ds\right)dt = \int|f(t)|\left(\int|g(s-t)h(s)|ds\right)dt \\ &= \int|f(t)|\left(\int|g_t(s)h(s)|ds\right)dt \overset{(h)}{\leq} \int|f(t)|\left\|g_t\right\|_p\left\|h\right\|_q dt \\ &\overset{(*)}{=} \int|f(t)|\left\|g\right\|_p\left\|h\right\|_q dt = \left(\int|f(t)|dt\right)\left\|g\right\|_p\left\|h\right\|_q = \left\|f\right\|_1\left\|g\right\|_p\left\|h\right\|_q\end{aligned}$$

(στην (h) χρησιμοποιήθηκε η ανισότητα Hölder και στην $(*)$ η Πρόταση 4.11) .

Από το Θεώρημα Tonelli, το ολοκλήρωμα της $|\psi|$ ως προς το μέτρο Lebesgue στον $\mathbb{R}^2$ είναι πεπερασμένο, δηλαδή $\psi \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}, m_2)$, και

$$\int_{\mathbb{R}^2}|g(s-t)f(t)h(s)|dm_2(s,t) = \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}}|\psi(s,t)|ds\right)dt \leq \left\|f\right\|_1\left\|g\right\|_p\left\|h\right\|_q . \tag{4}$$

Από το Θεώρημα Fubini 4.5 (β) προκύπτει ότι υπάρχει ένα μετρήσιμο σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$ με $m(A^c) = 0$ ώστε για κάθε $s \in A$ το ολοκλήρωμα $\int g(s-t)f(t)h(s)dt$ να υπάρχει. Συνεπώς, ορίζεται στο A η συνάρτηση $s \to (g*f)(s)h(s)$, και ανήκει στον $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Τότε όμως, από την τελευταία ανισότητα,

$$\begin{aligned}\left|\int(g*f)(s)h(s)ds\right| &= \left|\int\left(\int g(s-t)f(t)h(s)dt\right)ds\right| \leq \int\left(\int|g(s-t)f(t)h(s)|dt\right)ds \\ &= \int_{\mathbb{R}^2}|g(s-t)f(t)h(s)|dm_2(s,t) \leq \left\|f\right\|_1\left\|g\right\|_p\left\|h\right\|_q .\end{aligned}$$

Αφού η ανισότητα αυτή ισχύει για κάθε $h \in \mathcal{L}^q(\mathbb{R})$, έπεται [7] ότι η $g*f$ ορίζει ένα στοιχείο του $L^p(\mathbb{R})$ και μάλιστα

$$\left\|g*f\right\|_p \leq \left\|f\right\|_1\left\|g\right\|_p .$$

Άλλη απόδειξη Θα αποδείξουμε πρώτα το εξής:

Ισχυρισμός: Σχεδόν για κάθε $s \in \mathbb{R}$ *η* μετρήσιμη συνάρτηση $t \to g(s-t)f(t)$ *είναι ολοκληρώσιμη.*

Απόδειξη. Θεωρούμε το *πεπερασμένο* κανονικό μέτρο Borel μ στον $\mathbb{R}$ που ορίζεται από τη σχέση

$$\mu(E) = \int_E|f(t)|dt \quad (E \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}) \qquad \text{συμβολικά } \ d\mu(t) = |f(t)|dt.$$

Εφορμόζοντας την ανισότητα Hölder για το μέτρο αυτό έχουμε

$$\begin{aligned}\int|g(s-t)f(t)|dt &= \int|g_t(s)|\mathbf{1}d\mu(t) \leq \left(\int|g_t(s)|^p d\mu(t)\right)^{1/p}\left(\int\mathbf{1}^q d\mu(t)\right)^{1/q} \\ &= \left(\int|g_t(s)|^p|f(t)|dt\right)^{1/p}\left\|f\right\|_1^{1/q} .\end{aligned} \tag{5}$$

[7] πράγματι, αν γράψουμε $g*f = uv$ όπου $v = |g*f|$ και $|u| = 1$, τότε θέτοντας $h = \bar{u}v^{p-1}$ υπολογίζει κανείς εύκολα ότι $h \in \mathcal{L}^q$, και επειδή $(g*f)(s)h(s) = v(s)^p$ η ανισότητα δίνει

$$\int|(g*f)(s)|^p ds = \int v(s)^p ds = \left|\int(g*f)(s)h(s)ds\right| \leq \left\|f\right\|_1\left\|g\right\|_p\left\|h\right\|_q$$

από το οποίο προκύπτει $g*f \in L^p(\mathbb{R})$ και $\left\|g*f\right\|_p = (\int|v(s)|^p ds)^{1/p} \leq \left\|f\right\|_1\left\|g\right\|_p$, γιατί $\left\|h\right\|_q = \left(\int v(s)^p ds\right)^{1/q}$.

Όμως η συνάρτηση $\phi(s,t) = |g_t(s)|^p |f(t)|$ είναι μετρήσιμη και

$$\begin{aligned} \int \left(\int \phi(s,t) ds \right) dt &= \int |f(t)| \left(\int |g_t(s)|^p ds \right) dt \qquad (6) \\ &= \int |f(t)| \, \|g_t\|_p^p \, dt = \int |f(t)| \, \|g\|_p^p \, dt = \|f\|_1 \, \|g\|_p^p < \infty \, . \end{aligned}$$

Από το Θεώρημα Tonelli έπεται ότι

$$\int \left(\int |g_t(s)|^p |f(t)| dt \right) ds = \int \left(\int \phi(s,t) dt \right) ds = \|f\|_1 \, \|g\|_p^p < \infty$$

άρα σχεδόν για κάθε $s \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\int |g_t(s)|^p |f(t)| dt = \int \phi(s,t) dt < \infty$$

οπότε από την ανισότητα (5) έχουμε, σχεδόν για κάθε $s \in \mathbb{R}$,

$$\int |g(s-t) f(t)| dt \le \left(\int |g_t(s)|^p |f(t)| dt \right)^{1/p} \|f\|_1^{1/q} < \infty$$

και ο ισχυρισμός αποδείχθηκε.

Δείξαμε λοιπόν ότι σχεδόν για κάθε $s \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση

$$s \to \int g(s-t) f(t) dt = (g * f)(s)$$

ορίζεται και

$$|(g*f)(s)| \le \int |g(s-t) f(t)| dt \le \|f\|_1^{1/q} \left(\int |g_t(s)|^p |f(t)| dt \right)^{1/p} .$$

Έπεται λοιπόν ότι

$$\begin{aligned} \int |(g*f)(s)|^p ds &\le \int \left(\int |g(s-t) f(t)| dt \right)^p ds \le \|f\|_1^{p/q} \int \left(\int |g_t(s)|^p |f(t)| dt \right) ds \\ &= \|f\|_1^{p/q} \int \left(\int |g_t(s)|^p |f(t)| ds \right) dt = \|f\|_1^{p/q} \int \left(|f(t)| \int |g_t(s)|^p ds \right) dt \\ &\le \|f\|_1^{p/q} \, \|g\|_p^p \, \|f\|_1 = (\|f\|_1 \, \|g\|_p)^p \end{aligned}$$

δηλαδή $g * f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ και

$$\|g*f\|_p = \left(\int |(g*f)(s)|^p ds \right)^{1/p} \le \|f\|_1 \, \|g\|_p \, . \qquad \square$$

5 Προσεγγιστικές μονάδες, καλοί πυρήνες ...

Ορισμός 5.1 *Έστω $(\mathcal{A}, *, \|\cdot\|)$ μια άλγεβρα Banach. Μια ακολουθία (u_n) όπου $u_n \in A$ λέγεται* προσεγγιστική μονάδα (approximate identity) *για την $\mathcal{A}$ αν για κάθε $f \in \mathcal{A}$ έχουμε $\|f - (u_n * f)\| \to 0$ και $\|f - (f * u_n)\| \to 0$.*

Θεώρημα 5.1 *Αν μια ακολουθία (u_n) όπου $u_n \in L^1(\mathbb{R})$ έχει τις ιδιότητες*

(α) Υπάρχει M ώστε $\|u_n\|_1 \le M$ για κάθε n.

(β) Αν $\delta \in (0, \pi)$ τότε $\lim\limits_m \int_{(-\delta,\delta)^c} |u_m(x)|dx = 0$.

(γ) $\int_{\mathbb{R}} u_n(x)dx = 1$ για κάθε n

τότε η (u_n) είναι προσεγγιστική μονάδα για την $L^1(\mathbb{R})$.

Μάλιστα για κάθε $p \in [1, \infty)$ και κάθε $f \in L^p(\mathbb{R})$ έχουμε $u_n * f \in L^p(\mathbb{R})$ για κάθε n και $\|f - u_n * f\|_p \to 0$.

Επιπλέον αν η f είναι ομοιόμορφα συνεχής και φραγμένη τότε η $u_n * f$ είναι ομοιόμρφα συνεχής ! *για κάθε n και $\|f - u_n * f\|_\infty \to 0$.*

Απόδειξη *(a) Ισχυρισμός* Έστω $p \in [1, \infty)$ και $f \in L_p(\mathbb{R})$ ή $p = +\infty$ και f ομοιόμορφα συνεχής. Τότε

$$\|(u_n * f) - f\|_p \le \int \|f_s - f\|_p |u_n(s)|ds\,. \tag{7}$$

Απόδειξη (ι) Έστω πρώτα $p = +\infty$ και $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ομοιόμορφα συνεχής. Έχουμε δείξει (άσκηση) ότι το ολοκλήρωμα

$$(u_n * f)(t) = \int_{\mathbb{R}} u_n(s) f_s(t) ds$$

ορίζεται για κάθε $t \in \mathbb{R}$ και είναι ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση. Εφόσον $\int_{\mathbb{R}} u_n(x)dx = 1$, έχουμε

$$\begin{aligned}
(u_n * f)(t) - f(t) &= \int_{\mathbb{R}} u_n(s) f_s(t) ds - \left(\int_{\mathbb{R}} u_n(x)dx \right) f(t) \\
&= \int_{\mathbb{R}} u_n(s)(f_s(t) - f(t)) ds \\
\text{άρα} \quad |(u_n * f)(t) - f(t)| &\le \int |f_s(t) - f(t)| |u_n(s)| ds \le \int \|f_s - f\|_\infty |u_n(s)| ds \\
\text{και συνεπώς} \quad \|(u_n * f) - f\|_\infty &\le \int \|f_s - f\|_\infty |u_n(s)| ds\,.
\end{aligned}$$

(ιι) Έστω $p \in [1, \infty)$ και $f \in L_p(\mathbb{R})$.
Έχουμε ήδη δείξει ότι $u_n * f \in L_p(\mathbb{R})$ και ότι $\|u_n * f\|_p \le \|u_n\|_1 \|f\|_p$.

Επίσης, *ισχυρίζομαι ότι το ολοκλήρωμα της συνάρτησης $s \to u_n(s) f_s : \mathbb{R} \to L_p(\mathbb{R})$ υπάρχει στον $L_p(\mathbb{R})$ και ισούται με $u_n * f$.*

Για να το δείξουμε, πρέπει να δείξουμε ότι για κάθε $\phi \in (L^p(\mathbb{R}))^*$ ισχύει η ισότητα [8]

$$\int \phi(u_n(s)f_s))ds = \phi(u_n * f).$$

Πράγματι, υπάρχει $h \in L^q(\mathbb{R})$ ώστε

$$\phi(g) = \int h(t)g(t)dt, \quad g \in L^p(\mathbb{R}),$$

οπότε έχουμε

$$\begin{aligned}\int \phi(u_n(s)f_s))ds &= \int u_n(s)\phi(f_s)ds = \int u_n(s)\left(\int h(t)f_s(t)dt\right)ds \\ &\overset{(F)}{=} \int h(t)\left(\int u_n(s)f_s(t)ds\right)dt = \int h(t)\left(u_n * f\right)(t)dt \\ &= \phi(u_n * f)\end{aligned}$$

(η ισότητα (F) έπεται όπως συνήθως (δες την απόδειξη της Πρότασης 4.14) από τα θεωρήματα Tonelli και Fubini). Άρα το ολοκλήρωμα υπάρχει και μάλιστα $\int u_n(s)f_s ds = u_n * f$.

Όπως πριν, έχουμε τη σχέση $(u_n * f) - f = \int_{\mathbb{R}}(f_s - f)u_n(s)ds$. Έπεται από την «ανισότητα Minkowski για ολοκληρώματα» ότι

$$\|(u_n * f) - f\|_p \le \int \|(f_s - f)u_n(s)\|_p \, ds = \int \|(f_s - f)\|_p \, |u_n(s)| ds \,.$$

και ο Ισχυρισμός αποδείχθηκε. $\square$

(β) Έχουμε δείξει ότι, αν $p < \infty$ και $f \in L_p(\mathbb{R})$, τότε για κάθε $\epsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $\|f_s - f\|_p < \epsilon$ όταν $|s| < \delta$ (Πρόταση 4.13).

Το ίδιο ισχύει αν $p = +\infty$ και $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ομοιόμορφα συνεχής και φραγμένη: πράγματι, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $|x| < \delta \Rightarrow |f(t-x) - f(t)| < \epsilon/2$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$, αφού $|(t-x) - t| < \delta$, οπότε $\|f_x - f\|_\infty < \epsilon$. !

Και στις δυο περιπτώσεις, για αυτό το δ χωρίζουμε το ολοκλήρωμα σε δύο:

$$\int \|f_s - f\|_p \, |u_n(s)|ds| = \int_{-\delta}^{\delta} |u_n(s)| \, \|f_s - f\|_p \, ds + \int_{(-\delta,\delta)^c} |u_n(s)| \, \|f_s - f\|_p \, ds \,.$$

Στο πρώτο ολοκλήρωμα έχουμε $\|f_s - f\|_p < \epsilon$, άρα

$$\int_{-\delta}^{\delta} |u_n(s)| \, \|f_s - f\|_p \, ds \le \epsilon \int_{-\delta}^{\delta} |u_n(s)|ds \le \epsilon \, \|u_n\|_1 \le M\epsilon \,.$$

από την ιδιότητα (α). Το δεύτερο, εφόσον $\|f_s - f\|_p \le \|f_s\|_p + \|f\|_p \le 2\|f\|_p$, ελέγχεται από την ιδιότητα (β):

$$\int_{(-\delta,\delta)^c} |u_n(s)| \, \|f_s - f\|_p \, ds \le 2\|f\|_p \int_{(-\delta,\delta)^c} |u_n(s)|ds \,.$$

[8] δες το αρχείο `integr.pdf`

Από την ιδιότητα (γ), για το συγκεκριμένο δ, υπάρχει n_0 ώστε $\int_{(-\delta,\delta)^c} |u_n(s)|ds < \epsilon$ για κάθε $n \geq n_0$. Τότε

$$\int \|f_s - f\|_p |u_n(s)|ds| = \int_{-\delta}^{\delta} |u_n(s)| \|f_s - f\|_p ds + \int_{(-\delta,\delta)^c} |u_n(s)| \|f_s - f\|_p ds < M\epsilon + 2\|f\|_p\epsilon$$

άρα

$$\lim_n \|(u_n * f) - f\|_p = 0. \qquad \square$$

Παραδείγματα 5.2 *Η ιδιότητα (β) του Θεωρήματος ικανοποιείται τετριμμένα όταν ο φορέας της u_n «τείνει στο $\{0\}$». Μάλιστα, αν επιλέξουμε οποιαδήποτε $u_n \in L^1(\mathbb{T})$ με $u_n \geq 0$, $\|u_n\| = 1$ και $u_n(t) = 0$ όταν $|t| > 1/n$ για κάθε n (για παράδειγμα $u_n(t) = n(1 - n|t|)\chi_{[-1/n,1/n]}$) ή $u_n(t) = \frac{n}{2}\chi_{[-1/n,1/n]}$), τότε η (u_n) είναι προσεγγιστική μονάδα για τον $L^1(\mathbb{T})$.*

Παρατηρούμε όμως ότι ένα μη μηδενικό τριγωνομετρικό πολυώνυμο δεν μηδενίζεται έξω από «μικρά σύνολα» όπως το $[\frac{-1}{n}, \frac{1}{n}]$. Υπάρχουν όμως ακολουθίες τριγωνομετρικών πολυωνύμων που ικανοποιούν την ιδιότητα (β). Ένα παράδειγμα είναι ο πυρήνας (K_m) του Féjer, που μάλιστα ικανοποιεί $\|K_m\|_1 \leq 1$ για κάθε m και $K_m(t) \geq 0$ για κάθε t και m. Ο πυρήνας (D_m) του Dirichlet δεν *ικανοποιεί την (a).*

6 Αθροισιμότητα στον $L^p(\mathbb{T})$

Θεώρημα 6.1 (Féjer II) *Έστω $p \in [1, \infty)$ και $f \in L^p(\mathbb{T})$. Τότε*

$$\lim_{m\to\infty} \|\sigma_m(f) - f\|_p = 0.$$

Απόδειξη Γνωρίζουμε ότι

$$\sigma_m(f)(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t-s)K_m(s)ds = (f * K_m)(t)$$

όπου K_m ο πυρήνας του Féjer. Επειδή η ακολουθία (K_m) ικανοποιεί τις απαιτήσεις του Θεωρήματος 5.1 (είναι «καλός πυρήνας») το ζητούμενο έπεται αμέσως από το Θεώρημα αυτό.

Πόρισμα 6.2 (Μοναδικότητα, δεύτερη απόδειξη) *Αν $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{T})$ και $\hat{f} = \hat{g}$ τότε $f = g$ σχεδόν παντού.*

Απόδειξη Έχουμε $\hat{f}(k) = \hat{g}(k)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, άρα $\sigma_m(f) = \sigma_m(g)$ για κάθε $m \in \mathbb{N}$. Συνεπώς

$$\|f - g\|_1 = \lim_{m\to\infty} \|\sigma_m(f - g)\|_1 = 0. \quad \square$$

Παρατήρηση 6.3 *Αν $f \in L^\infty(\mathbb{T})$, τότε $\|\sigma_n(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$, άρα η ακολουθία $(\sigma_n(f))$ είναι πάντα ομοιόμορφα φραγμένη.*

Πράγματι,

$$|\sigma_m(f,t)| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t-x)K_m(x)dx\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t-x)|K_m(x)dx$$
$$\leq \sup\{|f(s)| : -\pi \leq s \leq \pi\}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_m(x)dx = \|f\|_\infty$$

Θα δούμε αργότερα ότι αυτό δεν ισχύει πάντα για την ακολουθία $(S_n(f))$.

Θα χρειαστεί μια ακόμη παρατήρηση (η εύκολη απόδειξη αφήνεται ως άσκηση):

Παρατήρηση 6.4 $\sigma_n(f,t) = \sum_{k=-n}^{n} \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) \hat{f}(k) e^{ikt}$.

Παρατήρηση 6.5 *Το Θεώρημα Féjer II δεν ισχύει στον $L^\infty(\mathbb{T})$. Ισχύει όμως ότι για κάθε $g \in L^1(\mathbb{T})$ έχουμε* [9]

$$\lim_m \langle \sigma_m(f), g\rangle = \langle f, g\rangle$$

όπου $\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}dt$.

Απόδειξη Αν $f \in L^\infty(\mathbb{T})$, οι συναρτήσεις $\sigma_m(f)$ είναι τριγωνομετρικά πολυώνυμα, άρα συνεχείς συναρτήσεις. Αν λοιπόν $\|\sigma_m(f) - f\|_\infty \to 0$, τότε η ακολουθία $(\sigma_m(f))$ συγκλίνει ομοιόμορφα, και συνεπώς συγκλίνει σε συνεχή συνάρτηση. Άρα, αν η f δεν είναι συνεχής (δηλ. δεν υπάρχει συνεχής συνάρτηση στην κλάση ισοδυναμίας f), η $(\sigma_m(f))$ αποκλείεται να συγκλίνει ως προς την $\|\cdot\|_\infty$.

Παρατήρησε τώρα ότι, για κάθε $g \in L^1(\mathbb{T})$, έχουμε $\langle \sigma_n(f), g\rangle = \langle f, \sigma_n(g)\rangle$. Πράγματι, χρησιμοποιώντας το θεώρημα Fubini στην (F) όπως συνήθως,

$$\begin{aligned}
\langle \sigma_n(f), g\rangle &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (f * K_n)(t)\bar{g}(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)K_n(t-s)ds\right)\bar{g}(t)dt \\
&\overset{(F)}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \bar{g}(t)K_n(t-s)dt\right)ds \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \bar{g}(t)K_n(s-t)dt\right)ds \quad (\text{γιατί} \quad K_n(x) = K_n(-x)) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)\left(\bar{g} * K_n\right)(s)ds = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)\overline{(g * K_n)(s)}ds \\
&= \langle f, \sigma_n(g)\rangle
\end{aligned}$$

γιατί $K_n(x) = \overline{K_n(x)}$. [10] Ένας άλλος τρόπος απόδειξης είναι ο εξής:

$$\begin{aligned}
\langle \sigma_n(f), g\rangle &= \left\langle \sum_{k=-n}^{n}\left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right)\hat{f}(k)e_k, g\right\rangle \\
&= \sum_{k=-n}^{n}\left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right)\hat{f}(k)\langle e_k, g\rangle = \sum_{k=-n}^{n}\left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right)\hat{f}(k)\overline{\hat{g}(k)} \\
&= \sum_{k=-n}^{n}\left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right)\langle f, e_k\rangle\overline{\hat{g}(k)} \\
&= \sum_{k=-n}^{n}\left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right)\langle f, \hat{g}(k)e_k\rangle \\
&= \left\langle f, \sum_{k=-n}^{n}\left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right)\hat{g}(k)e_k\right\rangle = \langle f, \sigma_n(g)\rangle
\end{aligned}$$

[9] λέμε τότε ότι $\sigma_m(f) \to f$ «ασθενώς-∗»

[10] Ας σημειώσουμε ότι η μέθοδος αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί για οποιαδήποτε προσεγγιστική μονάδα (u_n) ικανοποιεί $u_n(x) = u_n(-x)$ ή $u_n(x) = \overline{u_n(-x)}$.

Από το προηγούμενο Θεώρημα, έχουμε όμως $\lim_n \|\sigma_n(g) - g\|_1 = 0$. Συνεπώς,

$$\lim_n \langle \sigma_n(f), g\rangle = \lim_n \langle f, \sigma_n(g)\rangle = \langle f, g\rangle . \qquad \square$$

7 Αποκλίνουσες σειρές Fourier

7.1 Μια σειρά Fourier που δεν συγκλίνει παντού

Θεωρούμε τα τριγωνομετρικά πολυώνυμα

$$p_N(t) = \sum_{m=1}^{N} \frac{1}{m}(e^{-imt} - e^{imt}) = \frac{2}{i}\sum_{m=1}^{N} \frac{1}{m}\sin mt$$

Έχουμε δείξει ότι

$$|p_N(t)| = 2\left|\sum_{m=1}^{N} \frac{1}{m}\sin mt\right| \le 2 + \pi$$

για κάθε t και N. Παρατηρούμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ έχουμε

$$\hat{p}_N(n) = \sum_{m=1}^{N} \frac{1}{m}(\delta_{-m,n} - \delta_{m,n}) = \begin{cases} \frac{1}{|n|}, & -N \le n < 0 \\ 0, & n = 0 \\ \frac{-1}{|n|}, & 0 < n \le N \end{cases}$$

δηλαδή ο $\hat{p}_N$ φέρεται στο σύνολο $[-N, 0) \cup (0, N]$. Θέτουμε τώρα $n_k = 2^{2^k}$ και ορίζουμε

$$q_k(t) = e^{i2n_kt} p_{n_k}(t) = \sum_{m=1}^{n_k} \frac{1}{m}\left(\exp i(2n_k - m)t - \exp i(2n_k + m)t\right)$$

$$\text{οπότε} \quad \hat{q}_k(n) = \hat{p}_{n_k}(n - 2n_k) = \begin{cases} \frac{1}{2n_k - n}, & n_k \le n < 2n_k \\ 0, & n = 0 \\ \frac{-1}{n - 2n_k}, & 2n_k < n \le 3n_k \end{cases}$$

δηλαδή ο $\hat{q}_k$ φέρεται στο σύνολο $[n_k, 2n_k) \cup (2n_k, 3n_k]$ και παίρνει τις τιμές

$$\frac{1}{n_k}, \frac{1}{n_k + 1}, \ldots, \frac{1}{2}, 1, 0, -1, \frac{-1}{2}, \ldots, \frac{-1}{n_k} .$$

Παρατήρησε ότι, επειδή η ακολουθία (n_k) αυξάνει γρήγορα, οι $\hat{q}_k$ και $\hat{q}_l$ φέρονται σε ξένα σύνολα όταν $k \ne l$ (γιατί $3n_k < n_{k+1}$).

Έστω $a_k > 0$ με $\sum_k a_k < \infty$ (θα επιλέξουμε αργότερα συγκεκριμένη ακολουθία). Επειδή $\sum_k |a_k q_k(t)| \le \sum_k a_k(2 + \pi)$ για κάθε t, η σειρά $\sum_k a_k q_k$ συγκλίνει ομοιόμορφα, άρα ορίζει συνεχή συνάρτηση:

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k q_k(t).$$

Έχουμε $\hat{f}(n) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \hat{q}_k(n)$ λόγω ομοιόμορφης σύγκλισης. Επομένως $\hat{f}(n) = \dfrac{a_k}{2n_k - n}$ αν το n ανήκει σε κάποιο $[n_k, 2n_k) \cup (2n_k, 3n_k]$ και $\hat{f}(n) = 0$ αλλιώς. [11]

[11] Ειδικότερα $\hat{f}(n) = 0$ όταν $n < 0$ οπότε η f είναι «αναλυτικού τύπου»: ανήκει στην άλγεβρα του δίσκου $A(\mathbb{D})$, δηλαδή υπάρχει μια $\tilde{f} : \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C}$ συνεχής ώστε η $\tilde{f}|_{\mathbb{D}}$ να είναι ολόμορφη και $\tilde{f}(e^{it}) = f(t)$ όταν $t \in \mathbb{R}$.

Κατά συνέπεια, αν $S_m = \sum_{n=-m}^{m} \hat{f}(n)e_n = \sum_{n=1}^{m} \hat{f}(n)e_n$ είναι το μερικό άθροισμα της σειράς Fourier της f, τότε

$$\begin{aligned}|S_{3n_k}(0) - S_{2n_k}(0)| &= \left|\sum_{n=2n_k+1}^{3n_k} \hat{f}(n)\right| = \left|\sum_{n=2n_k+1}^{3n_k} \frac{a_k}{2n_k - n}\right| = a_k \left|\sum_{n=2n_k+1}^{3n_k} \frac{1}{2n_k - n}\right| \\ &= a_k \sum_{m=1}^{n_k} \frac{1}{m} \geq a_k \log(n_k) = a_k 2^k \log 2.\end{aligned}$$

Αν τώρα επιλέξουμε $a_k = 1/k^2$, εξασφαλίζουμε ότι η σειρά $\sum_k a_k q_k$ συγκλίνει ομοιόμορφα, οπότε η f είναι καλά ορισμένη και συνεχής, αλλά

$$|S_{3n_k}(0) - S_{2n_k}(0)| \geq \frac{2^k}{k^2} \log 2,$$

άρα η $(S_n(0))$ δεν είναι ούτε καν φραγμένη, πόσο μάλλον συγκλίνουσα.

7.2 Αποκλίνουσες σειρές Fourier

Τίθενται τώρα δύο ερωτήματα:
(α) Αν f είναι μια συνεχής συνάρτηση, πόσο «μεγάλο» μπορεί να είναι το σύνολο των σημείων στα οποία η σειρά Fourier της f αποκλίνει; Εφόσον η f είναι L^2, ξέρουμε από το αποτέλεσμα του Carleson ότι το σύνολο αυτό είναι πάντα μέτρου μηδέν. [12] Θα δείξουμε όμως ότι είναι τοπολογικά μεγάλο.
(β) Πόσο «μεγάλο» είναι το σύνολο των συναρτήσεων των οποίων η σειρά Fourier αποκλίνει σε «πολλά» σημεία;

Θα απαντήσουμε στα ερωτήματα αυτά χρησιμοποιώντας μια βασική αρχή της Συναρτησιακής Ανάλυσης, που είναι συνέπεια του Θεωρήματος Baire για πλήρεις μετρικούς χώρους:

Θεωρούμε τον χώρο Banach $(C(\mathbb{T}), \|\cdot\|_\infty)$. Για κάθε $t \in (-\pi, \pi]$, ονομάζουμε $\{p_{m,t} : m \in \mathbb{N}\}$ την οικογένεια ημινορμών όπου

$$p_{m,t}(f) = |S_m(f,t)| = \left|\sum_{|k|\leq n} \hat{f}(k)e^{ikt}\right|.$$

Οι ημινόρμες αυτές είναι *συνεχείς*:

$$p_{m,t}(f) = |(f * D_m)(t)| \leq \|D_m\|_1 \|f\|_\infty .$$

Γνωρίζουμε [13] ότι για κάθε $m \in \mathbb{N}$ και $t \in (-\pi, \pi]$ υπάρχει $f \in C(\mathbb{T})$ με $\|f\|_\infty \leq 1$ ώστε

$$|S_m(f,t)| \geq \frac{1}{2} \|D_m\|_1$$

όπου D_m είναι ο πυρήνας Dirichlet. Εφόσον $\sup_m \|D_m\|_1 = \infty$, έπεται ότι για κάθε t η οικογένεια $\{p_{m,t} : m \in \mathbb{N}\}$ δεν είναι ομοιόμορφα φραγμένη.

[12] Από την άλλη μεριά, ο Κολμογκόροφ είχε δείξει από το 1926 ότι υπάρχει μια συνάρτηση στον $\mathcal{L}^1$ που η σειρά Fourier της αποκλίνει σε κάθε σημείο.
[13] Δες την Παρατήρηση 7.1.

Κατά συνέπεια (από την Αρχή Ομοιομόρφου Φράγματος) για κάθε $n \in \mathbb{N}$ το σύνολο

$$A_{n,t} = \{f \in C(\mathbb{T}) : \sup_m p_m(f,t) \leq n\}$$

είναι κλειστό με κενό εσωτερικό, άρα το συμπλήρωμά του

$$B_{n,t} = \{f \in C(\mathbb{T}) : \sup_m p_m(f,t) > n\}$$

είναι ανοικτό και πυκνό στον πλήρη μετρικό χώρο $(C(\mathbb{T}), \|\cdot\|_\infty)$. Επομένως από το Θεώρημα Baire το σύνολο

$$B_t := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_{n,t}$$

είναι πυκνό και G_δ. Όμως

$$B_t := \{f \in C(\mathbb{T}) : \sup_m |S_m(f,t)| = \infty\}.$$

Δηλαδή, για κάθε $t \in (-\pi, \pi]$ υπάρχει ένα «μεγάλο» σύνολο συνεχών συναρτήσεων που η σειρά Fourier τους στο συγκεκριμένο σημείο t δεν είναι καν φραγμένη.

Ας εξετάσουμε τώρα αν υπάρχουν συνεχείς συναρτήσεις που η σειρά Fourier τους αποκλίνει σε «πολλά» σημεία.

Όπως είδαμε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και κάθε ρητό $q \in (-\pi, \pi]$, το σύνολο

$$B_{n,q} = \{f \in C(\mathbb{T}) : \sup_m p_m(f,q) > n\}$$

είναι ανοικτό και πυκνό. Επομένως, αφού το σύνολο $\mathbb{N} \times \mathbb{Q}$ είναι αριθμήσιμο, εφαρμόζοντας πάλι το Θεώρημα Baire συμπεραίνουμε ότι το σύνολο

$$B := \bigcap_{n \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{Q}} B_{n,q} = \{f \in C(\mathbb{T}) : \sup_m |S_m(f,q)| = \infty \ \forall q \in \mathbb{Q}\}$$

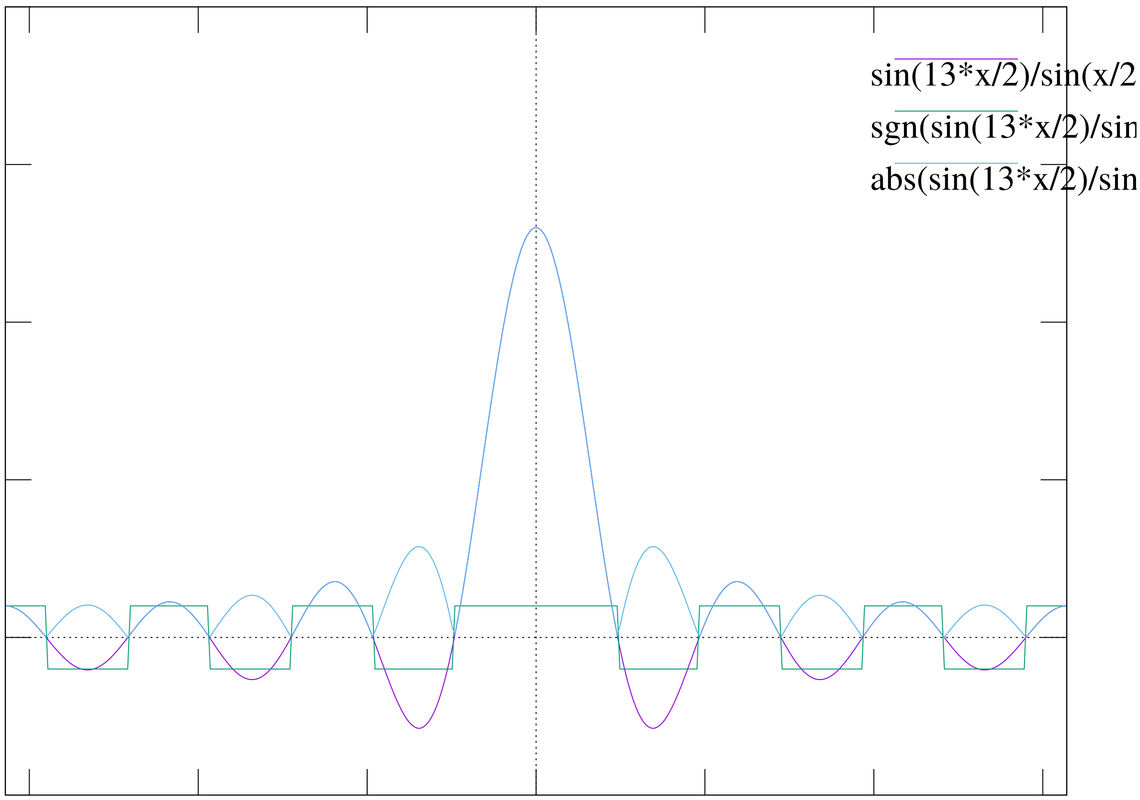
είναι πυκνό και G_δ υποσύνολο του $C(\mathbb{T})$. Δηλαδή υπάρχει ένα «μεγάλο» σύνολο συνεχών συναρτήσεων που η σειρά Fourier τους δεν είναι φραγμένη σε κανένα ρητό.

Παρατήρηση 7.1 *Για κάθε $m \in \mathbb{N}$ και $t \in (-\pi, \pi]$ υπάρχει $f \in C(\mathbb{T})$ με $\|f\|_\infty \leq 1$ ώστε*

$$|S_m(f,t)| \geq \frac{1}{2} \|D_m\|_1 \ .$$

Απόδειξη Έχουμε $S_m(f,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)D_m(t-s)ds$. Έπεται ότι για κάθε t η γραμμική μορφή $\phi_{m,t} : f \to S_m(f,t) : C(\mathbb{T}) \to \mathbb{C}$ έχει νόρμα $\|\phi_{m,t}\| = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |D_m(t-s)|ds = \|D_m\|_1$ (ανεξάρτητη του t)· συνεπώς υπάρχει $f \in C(\mathbb{T})$ (που εξαρτάται από τα (m,t)) με $\|f\|_\infty \leq 1$ ώστε $|\phi_{m,t}(f)| \geq \frac{1}{2}\|D_m\|_1$.

Μπορούμε να δείξουμε απευθείας την ύπαρξη της f ως εξής: Έχουμε $\|D_m\|_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |D_m(x)|dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u_m(x)D_m(x)dx$ όπου u_m η συνάρτηση $\mathrm{sgn}D_m$ που παίρνει την τιμή $+1$ όταν $D_m(x) > 0$, την τιμή -1 όταν $D_m(x) < 0$ και την τιμή 0 όταν $D_m(x) = 0$. Μπορούμε τώρα, μεταβάλλοντας λίγο την u_m γύρω απο τα (πεπερασμένου πλήθους) σημεία μηδενισμού της D_m να βρούμε μια συνεχή f με $-1 \leq f(x) \leq 1$ ώστε $\int |f - u_m||D_m| < \frac{1}{2}|\int fD_m|$, οπότε $|\int fD_m| > \frac{1}{2}\int u_mD_m$.



Σχήμα 1: $D_6, \mathrm{sgn} D_6, |D_6|$

8 Συντελεστές Fourier ενός μέτρου

Κάθε $f \in L^1(\mathbb{T})$ ορίζει μια γραμμική μορφή $\phi_f : C(\mathbb{T}) \to \mathbb{C}$ ως εξής:

$$\phi_f(g) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)f(t)dt \quad (g \in C(\mathbb{T})).$$

Μάλιστα, η ϕ_f είναι συνεχής, γιατί

$$|\phi_f(g)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |g(t)f(t)|dt \leq \|g\|_\infty \|f\|_1 .$$

Αν ειδικότερα $f(t) \geq 0$ σχεδόν για κάθε t, τότε η ϕ_f είναι *θετική γραμμική μορφή*, δηλαδή

$$g \geq 0 \;\;\Rightarrow\;\; \phi_f(g) \geq 0.$$

Παρατήρηση 8.1 *Αν $f \in L^1(\mathbb{T})$, η γραμμική μορφή ϕ_f είναι θετική στον $C(\mathbb{T})$ αν και μόνον αν $f(t) \geq 0$ σχεδόν για κάθε t.*

Απόδειξη Έστω ότι η ϕ_f είναι θετική. Για κάθε σύνολο Borel $E \subseteq (-\pi, \pi]$ υπάρχει ακολουθία (g_n) συνεχών συναρτήσεων ώστε $0 \leq g_n \leq 1$ και $g_n \to \chi_E$ σχεδόν παντού, οπότε $\int g_n f \to \int \chi_E f$ από κυριαρχημένη σύγκλιση. Όμως $\int g_n f \geq 0$ για κάθε n, άρα $\int \chi_E f \geq 0$. Αφού το E είναι αυθαίρετο, έπεται ότι $f \geq 0$ σχεδόν παντού. Το αντίστροφο, όπως είδαμε, είναι προφανές.

Παρατήρηση 8.2 *Μια $f \in L^1(\mathbb{T})$ είναι μη αρνητική σχεδόν παντού αν και μόνον αν οι συντελεστές Fourier της f ικανοποιούν τη σχέση*

$$\sum_{n,m} \hat{f}(n-m)c_n\bar{c}_m \geq 0 \quad \textit{για κάθε } \; c = (c_m) \in c_{00}(\mathbb{Z}).$$

Απόδειξη Είδαμε ότι η f είναι σχεδόν παντού μη αρνητική αν και μόνον αν η αντίστοιχη γραμμική μορφή $\phi_f : C(\mathbb{T}) \to \mathbb{C}$ είναι θετική. Αν λοιπόν η f είναι σχεδόν παντού μη αρνητική, τότε για κάθε $(c_m) \in c_{00}(\mathbb{Z})$ έχουμε

$$\begin{aligned} 0 \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|\sum_n c_n e^{-int}\right|^2 f(t)dt &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_n c_n e^{-int}\right)\overline{\left(\sum_m c_m e^{-imt}\right)} f(t)dt \\ &= \sum_{n,m}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(n-m)t}f(t)dt\right)c_n\bar{c}_m \\ &= \sum_{n,m}\hat{f}(n-m)c_n\bar{c}_m . \end{aligned}$$

Αν αντίστροφα οι συντελετές Fourier της f ικανοποιούν τη συνθήκη της υπόθεσης, τότε από τον ίδιο υπολογισμό έχουμε

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |p(t)|^2 f(t)dt \geq 0$$

για κάθε τριγωνομετρικό πολυώνυμο $p(t) = \sum_n c_n e^{-int}$. Έστω τώρα $g \in C(\mathbb{T})$ μη αρνητική συνάρτηση. Θεωρούμε τη *συνεχή συνάρτηση* $h = \sqrt{g}$. Υπάρχει τότε μια ακολουθία τριγωνομετρικών πολυωνύμων (p_n) ώστε $p_n \to h$, και άρα $|p_n|^2 \to g$ *ομοιόμορφα*, οπότε

$$\phi_f(g) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)f(t)dt = \lim_n \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |p_n(t)|^2 f(t)dt \geq 0.$$

Αφού η $g \geq 0$ είναι αυθαίρετη, έπεται ότι $f \geq 0$ σχεδόν παντού. $\square$

Σχόλιο Στην απόδειξη έπαιξε κρίσιμο ρόλο η ιδιότητα του χώρου $C(\mathbb{T})$, ότι κάθε μη αρνητική συνάρτηση έχει τετραγωνική ρίζα μέσα στον $C(\mathbb{T})$.

Ορισμός 8.1 *Μια ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ μιγαδικών αριθμών λέγεται* **θετικού τύπου** [14] *αν*

$$\sum_{n,m} a_{n-m} c_n \bar{c}_m \geq 0 \quad \text{για κάθε } \; c = (c_m) \in c_{00}(\mathbb{Z}). \tag{1}$$

Παρατήρηση 8.3 (α) Παρατηρούμε ότι η (a_n) είναι θετικού τύπου αν και μόνον αν, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ο *πίνακας Toeplitz*

$$A = \begin{bmatrix} a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \dots & a_{-n} \\ a_1 & a_0 & a_{-1} & \dots & a_{-n+1} \\ \vdots & \vdots & a_0 & & \\ & & & \ddots & \\ a_n & a_{n-1} & \dots & & a_0 \end{bmatrix}$$

είναι θετικός, με την έννοια ότι

$$\langle Ac, c\rangle \geq 0 \quad \text{για κάθε } \; c = (c_m) \in \ell^2(n+1).$$

(β) Από τον ορισμό έπεται αναγκαστικά ότι $a_0 \geq 0$ (γιατί $a_0 = \langle Ae_0, e_0\rangle$) και ότι $a_{-k} = \bar{a}_k$ για κάθε k (γιατί $a_0|z|^2 + a_{-k}w\bar{z} + a_k z\bar{w} + a_0|w|^2 \geq 0$ για κάθε $z, w \in \mathbb{C}$ οπότε $a_{-k}w + a_k\bar{w} \in \mathbb{R}$ για κάθε $w \in \mathbb{C}$, άρα $a_{-k} + a_k \in \mathbb{R}$ και $a_{-k}i + a_k(-i) \in \mathbb{R}$.)

(γ) Η (a_n) είναι θετικού τύπου αν και μόνον αν

$$\sum_{n,m} a_{m-n} c_n \bar{c}_m \geq 0 \quad \text{για κάθε } \; c = (c_m) \in c_{00}(\mathbb{Z}). \tag{2}$$

Πράγματι, αρκεί να εφαρμόσουμε την (1) στην ακολουθία $(c'_m) := (c_{-m})$.

Δεν είναι αλήθεια ότι κάθε θετική γραμμική μορφή $\phi : C(\mathbb{T}) \to \mathbb{C}$ είναι της μορφής ϕ_f όπου $f \in L^1(G)$: παράδειγμα η απεικόνιση $C(\mathbb{T}) \to \mathbb{C} : \; g \to g(t_0)$ όπου $t_0 \in (-\pi, \pi]$ ή γενικότερα $C(\mathbb{T}) \to \mathbb{C} : g \to \int g d\mu$ όπου μ (θετικό) μέτρο Borel στο $\mathbb{T}$. Το προηγούμενο παράδειγμα αντιστοιχεί στο «σημειακό» μέτρο Dirac δ_{t_0}, ενώ οι γραμμικές μορφές ϕ_f με $f \in L^1$ αντιστοιχούν στα απολύτως συνεχή μέτρα $\mu_f(E) = \int_E f(t)dt$.

[14] αντί του *'positive type'* χρησιμοποιείται επίσης ο όρος *positive definite.*

Θεώρημα 8.4 (Riesz) *Για κάθε θετική* [15] *γραμμική μορφή* $\phi : C(\mathbb{T}) \to \mathbb{C}$ *υπάρχει μοναδικό (θετικό) μέτρο Borel* μ *στο* $\mathbb{T}$ *ώστε*

$$\phi(g) = \int g d\mu \quad \textit{για κάθε } \ g \in C(\mathbb{T}).$$

Για την απόδειξη, δες π.χ. Κουμουλλή – Νεγρεπόντη, *Θεωρία Μέτρου*, Θεώρημα 12.26.

Παρατήρηση 8.5 *Έπεται ότι μια θετική γραμμική μορφή στον* $C(\mathbb{T})$ *είναι* αυτομάτως συνεχής.

Πράγματι, για κάθε $g \in C(\mathbb{T})$ έχουμε

$$|\phi(g)| = \left| \int g d\mu \right| \leq \int |g| d\mu \leq \|g\|_\infty \mu(\mathbb{T})$$

άρα αν $\|g_n - g\|_\infty \to 0$ τότε $\phi(g_n) \to \phi(g)$.

Εφόσον οι συναρτήσεις $e_k(e^{it}) = e^{ikt}$ είναι συνεχείς, μπορούμε σε κάθε κανονικό (θετικό) μέτρο Borel μ στο $\mathbb{T}$ να αντιστοιχίσουμε συντελεστές Fourier :

Ορισμός 8.2 *Αν* μ *είναι κανονικό (θετικό) μέτρο Borel στο* $\mathbb{T}$ *ορίζουμε*

$$\hat{\mu}(k) := \int e^{-ikt} d\mu(t), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ισχύει ότι $|\hat{\mu}(k)| \leq \mu(\mathbb{T})$ για κάθε k, αλλά δεν είναι πάντα σωστό ότι $\lim\limits_{|k|\to\infty} \hat{\mu}(k) = 0$. Για παράδειγμα, $\mu = \delta_0$, τότε $\hat{\mu}(k) = 1$ για κάθε k.

Θεώρημα 8.6 (Μοναδικότητα) *Αν* μ *και* ν *είναι κανονικά (θετικά) μέτρα Borel στο* $\mathbb{T}$ *με* $\hat{\mu}(k) = \hat{\nu}(k)$ *για κάθε* $k \in \mathbb{Z}$, *τότε* $\mu = \nu$.

Απόδειξη Έχουμε $\int e_k d\mu = \int e_k d\nu$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ και συνεπώς $\int p d\mu = \int p d\nu$ για κάθε $p \in \mathcal{P}$ λόγω *γραμμικότητας* των ολοκληρωμάτων. Επειδή τα τριγωνομετρικά πολυώνυμα είναι πυκνά στον $(C(\mathbb{T}), \|\cdot\|_\infty)$ έπεται τώρα λόγω *συνέχειας* των ολοκληρωμάτων ότι $\int f d\mu = \int f d\nu$ για κάθε $f \in C(\mathbb{T})$.

Τέλος, έστω $E \subseteq \mathbb{T}$ σύνολο Borel. Αν δοθεί $\epsilon > 0$, από την κανονικότητα των μ και ν υπάρχει ανοικτό G και συμπαγές K με $K \subseteq E \subseteq G$ (άρα $\chi_K \leq \chi_E \leq \chi_G$) και $\mu(G \setminus K) + \nu(G \setminus K) < \epsilon$. Επίσης από το Λήμμα Urysohn υπάρχει f συνεχής ώστε $\chi_K \leq f \leq \chi_G$, οπότε $|\chi_E - f| \leq |\chi_G - \chi_K|$. Έχουμε τότε

$$\left| \int (\chi_E - f) d\mu \right| \leq \int |\chi_E - f| d\mu = \int |\chi_G - \chi_K| d\mu = \mu(G \setminus K)$$

$$\text{και ομοίως} \quad \left| \int (\chi_E - f) d\nu \right| \leq \nu(G \setminus K)$$

[15] Γενικότερα κάθε *συνεχής* γραμμική μορφή $\psi : C(\mathbb{T}) \to \mathbb{C}$ αντιστοιχεί σε ολοκλήρωση ως προς ένα *μιγαδικό* μέτρο Borel στο $\mathbb{T}$ (δες π.χ. Κουμουλλή – Νεγρεπόντη, *Θεωρία Μέτρου*, Θεώρημα 12.38 ή Rudin, Real and Complex Analysis, Theorem 6.19). Ισοδύναμα, υπάρχει ένα θετικό μέτρο Borel μ και μια συνάρτηση Borel h με $|h(e^{it})| = 1$ για κάθε $e^{it} \in \mathbb{T}$ ώστε $\psi(g) = \int g h d\mu$ για κάθε $g \in C(\mathbb{T})$.

Όμως $\int f d\mu = \int f d\nu$, οπότε

$$
\begin{aligned}
|\mu(E) - \nu(E)| = \left| \int (\chi_E - f) d\mu - \int (\chi_E - f) d\nu \right| &\leq \left| \int (\chi_E - f) d\mu \right| + \left| \int (\chi_E - f) d\nu \right| \\
&\leq \mu(G \setminus K) + \nu(G \setminus K) < \epsilon
\end{aligned}
$$

πράγμα που σημαίνει, αφού το $\epsilon > 0$ ήταν τυχόν, ότι $\mu(E) = \nu(E)$. $\square$

Με τον ίδιο υπολογισμό όπως στην περίπτωση των συντελεστών Fourier μιας μη αρνητικής συνάρτησης, βλέπουμε ότι οι συντελεστές Fourier ενός θετικού μέτρου αποτελούν ακολουθία θετικού τύπου.

Το αξιοσημείωτο είναι ότι η συνθήκη αυτή αποτελεί *χαρακτηρισμό* των συντελεστών Fourier ενός θετικού μέτρου:

Θεώρημα 8.7 (Herglotz) *Αν $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ είναι μια ακολουθία θετικού τύπου, τότε υπάρχει μοναδικό θετικό μέτρο Borel στο $\mathbb{T}$ ώστε*

$$\hat{\mu}(k) = a_k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Απόδειξη Η *μοναδικότητα* έπεται από το Θεώρημα 8.6.
Ύπαρξη: Θέλουμε να βρούμε μια θετική γραμμική μορφή $\phi : C(\mathbb{T}) \to \mathbb{C}$ με $\phi(e_k) = \hat{\mu}(-k) = a_{-k}$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

Ορίζουμε, πρώτα στον χώρο των τριγωνομετρικών πολυωνύμων, την απεικόνιση $\phi : \mathcal{P} \to \mathbb{C}$ από τη σχέση $\phi(e_k) = \bar{a}_k = \bar{a}_{-k}$ (Παρατήρηση 8.3(β)), δηλαδή

$$\phi\left(\sum_{|k|\leq n} c_k e_k \right) = \sum_{|k|\leq n} c_k \bar{a}_k$$

Η ϕ είναι προφανώς γραμμική. Ο στόχος είναι να την επεκτείνουμε σε μια *συνεχή* γραμμική μορφή στον $(C(\mathbb{T}), \|\cdot\|_\infty)$.

Παρατηρούμε πρώτα ότι, για κάθε $p = \sum_{|k|\leq n} c_k e_k \in \mathcal{P}$, έχουμε

$$
\begin{aligned}
\phi(|p|^2) &= \phi\left(\sum_{|k|\leq n} c_k e_k \sum_{|j|\leq n} \bar{c}_j e_{-j} \right) = \sum_{k,j} c_k \bar{c}_j \phi(e_k e_{-j}) \\
&= \sum_{k,j} c_k \bar{c}_j \phi(e_{k-j}) = \sum_{k,j} c_k \bar{c}_j \bar{a}_{k-j} \geq 0. \qquad (8)
\end{aligned}
$$

Θα χρειασθούμε το εξής αποτέλεσμα:

> *Κάθε γνησίως θετικό τριγωνομετρικό πολυώνυμο είναι «τέλειο τετράγωνο»:*
> *Αν το $p \in \mathcal{P}$ ικανοποιεί $p(e^{it}) > 0$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$ τότε υπάρχει $q \in \mathcal{P}$ ώστε $p = |q|^2$.*

Ας το δεχτούμε προς το παρόν (θα αποδειχθεί με το Θεώρημα 8.8 πιο κάτω). Έπεται ο εξής

Ισχυρισμός 1. *Αν $p \in \mathcal{P}$ και $p \geq 0$ τότε $\phi(p) \geq 0$.*

Πράγματι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, το τριγωνομετρικό πολυώνυμο $p + \frac{1}{n}e_0$ είναι γνησίως θετικό, επομένως υπάρχει $q_n \in \mathcal{P}$ ώστε $p + \frac{1}{n}e_0 = |q_n|^2$, άρα $\phi(p + \frac{1}{n}e_0) = \phi(|q_n|^2) \geq 0$ από την (8). Επομένως, χρησιμοποιώντας ότι $\phi(e_0) = a_0 \geq 0$, έχουμε

$$\phi(p) = \phi\left(p + \frac{1}{n}e_0\right) - \frac{a_0}{n} \geq -\frac{a_0}{n}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και συνεπώς $\phi(p) \geq 0$.

Ισχυρισμός 2. *Η ϕ είναι συνεχής στον χώρο $(\mathcal{P}, \|\cdot\|_\infty)$.*

Απόδειξη Κατ' αρχήν κάθε τριγωνομετρικό πολυώνυμο $p \in \mathcal{P}$ ικανοποιεί την ανισότητα $|p|^2 \leq \|p\|_\infty^2$, οπότε το $q = \|p\|_\infty^2 e_0 - |p|^2 = \|p\|_\infty^2 e_0 - \bar{p}p$ είναι μη αρνητικό και τριγωνομετρικό πολυώνυμο.

Έχουμε λοιπόν $\phi(\|p\|_\infty^2 e_0 - |p|^2) \geq 0$ και άρα

$$\phi(|p|^2) \leq \|p\|_\infty^2 \phi(e_0) = a_0 \|p\|_\infty^2 .$$

Θα θέλαμε να ολοκληρώσουμε την απόδειξη του Ισχυρισμού χρησιμοποιώντας, όπως στην Παρατήρηση 8.5, την ανισότητα $|\phi(p)| \leq \phi(|p|)$. Όμως το $|p|$ δεν είναι εν γένει τριγωνομετρικό πολυώνυμο, συνεπώς η παράσταση $\phi(|p|)$ δεν έχει νόημα. Για αυτό προχωράμε ως εξής:

Αφού η ϕ είναι θετική στον $\mathcal{P}$, ικανοποιεί την ανισότητα Cauchy-Schwarz, [16] δηλαδή

$$|\phi(p\bar{q})|^2 \leq \phi(|p|^2)\phi(|q|^2) \quad \text{για κάθε } \ p, q \in \mathcal{P}$$

και ειδικότερα

$$\begin{aligned} & |\phi(p)|^2 = |\phi(pe_0)|^2 \leq \phi(|p|^2)\phi(|e_0|^2) = \phi(|p|^2)\phi(e_0), \\ \text{άρα} \qquad & |\phi(p)|^2 \leq \phi(|p|^2)\phi(e_0) \leq \|p\|_\infty^2 \phi(e_0)^2 = \|p\|_\infty^2 a_0^2 \end{aligned}$$

και ο Ισχυρισμός αποδείχθηκε.

Έπεται λοιπόν ότι η απεικόνιση $\phi : (\mathcal{P}, \|\cdot\|_\infty) \to \mathbb{C}$ επεκτείνεται μοναδικά σε μια συνεχή γραμμική απεικόνιση $\tilde{\phi}$ στην πλήρωση $(C(\mathbb{T}), \|\cdot\|_\infty)$.

Η επέκταση αυτή είναι *θετική*:

Ισχυρισμός 3. *Αν $f \in C(\mathbb{T})$ και $f \geq 0$, τότε $\tilde{\phi}(f) \geq 0$.*

Πράγματι, αν θέσουμε $g = \sqrt{f}$ τότε $g \in C(\mathbb{T})$, άρα υπάρχει ακολουθία τριγωνομετρικών πολυωνύμων (p_n) ώστε $p_n \to g$ ομοιόμορφα, οπότε $|p_n|^2 \to |g|^2 = f$ ομοιόμορφα, και άρα

$$\tilde{\phi}(f) = \lim_n \phi(|p|^2) \geq 0.$$

Από το Θεώρημα αναπαράστασης του Riesz (Θεώρημα 8.4) υπάρχει μοναδικό *θετικό* μέτρο Borel μ στον $\mathbb{T}$ ώστε

$$\tilde{\phi}(f) = \int_{\mathbb{T}} f d\mu \quad \text{για κάθε } \ f \in C(\mathbb{T}).$$

[16] Για κάθε $p, q \in \mathcal{P}$ έχουμε $\phi(|p|^2) + 2\lambda \operatorname{Re}\phi(p\bar{q}) + \lambda^2\phi(|q|^2) = \phi(|p + \lambda q|^2) \geq 0$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, άρα $(\operatorname{Re}\phi(p\bar{q}))^2 \leq \phi(|p|^2)\phi(|q|^2)$. Αν $c \in \mathbb{T}$ είναι τέτοιο ώστε $\phi(p\bar{q}) = c|\phi(p\bar{q})|$ έχουμε $|\phi(p\bar{q})|^2 = \phi(p\overline{cq})^2 = (\operatorname{Re}\phi(p\overline{cq}))^2 \leq \phi(|p|^2)\phi(|cq|^2) = \phi(|p|^2)\phi(|q|^2)$. $\square$

Ειδικότερα $\phi(e_k) = \tilde{\phi}(e_k) = \int_{\mathbb{T}} e_k d\mu$ οπότε

$$a_k = \overline{\phi(e_k)} = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt} d\mu(t) = \hat{\mu}(k)$$

για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. $\square$

Μένει να αποδείξουμε το

Θεώρημα 8.8 (Féjer – Riesz) *Αν ένα τριγωνομετρικό πολυώνυμο $p \in \mathcal{P}$ είναι γνησίως θετικό, αν δηλαδή $p(e^{it}) > 0$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$, τότε υπάρχει $q \in \mathcal{P}$ ώστε $p = |q|^2$.*

Απόδειξη Έστω $p(e^{it}) = \sum_{|k| \le n} c_k e^{ikt}$ όπου $c_n \neq 0$. Από την υπόθεση έχουμε $p(e^{it}) > 0$ για κάθε t, οπότε $c_{-k} = \bar{c}_k$ και $c_0 > 0$.

Ορίζουμε τώρα το *αναλυτικό* πολυώνυμο

$$g(z) = \sum_{|k| \le n} c_k z^{k+n} = c_{-n} + c_{1-n} z + \cdots + c_n z^{2n}, \quad z \in \mathbb{C}$$

(παρατήρησε ότι $g(z) = z^n p(z)$ όταν $z \in \mathbb{T}$). Πρόκειται για πολυώνυμο βαθμού $2n$ με $g(0) = c_{-n} = \bar{c}_n \neq 0$.

Ισχυρισμός: Για κάθε $z \neq 0$, $\overline{g\left(1/\bar{z}\right)} = z^{-2n} g(z)$.

Πράγματι,

$$\begin{aligned}
\overline{g(1/\bar{z})} = \overline{g\left(\bar{z}^{-1}\right)} &= \overline{\left(\sum_{|k| \le n} c_k \bar{z}^{-n-k}\right)} \\
&= \sum_{|k| \le n} \bar{c}_k z^{-n-k} = \sum_{|k| \le n} c_{-k} z^{-n-k} \quad (\text{αφού } c_{-k} = \bar{c}_k) \\
&= \sum_{|m| \le n} c_m z^{m-n} = z^{-2n} \sum_{|m| \le n} c_m z^{m+n} = z^{-2n} g(z).
\end{aligned}$$

Συνεπώς $g(z) = 0$ αν και μόνον αν $g(1/\bar{z}) = 0$. Δηλαδή οι $2n$ ρίζες του g εμφανίζονται σε ζεύγη: $\{(z_1, 1/\bar{z}_1), (z_2, 1/\bar{z}_2), \ldots, (z_n, 1/\bar{z}_n)\}$ και $z_i \neq 1/\bar{z}_i$ για κάθε i γιατί το g δεν μηδενίζεται πουθενά στον κύκλο $\mathbb{T}$ (από την υπόθεση για το p). Κατά συνέπεια, από το θεμελιώδες θεώρημα της Άλγεβρας, υπάρχει σταθερά $a_n \in \mathbb{C}$ ώστε

$$\begin{aligned}
g(z) &= a_n (z - z_1)(z - z_2) \ldots (z - z_n) \left(z - \frac{1}{\bar{z}_1}\right) \left(z - \frac{1}{\bar{z}_2}\right) \ldots \left(z - \frac{1}{\bar{z}_n}\right) \\
&= a_n h_1(z) h_2(z), \quad \text{όπου } \; h_1(z) = (z - z_1)(z - z_2) \ldots (z - z_n).
\end{aligned}$$

Όμως, όταν $z \neq 0$, $\overline{\left(z - \frac{1}{\bar{z}_i}\right)} = \bar{z} - \frac{1}{z_i} = \frac{\bar{z}}{z_i}\left(z_i - \frac{1}{\bar{z}}\right) = -\frac{\bar{z}}{z_i}\left(\frac{1}{\bar{z}} - z_i\right)$ άρα

$$\overline{h_2(z)} = \prod_{i=1}^{n} \overline{\left(z - \frac{1}{\bar{z}_i}\right)} = \frac{\bar{z}^n}{z_1 \ldots z_n} \prod_{i=1}^{n} \left(z_i - \frac{1}{\bar{z}}\right) = \frac{\bar{z}^n}{z_1 \ldots z_n} (-1)^n h_1\left(\frac{1}{\bar{z}}\right).$$

Επομένως, αν $z \in \mathbb{T}$ οπότε $\bar{z} = 1/z$ έχουμε

$$|h_2(z)| = |\overline{h_2(z)}| = \left| \frac{\bar{z}^n}{z_1 \dots z_n} (-1)^n h_1(z) \right| = \left| \frac{h_1(z)}{z_1 \dots z_n} \right|.$$

Συνεπώς, εφόσον $g(z) = z^n p(z)$ όταν $z \in \mathbb{T}$,

$$\begin{aligned} p(e^{it}) &= e^{-int} g(e^{it}) = \left| e^{-int} g(e^{it}) \right| \qquad (\text{γιατί } p(e^{it}) > 0) \\ &= \left| g(e^{it}) \right| = |a_n h_1(e^{it}) h_2(e^{it})| \\ &= |a_n h_1(e^{it})| \cdot \left| \frac{h_1(e^{it})}{z_1 \dots z_n} \right| \\ &= \frac{|a_n|}{|z_1 \dots z_n|} |h_1(e^{it})|^2 = |q(e^{it})|^2 \\ \text{όπου } \ q(e^{it}) &= \left(\frac{|a_n|}{|z_1 \dots z_n|} \right)^{1/2} h_1(e^{it}). \qquad \square \end{aligned}$$

Ο Μετασχηματισμός Fourier για το $\mathbb{R}$

9 Ο Μετασχηματισμός Fourier : πρώτες ιδιότητες

Αν $f \in L^1(\mathbb{R})$ ορίζουμε

$$\mathcal{F}f(\xi) \equiv \hat{f}(\xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-it\xi} dt = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-it\xi} dm(t) .$$

(όπου $dm(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} dt$).

Παρατήρηση 9.1 *Αν $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, ισχύουν οι εξής ιδιότητες:*

$$\begin{array}{llcll}
(i) & g(x) = e^{iax} f(x) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \hat{g}(\xi) = \hat{f}(\xi - a) & (\mathcal{F}M_{e_a} = T_a \mathcal{F}) \\
(ii) & g(x) = f(x-a) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \hat{g}(\xi) = e^{-ia\xi} \hat{f}(\xi) & (\mathcal{F}T_a = M_{e_{-a}} \mathcal{F}) \\
(iii) & g(x) = (f * h)(x) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \hat{g}(\xi) = \hat{f}(\xi) \hat{h}(\xi) & (\mathcal{F}(f * g) = (\mathcal{F}f)(\mathcal{F}h)) \\
(iv) & g(x) = \overline{f(-x)} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \hat{g}(\xi) = \overline{\hat{f}(\xi)} & \\
(v) & g(x) = f(\frac{x}{\lambda}) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \hat{g}(\xi) = \lambda \hat{f}(\lambda \xi) & (\lambda > 0)
\end{array}$$

Εδώ χρησιμοποιήθηκαν οι τελεστές $(T_a f)(x) = f(x-a) \quad (a \in \mathbb{R})$ και $(M_h f)(x) = g(x) f(x)$ $(h \in L^\infty(\mathbb{R}))$ και ο συμβολισμός $e_a(x) = e^{iax}$.

Οι αποδείξεις των $(i), (ii), (iv)$ και (v) είναι εύκολες. Χρησιμοποιείται το αναλλοίωτο του μέτρου Lebesgue ως προς μεταθέσεις και ανακλάσεις. Για την (iii), χρησιμοποιούμε το Θεώρημα Fubini:

$$g(x) = (f * h)(x) = \int f(s) h(x-s) dm(s), \quad \text{άρα}$$

$$\begin{aligned}
\hat{g}(\xi) &= \int \left(\int f(s) h(x-s) dm(s) \right) e^{-i\xi x} dm(x) = \int \left(\int f(s) h(x-s) e^{-i\xi x} dm(s) \right) dm(x) \\
&\overset{(F)}{=} \int \left(\int f(s) h(x-s) e^{-i\xi x} dm(x) \right) dm(s) = \int f(s) \left(\int h(x-s) e^{-i\xi x} dm(x) \right) dm(s) \\
&= \int f(s) e^{-i\xi s} \left(\int h(x-s) e^{-i\xi(x-s)} dm(x) \right) dm(s) = \int f(s) e^{-i\xi s} \left(\int h(t) e^{-i\xi(t)} dm(t) \right) dm(s) \\
&= \left(\int f(s) e^{-i\xi s} dm(s) \right) \left(\int h(t) e^{-i\xi t} dm(t) \right) = \hat{f}(\xi) \hat{h}(\xi)
\end{aligned}$$

όπου η εναλλαγή των ολοκληρωμάτων στην (F) επιτρέπεται, αφού για κάθε ξ η συνάρτηση $(s, x) \to f(s) h(x-s) e^{-i\xi x}$ ανήκει στον $L^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$. $\square$

Πρόταση 9.2 *Αν $f \in L^1(\mathbb{R})$ τότε η $\hat{f}$ είναι συνεχής και φραγμένη στο $\mathbb{R}$ και μάλιστα*

$$\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1 .$$

Απόδειξη Η $\hat{f}$ είναι φραγμένη:

$$|\hat{f}(\xi)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)e^{-it\xi}|dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt = \|f\|_1 .$$

Η $\hat{f}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής: Για κάθε μηδενική ακολουθία πραγματικών αριθμών (s_n) και κάθε $\xi \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$|\hat{f}(\xi + s_n) - \hat{f}(\xi)| = \left| \int f(t)(e^{-it(\xi+s_n)} - e^{-it\xi})dm(t) \right| \quad \leq \int |f(t)(e^{-its_n} - 1)|dm(t)$$

$$\text{άρα} \quad \sup_{\xi} |\hat{f}(\xi + s_n) - \hat{f}(\xi)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)(e^{-its_n} - 1)|dt .$$

Όμως $|f(t)(e^{-its_n} - 1)| \to 0$ για κάθε t και $|f(t)(e^{-its_n} - 1)| \leq 2|f(t)|$, άρα $\sup_{\xi} |\hat{f}(\xi + s_n) - \hat{f}(\xi)| \to 0$ από το Θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης.

Θεώρημα 9.3 (Riemann - Lebesgue) *Αν $f \in L^1(\mathbb{R})$ τότε $\hat{f} \in C_0(\mathbb{R})$.*
Επομένως (αφού $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$) ο μετασχηματισμός Fourier

$$\mathcal{F} : \ (L^1(\mathbb{R}), \|\cdot\|_1) \to (C_0(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$$

είναι (γραμμικός και) συνεχής τελεστής.

Απόδειξη. Πρώτη μέθοδος: Έστω $\xi \neq 0$. Τότε

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(t - \frac{\pi}{\xi}\right) e^{-it\xi}dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(s)e^{-i\xi\left(s+\frac{\pi}{\xi}\right)}ds = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(s)e^{-i\xi s}e^{-i\pi}ds = -\hat{f}(\xi)$$

και συνεπώς

$$\begin{aligned} 2|\hat{f}(\xi)| &= \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-it\xi}dt - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(t - \frac{\pi}{\xi}\right) e^{-it\xi}dt \right| \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |f(t) - (T_{\frac{\pi}{\xi}}f)(t)|e^{-it\xi}dt \leq \left\| f - T_{\frac{\pi}{\xi}}f \right\|_1 . \end{aligned}$$

Όμως έχουμε δείξει ότι $\lim_{u\to 0} \|f - T_u f\|_1 = 0$, άρα $\hat{f}(\xi) \to 0$ καθώς $\xi \to \infty$ και καθώς $\xi \to -\infty$.

Δεύτερη μέθοδος: Δείχνουμε πρώτα το ζητούμενο όταν η f περιέχεται σε κατάλληλους πυκνούς υπόχωρους του $L^1(\mathbb{R})$, και η γενική περίπτωση έπεται από την ανισότητα $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$: αν $f \in L^1(\mathbb{R})$ και (f_n) είναι μια ακολουθία ώστε $\hat{f}_n \in C_0(\mathbb{R})$ για κάθε n και $\|f - f_n\|_1 \to 0$, έχουμε ότι $\|\hat{f}_n - \hat{f}\|_\infty \leq \|f - f_n\|_1 \to 0$ άρα $\hat{f} \in C_0(\mathbb{R})$.

(α) Όταν η f είναι συνεχώς παραγωγίσιμη και με συμπαγή φορέα, από την παρατήρηση 9.6 και την Πρόταση 9.2 έχουμε, για $\xi \neq 0$,

$$|i\xi\hat{f}(\xi)| = |\widehat{f'}(\xi)| \leq \|f'\|_1$$

$$\text{άρα} \quad |\hat{f}(\xi)| \leq \frac{\|f'\|_1}{|\xi|} \to 0 \text{ όταν } |\xi| \to \infty.$$

(β) Μπορούμε επίσης να θεωρήσουμε τον χώρο των κλιμακωτών συναρτήσεων: Όταν η f είναι της μορφής $f = \chi_{[a,b]}$, έχουμε για $\xi \neq 0$,

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{[a,b]}(t) e^{-it\xi} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-it\xi} dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{e^{-it\xi}}{-i\xi} \right]_a^b = \frac{i}{\sqrt{2\pi}\xi} (e^{-ib\xi} - ie^{-ia\xi}) \\
\text{άρα} \quad |\hat{f}(\xi)| &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2}{|\xi|} \to 0 \,.
\end{aligned}$$

Επομένως το ζητούμενο ισχύει όταν η f είναι κλιμακωτή ολοκληρώσιμη συνάρτηση (δηλ. γραμμικός συνδυασμός χαρακτηριστικών *φραγμένων* διαστημάτων). Όμως ο χώρος αυτών των συναρτήσεων είναι πυκνός στον $L^1(\mathbb{R})$. $\square$

Αν $f : R \to \mathbb{C}$ είναι μια συνάρτηση, ορίζουμε $(Mf)(t) = tf(t)$ και $Df = f'$ (όταν η f παραγωγίζεται).

Παρατήρηση 9.4 *Αν $f \in L^1(\mathbb{R})$ και $Mf \in L^1(\mathbb{R})$ τότε η παράγωγος $D(\hat{f})$ υπάρχει και*

$$D\mathcal{F}f = -i\mathcal{F}Mf.$$

Κατά συνέπεια αν $f \in L^1(\mathbb{R})$ και $M^n f \in L^1(\mathbb{R})$ τότε η n-οστή παράγωγος της $\hat{f}$ υπάρχει και

$$(iD)^n \mathcal{F}f = \mathcal{F}M^n f.$$

Απόδειξη Για κάθε $\xi, \eta \in \mathbb{R}$ με $\xi \neq \eta$, έχουμε

$$\frac{\hat{f}(\xi) - \hat{f}(\eta)}{\xi - \eta} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{e^{-it\xi} - e^{-it\eta}}{\xi - \eta} dt \,.$$

$$\text{Όμως} \qquad \left| \frac{e^{-it\xi} - e^{-it\eta}}{\xi - \eta} \right| = \left| \frac{e^{-it(\xi-\eta)} - 1}{\xi - \eta} \right| \leq |t|$$

γιατί, αν $t, x \in \mathbb{R}$,

$$|e^{itx} - 1|^2 = (\cos tx - 1)^2 + \sin^2 tx = 2(1 - \cos tx) = 4 \sin^2 \frac{tx}{2} \leq 4 \left(\frac{tx}{2} \right)^2 .$$

Κατά συνέπεια, *για κάθε ακολουθία* $\xi_n \to \xi$, αν θέσουμε $g_n(t) = f(t) \dfrac{e^{-it\xi_n} - e^{-it\xi}}{\xi_n - \xi}$ έχουμε $\lim_n g_n(t) = f(t)(-ite^{-it\xi})$ για κάθε t και η $|g_n|$ κυριαρχείται από την $|tf(t)| = |(Mf)(t)|$ η οποία είναι L^1 από την υπόθεση. Από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης έχουμε λοιπόν ότι το όριο

$$\lim_n \frac{\hat{f}(\xi_n) - \hat{f}(\xi)}{\xi_n - \xi} \qquad \text{υπάρχει και ισούται με}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_n \left(f(t) \frac{e^{-it\xi_n} - e^{-it\xi}}{\xi_n - \xi} \right) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)(-ite^{-it\xi}) dt \\
&= -i \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (tf(t)) e^{-it\xi}) dt \,.
\end{aligned}$$

Δηλαδή η παράγωγος $D\hat{f} = D\mathcal{F}f$ της $\hat{f}$ υπάρχει και ισούται με $-i\widehat{Mf} = -i\mathcal{F}Mf$.

Η ισότητα μπορεί να γραφτεί και στη μορφή $\mathcal{F}Mf = (iD)\mathcal{F}f$. Όταν $M^2 f \in L^1(\mathbb{R})$, εφαρμόζοντας το προηγούμενο στην $g = Mf$ έχουμε $\mathcal{F}Mg = (iD)\mathcal{F}g = (iD)\mathcal{F}Mf = (iD)(iD)\mathcal{F}f$. Επαγωγικά λοιπόν προκύπτει η $(iD)^n\mathcal{F}f = \mathcal{F}M^n f$ όταν $M^n f \in L^1(\mathbb{R})$. $\square$

Ορίζουμε τους χώρους

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}) := \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) : \mathrm{supp} f \ \text{ συμπαγές } \}$$
$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) := \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) : \sup_{x\in\mathbb{R}} |x^n f^{(m)}(x)| < \infty \ \forall n, m \in \mathbb{N}\}$$

Δηλαδή μια f ανήκει στον $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ αν είναι απεριόριστα παραγωγίσιμη και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι οι συναρτήσεις $M^n f$ και οι παράγωγοί τους κάθε τάξης είναι φραγμένες.

Παρατήρηση 9.5 *Για κάθε $p \in [1, \infty]$, ο $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ περιέχεται στον $L^p(\mathbb{R})$ (άρα, το ίδιο ισχύει και για τον $\mathcal{D}(\mathbb{R})$).*

Απόδειξη Βεβαίως, κάθε $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ είναι φραγμένη, άρα ανήκει στον $L^\infty(\mathbb{R})$. Δείχνουμε ότι ανήκει στον $L^1(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}\int |f(t)|dt &= \int |f(t)|\frac{1}{1+t^2}dt + \int |t^2 f(t)|\frac{1}{1+t^2}dt \\ &\leq \|f\|_\infty \int \frac{1}{1+t^2}dt + \left\|M^2 f\right\|_\infty \int \frac{1}{1+t^2}dt < \infty\end{aligned}$$

γιατί οι f και $M^2 f$ είναι φραγμένες.

Δείχνουμε τώρα ότι αν η f ανήκει και στον $L^1(\mathbb{R})$ και στον $L^\infty(\mathbb{R})$ τότε ανήκει σε κάθε $L^p(\mathbb{R})$. Πράγματι, αν $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ έχουμε

$$\|f\|_p^p = \left\||f|^{1/q}|f|^{1/p}\right\|_p^p \leq \left\||f|^{1/q}\right\|_\infty^p \left\||f|^{1/p}\right\|_p^p = \left\||f|^{1/q}\right\|_\infty^p \int (|f(t)|^{1/p})^p dm(t) = \left\||f|^{1/q}\right\|_\infty^p \|f\|_1 < \infty$$

Παρατήρηση 9.6 *Αν η $f \in C_0(\mathbb{R})$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη και οι f και $g = f'$ ανήκουν στον $L^1(\mathbb{R})$), τότε $\hat{g}(\xi) = i\xi\hat{f}(\xi)$. Κατά συνέπεια οι D και M, θεωρούμενοι ως τελεστές $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R})$, ικανοποιούν τη σχέση*

$$\mathcal{F}D = iM\mathcal{F} \qquad \textit{και επαγωγικά} \quad \mathcal{F}D^n = (iM)^n\mathcal{F}.$$

Απόδειξη Για κάθε $M \in \mathbb{N}$, με ολοκλήρωση κατά μέρη, έχουμε

$$\int_{-M}^{M} f'(t)e^{-it\xi}dt = \left[f(t)e^{-it\xi}\right]_{-M}^{M} - \int_{-M}^{M} f(t)(-i\xi)e^{-it\xi}dt = \left[f(t)e^{-it\xi}\right]_{-M}^{M} + i\xi\int_{-M}^{M} f(t)e^{-it\xi}dt\,.$$

Όμως από κυριαρχημένη σύγκλιση (εφόσον οι f και f' ανήκουν στον $L^1(\mathbb{R})$) έχουμε

$$\lim_{M\to\infty}\int_{-M}^{M} f'(t)e^{-it\xi}dt = \sqrt{2\pi}\,\widehat{f'}(\xi) \quad \text{και} \quad \lim_{M\to\infty}\int_{-M}^{M} f(t)e^{-it\xi}dt = \sqrt{2\pi}\widehat{f}(\xi))$$

ενώ βεβαίως $\lim\limits_{M\to\infty} f(-M) = 0$ και $\lim\limits_{M\to\infty} f(M) = 0$ (αφού $f \in C_0(\mathbb{R})$), άρα $\lim\limits_{M\to\infty}\left[f(t)e^{-it\xi}\right]_{-M}^{M} = 0$. Δείξαμε λοιπόν ότι $\widehat{f'}(\xi) = i\xi\hat{f}(\xi)$. $\square$

Πρόταση 9.7 *Αν $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ τότε $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.*

Απόδειξη Έστω $n, m \in \mathbb{N}$ και $g = M^n f$. Ξέρουμε ότι $M^n f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ άρα $g \in L^1(\mathbb{R})$. Από την Παρατήρηση 9.4 έπεται ότι η παράγωγος $D^n \hat{f}$ υπάρχει και ότι

$$\mathcal{F}g = \mathcal{F}(M^n f) = (iD)^n \mathcal{F}f.$$

Όμως, αφού $D^m g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \subseteq L^1(\mathbb{R})$ έχουμε $\mathcal{F}(D^m g) \in C_0(\mathbb{R})$ και, από την Παρατήρηση 9.6, $(iM)^m \mathcal{F}g = \mathcal{F}(D^m g)$. Δηλαδή

$$(iM)^m (iD)^n \mathcal{F}f = (iM)^m \mathcal{F}g = \mathcal{F}D^m g$$

που ανήκει στον $C_0(\mathbb{R})$. Δείξαμε λοιπόν ότι η παράγωγος κάθε τάξης n της $\hat{f}$ υπάρχει και για κάθε m η συνάρτηση $M^m D^n \hat{f}$ είναι φραγμένη, οπότε $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. $\square$

Παρατήρηση 9.8 *Επομένως ο χώρος του Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ είναι αναλλοίωτος από τη δράση των τελεστών M, D και $\mathcal{F}$.*

Παράδειγμα 9.9 *Αν $a > 0$ και $f_a(x) = \exp\left(-\frac{1}{2}ax^2\right)$, τότε $\hat{f}_a(\xi) = \frac{1}{\sqrt{a}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2a}\right)$.*

Απόδειξη Από τον ορισμό της f_a είναι άμεσο ότι ανήκει στον $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Χρησιμοποιώντας λοιπόν και την 9.6, έχουμε

$$\begin{aligned}
(\hat{f}_a)'(\xi) &= (D\mathcal{F}f_a)(\xi) = -i\mathcal{F}(Mf_a)(\xi) = -i\int te^{-\frac{1}{2}at^2} dm(t) \\
&= \frac{i}{a}\int \left(-ate^{-\frac{1}{2}at^2}\right) e^{-i\xi t} dm(t) = \frac{i}{a}\int (Df_a)(t) e^{-i\xi t} dm(t) \\
&= \frac{i}{a}(\mathcal{F}Df_a)(\xi) = \frac{i}{a}(iM\mathcal{F}f_a)(\xi) = -\frac{1}{a}\xi \hat{f}_a(\xi).
\end{aligned}$$

Δηλαδή η συνάρτηση $\psi(\xi) := \hat{f}_a(\xi)$ ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση

$$\psi'(\xi) + \frac{1}{a}\xi\psi(\xi) = 0$$

και άρα

$$\frac{d}{d\xi}\left(\psi(\xi)e^{\frac{\xi^2}{2a}}\right) = \psi'(\xi)e^{\frac{\xi^2}{2a}} + \frac{1}{a}\xi\psi(\xi)e^{\frac{\xi^2}{2a}} = 0.$$

Έπεται ότι η $\xi \to \psi(\xi)e^{\frac{\xi^2}{2a}}$ είναι σταθερή, άρα ίση με $\psi(0)$, οπότε

$$\psi(\xi) = \psi(0)e^{-\frac{\xi^2}{2a}}.$$

Όμως, από το Λήμμα 9.10,

$$\psi(0) = \hat{f}_a(0) = \int f_a(t) dm(t) = \frac{1}{\sqrt{a}}$$

επομένως τελικά

$$\hat{f}_a(\xi) = \frac{1}{\sqrt{a}} e^{-\frac{\xi^2}{2a}}. \qquad \square$$

Λήμμα 9.10
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}ax^2}dx = \sqrt{\frac{2\pi}{a}} \qquad (a>0).$$

Απόδειξη Αν $K = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}ax^2}dx$ τότε $K = \lim_{M\to+\infty}\int_0^M e^{-\frac{1}{2}ax^2}dx$ από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης.

Παρατήρησε ότι η συνάρτηση $f(x,y) = e^{-\frac{1}{2}a(x^2+y^2)}$ ανήκει στον $L^1([0,\infty)\times[0,\infty)) = L^1(\mathbb{R}^2_+)$, άρα από το θεώρημα Fubini, αν λ_2 είναι το μέτρο Lebesgue στον $\mathbb{R}^2$,

$$\int_{\mathbb{R}^2_+} f(x,y)d\lambda_2(x,y) = \int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} f(x,y)dx\right)dy = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}ax^2}dx\int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}ay^2}dy = K^2.$$

Πάλι από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης, αν $D_M = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2_+ : x^2+y^2\le M^2\}$ και χ_M είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση του D_M τότε

$$\int_{\mathbb{R}^2_+} f(x,y)d\lambda_2(x,y) = \lim_{M\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^2_+}\chi_M f d\lambda_2 = \lim_{M\to+\infty}\int_{D_M} f d\lambda_2.$$

Τώρα το τελευταίο ολοκλήρωμα είναι το ολοκλήρωμα Riemann μιας συνεχούς συνάρτησης, άρα, όπως μάθαμε στον Απειροστικό Λογισμό III,

$$\begin{aligned}\int_{D_M} f(x,y)d\lambda_2(x,y) &= \int_{D_M} e^{-\frac{1}{2}a(x^2+y^2)}dxdy = \int_0^{\pi/2}\int_0^M e^{-\frac{1}{2}ar^2}rdrd\theta \\ &= \frac{\pi}{2}\int_0^M e^{-\frac{1}{2}ar^2}rdr = \frac{\pi}{2}\left[\frac{e^{-\frac{1}{2}au^2}}{-a}\right]_0^M = \frac{\pi}{2a}\left(1-e^{-\frac{1}{2}aM^2}\right)\end{aligned}$$

και άρα

$$\int_{\mathbb{R}^2_+} f(x,y)d\lambda_2(x,y) = \lim_{M\to+\infty}\int_{D_M} f d\lambda_2 = \frac{\pi}{2a}.$$

Επομένως $K^2 = \dfrac{\pi}{2a}$ οπότε $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}ax^2}dx = 2K = \sqrt{\frac{2\pi}{a}}$. $\square$

10 Το Θεώρημα Αντιστροφής

10.1 Ο $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ είναι πυκνός στον $L^1(\mathbb{R})$

Έστω $\phi\in C^\infty(\mathbb{R})$ με supp$\phi\subseteq[-1,1]$ τέτοια ώστε $\phi\ge 0$ και $\|\phi\|_1 = 1$ (υπάρχει τέτοια συνάρτηση)[17]. Ορίζουμε

$$\phi_n(x) = n\phi(nx),\ n\in\mathbb{N}.$$

Έχουμε αποδείξει ότι τότε η (ϕ_n) είναι προσεγγιστική μονάδα για τον $L^1(\mathbb{R})$ που αποτελείται από συναρτήσεις του $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Επομένως (δες την Παράγραφο 5),

[17] για παράδειγμα $\phi(t) = \begin{cases} c\exp\left(\frac{-1}{1-t^2}\right), & |t|<1 \\ 0, & |t|\ge 1\end{cases}$ όπου η $c>0$ επιλέγεται ώστε $\int_{\mathbb{R}}\phi(t)dm(t) = 1$.

Λήμμα 10.1 *Έστω $1 \le p < \infty$ και $g \in L^p(\mathbb{R})$.*
(α) $\|\phi_n * g - g\|_p \to 0$.
(β) Αν $\mathrm{supp} g \subseteq [-M, M]$, *τότε* $\mathrm{supp}(\phi_n * g) \subseteq [-M-1, M+1]$ *για κάθε* n
(γ) Αν η g είναι συνεχής με συμπαγή φορέα τότε $\|\phi_n * g - g\|_\infty \to 0$.

Πρόταση 10.2 *(α) Ο χώρος $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ είναι πυκνός στον χώρο $(C_0(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$.*
(β) Αν $1 \le p < \infty$, ο χώρος $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ είναι πυκνός στον $(L^p(\mathbb{R}), \|\cdot\|_p)$.
(γ) Επομένως, αφού $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}) \subseteq L^p(\mathbb{R})$, και ο $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ είναι πυκνός στον $(L^p(\mathbb{R}), \|\cdot\|_p)$ $(p < \infty)$.

Απόδειξη (α) Αν $g \in C_0(\mathbb{R})$ και $\epsilon > 0$, υπάρχει διάστημα $[-M, M]$ ώστε η συνάρτηση $g_\epsilon := g\chi_{[-M,M]}$ να ικανοποιεί $\|g - g_\epsilon\|_\infty < \epsilon$. Όμως η g_ϵ είναι συνεχής με συμπαγή φορέα, άρα από το (γ) του Λήμματος 10.1 υπάρχει n ώστε $\|\phi_n * g_\epsilon - g_\epsilon\|_\infty < \epsilon$. Η $\phi_n * g_\epsilon$ είναι απεριόριστα παραγωγίσιμη και, από το (β) του Λήμματος 10.1, έχει συμπαγή φορέα. Δηλαδή $\phi_n * g_\epsilon \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ και $\|\phi_n * g_\epsilon - g\|_\infty < 2\epsilon$.

(β) Αν $f \in L^p(\mathbb{R})$ τότε για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $g \in L^p(\mathbb{R})$ με συμπαγή φορέα ώστε $\|f - g\|_p < \epsilon$: αρκεί να πάρουμε $g = f\chi_{[-M,M]}$ για αρκετά μεγάλο M. Με το Λήμμα 10.1 δείξαμε ότι υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $\|\phi_n * g - g\|_p < \epsilon$, οπότε $\|\phi_n * g - f\|_p < 2\epsilon$. Για να δείξω ότι ο $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ είναι πυκνός στον $L^p(\mathbb{R})$, αρκεί λοιπόν να δείξω ότι οι $\phi_n * g$ ανήκουν στον $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Δείξαμε ήδη ότι κάθε $\phi_n * g$ έχει συμπαγή φορέα.[18] Μένει να δειχθεί ότι οι $\phi_n * g$ είναι απεριόριστα παραγωγίσιμες.

Γι' αυτό αρκεί να δείξω ότι για κάθε $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ η συνάρτηση $\psi := \phi * g$ είναι παραγωγίσιμη και $\psi' = \phi' * g$.

Πράγματι: Παρατηρούμε πρώτα ότι, από το Θεώρημα Μέσης Τιμής, για κάθε $x, y, s \in \mathbb{R}$ υπάρχει t μεταξύ των $x - s$ και $y - s$ ώστε $\left|\frac{\phi(x-s) - \phi(y-s)}{x-y}\right| = |\phi'(t)|$, και βέβαια η ϕ' είναι συνεχής με συμπαγή φορέα, άρα φραγμένη. Επίσης, η $g = f\chi_{[-M,M]}$ ανήκει στον $L^1(\mathbb{R})$, γιατί

$$\int |g| dm = \int |f\chi_{[-M,M]}| dm \le \|f\|_p \left\|\chi_{[-M,M]}\right\|_q < \infty.$$

Επομένως

$$\left|\frac{\phi(x-s) - \phi(y-s)}{x-y} g(s)\right| \le \|\phi'\|_\infty |g(s)|$$

και η συνάρτηση $s \to \|\phi'\|_\infty |g(s)|$ ανήκει στον $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Έπεται λοιπόν από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης ότι

$$\frac{\psi(x) - \psi(y)}{x-y} = \int \frac{\phi(x-s) - \phi(y-s)}{x-y} g(s) dm(s) \underset{x \to y}{\longrightarrow} \int \phi'(y-s) g(s) dm(s) = (\phi' * g)(y).$$

Συμπέρασμα: η $\psi = \phi * g$ είναι παραγωγίσιμη και μάλιστα

$$(\phi * g)' = \phi' * g\,.$$

Παρατήρηση 10.3 *Το τελευταίο επιχείρημα, άρα και το συμπέρασμα ότι η $\phi * g$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη και $(\phi * g)' = \phi' * g$, ισχύει οποτεδήποτε η ϕ έχει συνεχή και φραγμένη παράγωγο και η g ανήκει στον $L^1(\mathbb{R})$. Ειδικότερα, ισχύει όταν $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.*

[18] Αυτό δεν αληθεύει κατ' ανάγκη για την $\phi_n * f$.

10.2 Ο τύπος αντιστροφής για τον $\mathcal{S}(\mathbb{R})$

Λήμμα 10.4 (Αλλαγή στέγης) *Αν $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ τότε*

$$\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(x)g(x)dm(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)\hat{g}(y)dm(y).$$

Απόδειξη Κατ΄ αρχήν τα δύο ολοκληρώματα υπάρχουν αφού οι f, g ανήκουν στον $L^1(\mathbb{R})$ και οι $\hat{f}, \hat{g}$ είναι συνεχείς και φραγμένες, άρα οι $f\hat{g}$ και $g\hat{f}$ ανήκουν στον $L^1(\mathbb{R})$. Έχουμε

$$\int \hat{f}(x)g(x)dm(x) = \int \left(\int f(y)e^{-ixy}dm(y) \right) g(x)dm(x) = \int \left(\int f(y)e^{-ixy}g(x)dm(y) \right) dm(x)$$

και

$$\int f(y)\hat{g}(y)dm(y) = \int f(y) \left(\int g(x)e^{-ixy}dm(x) \right) dm(y) = \int \left(\int f(y)e^{-ixy}g(x)dm(x) \right) dm(y).$$

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $\phi(x, y) = f(y)e^{-ixy}g(x)$ (είναι μετρήσιμη και) ικανοποιεί

$$\int \left(\int |f(y)e^{-ixy}g(x)|dm(x) \right) dm(y) = \int |f(y)| \left(\int |g(x)|dm(x) \right) dm(y) = \|f\|_1 \|g\|_1 < \infty$$

άρα, από το Θεώρημα Tonelli, $\phi \in L^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ και συνεπώς από το Θεώρημα Fubini τα δύο διαδοχικά ολοκληρώματα $\int \left(\int f(y)e^{-ixy}g(x)dm(y) \right) dm(x)$ και $\int \left(\int f(y)e^{-ixy}g(x)dm(x) \right) dm(y)$ είναι ίσα, πράγμα που αποδεικνύει τη ζητούμενη ισότητα. □

Θεώρημα 10.5 (Αντιστροφής I) *Αν $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$*

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(\xi)e^{+ix\xi}d\xi.$$

Απόδειξη Έστω $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ και $\lambda > 0$. Ισχυρίζομαι ότι ισχύει η ισότητα

$$\int \hat{f}(t)g\left(\frac{t}{\lambda}\right) dm(t) = \int f\left(\frac{\xi}{\lambda}\right) \hat{g}(\xi)dm(\xi). \tag{9}$$

Πράγματι, αν $f_\lambda(x) = f\left(\frac{x}{\lambda}\right)$ τότε γνωρίζουμε (Παρατήρηση 9.1(v)) ότι $\hat{f}_\lambda(\xi) = \lambda\hat{f}(\lambda\xi)$ και συνεπώς, από το Λήμμα αλλαγής στέγης,

$$\int \hat{f}_\lambda(x)g(x)dm(x) = \int f_\lambda(\xi)\hat{g}(\xi)dm(\xi)$$

$$\text{δηλαδή} \quad \int \lambda\hat{f}(\lambda x)g(x)dm(x) = \int f\left(\frac{\xi}{\lambda}\right) \hat{g}(\xi)dm(\xi)$$

και με την αλλαγή μεταβλητής $t = \lambda x$ προκύπτει η (9).

Αν τώρα $\lambda \in \mathbb{N}$, καθώς $\lambda \to \infty$ η ακολουθία (ϕ_λ) όπου $\phi_\lambda(t) = \hat{f}(t)g\left(\frac{t}{\lambda}\right)$ τείνει στην $\hat{f}(t)g(0)$ για κάθε t, και κυριαρχείται από την $t \to \|g\|_\infty |\hat{f}(t)|$ η οποία ανήκει στον $L^1(\mathbb{R})$ (αφού η $\hat{f}$ ανήκει στον $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ άρα είναι L^1 και η g ανήκει στον $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ άρα είναι φραγμένη). Κατά συνέπεια από κυριαρχημένη σύγκλιση έχουμε

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int \hat{f}(t)g\left(\frac{t}{\lambda}\right) dm(t) = \int \hat{f}(t)g(0)dm(t).$$

Για τον ίδιο λόγο, επειδή η f είναι φραγμένη και η $\hat{g}$ ανήκει στον $L^1(\mathbb{R})$, έχουμε

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int f\left(\frac{\xi}{\lambda}\right)\hat{g}(\xi)dm(\xi) = \int f(0)\hat{g}(\xi)dm(\xi).$$

Επομένως από την (9) έχουμε

$$\left(\int \hat{f}(t)dm(t)\right)g(0) = f(0)\int \hat{g}(\xi)dm(\xi). \tag{10}$$

Επιλέγοντας τώρα μία [19] $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ώστε $\int \hat{f}(t)dm(t) = f(0) \neq 0$, προκύπτει η σχέση

$$g(0) = \int \hat{g}(\xi)dm(\xi)$$

που είναι η ζητούμενη για $x = 0$. Για να καταλήξουμε στον τύπο αντιστροφής για κάθε x, εφαρμόζουμε τη σχέση αυτή στη συνάρτηση $g_{-x} := T_{-x}g$ (δηλαδή $g_{-x}(y) = g(y+x)$) για την οποία γνωρίζουμε (από την ιδιότητα (ii) της Παρατήρησης 9.1) ότι $\widehat{g_{-x}}(\xi) = e^{ix\xi}\hat{g}(\xi)$ και έχουμε

$$g(x) = g_{-x}(0) = \int \widehat{g_{-x}}(\xi)dm(\xi) = \int \hat{g}(\xi)e^{ix\xi}dm(\xi). \qquad \square$$

Πόρισμα 10.6 *Ο μετασχηματισμός Fourier είναι 1-1 στον* $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Προφανώς: αν $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ και $\hat{g}(\xi) = 0$ για κάθε ξ τότε $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{g}(\xi)e^{+ix\xi}d\xi = 0$ για κάθε x.

Πόρισμα 10.7 *Ο μετασχηματισμός Fourier απεικονίζει τον* $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ *επί του* $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Απόδειξη Έστω $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Θέτουμε $f(x) = \displaystyle\int g(y)e^{+ixy}dm(y) = \hat{g}(-x)$ και έχουμε

$$\hat{f}(\xi) = \int f(x)e^{-ix\xi}dm(x) = \int \hat{g}(-x)e^{-ix\xi}dm(x) = \int \hat{g}(t)e^{+it\xi}dm(t) = g(\xi)$$

από τον τύπο αντιστροφής 10.5. $\square$

10.3 Το Θεώρημα Αντιστροφής για τον $L^1(\mathbb{R})$

Υπενθύμιση Αν $f \in L^1(\mathbb{T})$ και $\hat{f}(k) = \displaystyle\int_{\mathbb{T}} f(t)e^{-ikt}dm(t)$ (όπου $dm(t) = \frac{d\lambda(t)}{2\pi}$) είναι αλήθεια ότι η $(S_n(f))$ συγκλίνει στην f, δηλ. ότι

$$f(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\hat{f}(k)e^{ikt} \quad ;$$

Όχι εν γένει. Αν όμως $\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\hat{f}(k)| < \infty$, δηλ. αν $\hat{f} \in \ell^1(\mathbb{Z})$, τότε η $(S_n(f))$ συγκλίνει, αναγκαστικά στην f (λόγω μοναδικότητας). Δηλαδή

$$f \in L^1(\mathbb{T}) \text{ και } \hat{f} \in \ell^1(\mathbb{Z}) \quad \Rightarrow \quad f(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\hat{f}(k)e^{ikt} \quad \text{σχ.π.}$$

[19] για παράδειγμα, $f(t) = \exp(-\frac{1}{2}x^2)$ (δες το παράδειγμα 9.9)

Θεώρημα 10.8 (Αντιστροφής ΙΙ) *Αν* $g \in L^1(\mathbb{R})$ *και* $\hat{g} \in L^1(\mathbb{R})$ *τότε*

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(\xi) e^{+ix\xi} d\xi \quad \textit{σχεδόν για κάθε} \;\; x \in \mathbb{R}.$$

Απόδειξη Εφόσον $\hat{g} \in L^1(\mathbb{R})$, η συνάρτηση

$$g_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(\xi) e^{+ix\xi} d\xi$$

ορίζεται και ανήκει στον $C_0(\mathbb{R})$. Θα δείξουμε ότι

$$g(x) = g_0(x) \quad \text{σχεδόν για κάθε} \;\; x \in \mathbb{R}.$$

Έστω $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Από το Λήμμα αλλαγής στέγης 10.4,

$$\int \hat{f}(x) g(x) dm(x) = \int f(y) \hat{g}(y) dm(y).$$

Αλλά, αφού $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, ισχύει ο τύπος αντιστροφής $f(y) = \int \hat{f}(x) e^{+ixy} dm(x)$ (Θεώρημα 10.5) οπότε η προηγούμενη ισότητα γράφεται

$$\int \hat{f}(x) g(x) dm(x) = \int \left(\int \hat{f}(x) e^{+ixy} dm(x) \right) \hat{g}(y) dm(y) \,.$$

Όμως εφόσον $\hat{f}, \hat{g} \in L^1(\mathbb{R})$, η συνάρτηση $(x, y) \to \hat{f}(x) e^{+ixy} \hat{g}(y)$ ανήκει στον $L^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$. Επομένως από το θεώρημα Fubini μπορούμε να εναλλάξουμε τα διαδοχικά ολοκληρώματα στην τελευταία ισότητα, οπότε θα έχουμε

$$\begin{aligned}\int \hat{f}(x) g(x) dm(x) &= \int \left(\int \hat{f}(x) e^{+ixy} \hat{g}(y) dm(y) \right) dm(x) = \int \hat{f}(x) \left(\int \hat{g}(y) e^{+ixy} dm(y) \right) dm(x) \\ &= \int \hat{f}(x) g_0(x) dm(x).\end{aligned}$$

Έχουμε λοιπόν

$$\begin{aligned} &\int \hat{f}(x)(g(x) - g_0(x)) dm(x) = 0 \quad \text{για κάθε} \;\; f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \\ \text{άρα} \quad &\int h(x)(g(x) - g_0(x)) dm(x) = 0 \quad \text{για κάθε} \;\; h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

αφού κάθε $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ είναι της μορφής $h = \mathcal{F} f$ για κάποια $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ (Πόρισμα 10.7).

Ειδικότερα η συνάρτηση $g - g_0$ ανήκει στον $L^1(\mathbb{R})$ και ικανοποιεί $\int h(x)(g(x) - g_0(x)) dm(x) = 0$ για κάθε $h \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Στο επόμενο Λήμμα θα δείξουμε ότι μιά τέτοια συνάρτηση αναγκαστικά μηδενίζεται σχεδόν παντού. $\square$

Λήμμα 10.9 *Έστω* $f \in L^1(\mathbb{R})$. *Αν* $\int f \psi d\lambda = 0$ *για κάθε* $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, *τότε* $f = 0$ *σχεδόν παντού.*

Απόδειξη Αρκεί να δείξουμε ότι $\int_E f d\lambda = 0$ για κάθε Borel $E \subseteq \mathbb{R}$. Το μέτρο $\nu(E) = \int_E |f| d\lambda$ είναι κανονικό και πεπερασμένο, συνεπώς για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει συμπαγές K και ανοικτό U με $K \subseteq E \subseteq U$ και $\nu(U \setminus K) < \epsilon$, δηλαδή

$$\int |\chi_U - \chi_K||f| d\lambda \leq \int_{U\setminus K} |f| d\lambda < \epsilon.$$

Η απόσταση $\mathrm{dist}(K, U^c) = \delta$ είναι θετική, αφού τα K και U^c είναι κλειστά και ξένα και το K είναι συμπαγές. Θέτουμε $V = \{x \in \mathbb{R} : \mathrm{dist}(x, K) < \frac{\delta}{3}\}$. Υπάρχει συνάρτηση $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ απεριόριστα παραγωγίσιμη, με $\mathrm{supp}\phi \subseteq [-\frac{\delta}{3}, \frac{\delta}{3}]$, $\phi \geq 0$ και $\int \phi d\lambda = 1$ (δες για παράδειγμα στη Σημείωση 17).

Θέτοντας $\psi = \chi_V * \phi$, παρατηρούμε ότι η ψ είναι απεριόριστα παραγωγίσιμη, μη αρνητική και φέρεται στο σύνολο $\{x \in \mathbb{R} : \mathrm{dist}(x, K) \leq \frac{2\delta}{3}\}$, που είναι συμπαγές υποσύνολο του U (άσκηση!). Επιπλέον όταν $x \in K$ έχουμε $\psi(x) = \int \phi(y) d\lambda(y) = 1$.

Έπεται ότι $\chi_K \leq \psi \leq \chi_U$ οπότε, αφού $\chi_K \leq \chi_E \leq \chi_U$, έχουμε $|\chi_E - \psi| < \chi_U - \chi_K = \chi_{U\setminus K}$.

Αλλά από την υπόθεση ισχύει ότι $\int f\psi d\lambda = 0$ και συνεπώς

$$\left|\int_E f d\lambda\right| = \left|\int \chi_E f d\lambda - \int f\psi d\lambda\right| \leq \int |\chi_E - \psi||f| d\lambda \leq \int_{U\setminus K} |f| d\lambda < \epsilon.$$

Αφού το $\epsilon > 0$ ήταν τυχόν, έπεται ότι $\int_E f d\lambda = 0$. □

Πόρισμα 10.10 *Ο μετασχηματισμός Fourier είναι 1-1 στον* $L^1(\mathbb{R})$.

10.4 Άλλη απόδειξη του Θεωρήματος Αντιστροφής για τον $L^1(\mathbb{R})$

Έστω $g \in L^1(\mathbb{R})$ με $\hat{g} \in L^1(\mathbb{R})$. Όπως πριν, θέτουμε

$$g_0(x) = \int \hat{g}(\xi) e^{+ix\xi} dm(\xi)$$

και θέλουμε να δείξουμε ότι $g(x) = g_0(x)$ σχεδόν για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Η απόπειρα

$$\begin{aligned} g_0(x) &= \int \hat{g}(\xi) e^{+ix\xi} dm(\xi) = \int \left(\int g(t) e^{-it\xi} dm(t)\right) e^{+ix\xi} dm(\xi) \\ &\stackrel{!}{=} \int g(t) \left(\int e^{-i(x-t)\xi} dm(\xi)\right) dm(t) \end{aligned}$$

είναι λανθασμένη και δεν οδηγεί πουθενά, καθώς η συνάρτηση $e_x : \xi \to e^{ix\xi}$ δεν είναι στον $L^1(\mathbb{R})$. Ας την αντικαταστήσουμε με την $e_{x,n} : \xi \to e^{ix\xi} \exp(-\frac{\xi^2}{2n^2})$, η οποία είναι στον $L^1(\mathbb{R})$ και τείνει κατά σημείο στην e_x καθώς $n \to \infty$. Επειδή $|(e_{x,n}(\xi) - e_x(\xi))\hat{g}(\xi)| \leq 2|\hat{g}(\xi)|$ και η $|\hat{g}|$ είναι στον $L^1(\mathbb{R})$, το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης δίνει ότι

$$\lim_n \int \hat{g}(\xi) e^{+ix\xi} \exp(-\frac{\xi^2}{2n^2}) dm(\xi) = \int \hat{g}(\xi) e^{+ix\xi} dm(\xi). \tag{11}$$

Μετασχηματίζουμε τώτα το ολοκλήρωμα αριστερά:
Εφόσον οι $\hat{g}$ και $e_{x,n}$ είναι στον $L^1(\mathbb{R})$ από το Λήμμα αλλαγής στέγης (10.4) έχουμε

$$\int \hat{g}(\xi) e_{x,n}(\xi) dm(\xi) = \int g(y) \hat{e}_{x,n}(y) dm(y).$$

Ας υπολογίσουμε την $\hat{e}_{x,n}$:
Στο Παράδειγμα 9.9 δείξαμε ότι αν $f_a(x) = \exp\left(-\frac{1}{2}ax^2\right)$, τότε $\hat{f}_a(\xi) = \frac{1}{\sqrt{a}}\exp\left(-\frac{\xi^2}{2a}\right)$. Επειδή

$$e_{x,n}(t) = e^{ixt}\exp(-\frac{t^2}{2n^2}) = e^{ixt}f_a(t)$$

όπου $a = \frac{1}{n^2}$, ξέρουμε από την Παρατήρηση 9.1 ότι

$$\hat{e}_{x,n}(y) = \hat{f}_a(y-x) = \frac{1}{\sqrt{a}}\exp\left(-\frac{(y-x)^2}{2a}\right) = n\exp\left(-\frac{1}{2}(n(y-x))^2\right).$$

Επομένως

$$\begin{aligned}\int \hat{g}(\xi)e_{x,n}(\xi)dm(\xi) &= \int g(y)\hat{e}_{x,n}(y)dm(y)\\ &= \int g(y)n\exp\left(-\frac{1}{2}(n(y-x))^2\right)dm(y) = (g*\phi_n)(x)\end{aligned}$$

όπου $\phi_n(s) = n\exp\left(-\frac{1}{2}(ns)^2\right) = n\phi(ns)$ με $\phi(s) = \exp\left(-\frac{1}{2}s^2\right)$. Επειδή $\int\phi(s)dm(s) = 1$, η (ϕ_n) είναι προσεγγιστική μονάδα για τον $L^1(\mathbb{R})$ (όπως έχουμε αποδείξει), άρα $\|g*\phi_n - g\|_1 \to 0$. Υπάρχει συνεπώς υπακολουθία (k_n) ώστε $(g*\phi_{k_n})(x) - g(x) \to 0$ σχεδόν για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Τελικά λοιπόν,

$$\begin{aligned}g_0(x) &= \int \hat{g}(\xi)e^{+ix\xi}dm(\xi) \stackrel{(11)}{=} \lim_n \int \hat{g}(\xi)e_{x,n}(\xi)dm(\xi)\\ &= \lim_n g*\phi_{k_n}(x) = g(x) \qquad \text{σχεδόν για κάθε } x\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. $\square$

11 Ο τύπος άθροισης του Poisson

Έστω $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Ορίζουμε

$$f_1(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(2k\pi + x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Η f_1 είναι καλά ορισμένη και μάλιστα συνεχής, επειδή η σειρά συγκλίνει απόλυτα και ομοιόμορφα σε κάθε διάστημα $[-M, M]$. Πράγματι, αφού $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ υπάρχει σταθερά C ώστε $|t^2 f(t)| \le C$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$ άρα $|f(2k\pi + x)| \le \frac{C}{|(2k\pi+x)^2|} \le \frac{C}{(2k\pi)^2}$ για κάθε x και k. Παρατηρούμε ότι η f_1 είναι μια 2π-περιοδική συνάρτηση.

Από την άλλη μεριά, παίρνοντας αφορμή από τον τύπο αντιστροφής για τον $\mathcal{S}(\mathbb{R})$,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\xi)e^{i\xi x}d\xi$$

θεωρούμε το «διακριτό ανάλογο»

$$f_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\hat{f}(k)e^{ikx}, \quad x\in\mathbb{R},$$

που είναι επίσης μια 2π-περιοδική συνεχής συνάρτηση (και αυτή η σειρά συγκλίνει απόλυτα και ομοιόμορφα στα συμπαγή, εφόσον $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$).

Το αξιοσημείωτο είναι ότι οι δύο αυτές συναρτήσεις ταυτίζονται.

Πρόταση 11.1 (Τύπος άθροισης του Poisson) *Αν $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, τότε*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} f(2k\pi + x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k)e^{ikx}, \quad x \in \mathbb{R}\,,$$

$$\textit{ειδικότερα} \qquad \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(2k\pi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k)\,.$$

Απόδειξη Εφόσον οι f_1 και f_2 είναι 2π-περιοδικές συνεχείς συναρτήσεις, για να δείξω ότι είναι ίσες αρκεί να δείξω ότι, θεωρούμενες ως συναρτήσεις στο $[-\pi,\pi]$, έχουν τους ίδιους *συντελεστές Fourier*, δηλαδή ότι

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_1(x)e^{-inx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_2(x)e^{-inx}dx$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.

Για την f_2 έχουμε

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_2(x)e^{-inx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\hat{f}(k)e^{ikx}e^{-inx}dx \stackrel{(*)}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\hat{f}(k)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx}e^{-inx}dx = \frac{\hat{f}(n)}{\sqrt{2\pi}}$$

(η (*) ισχύει λόγω την ομοιόμορφης σύγκλισης της σειράς).

Επειδή και η σειρά για την f_1 συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[-\pi,\pi]$, έχουμε

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_1(x)e^{-inx}dx &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}} f(2k\pi+x)e^{-inx}dx = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(2k\pi+x)e^{-inx}dx \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{1}{2\pi}\int_{2k\pi-\pi}^{2k\pi+\pi} f(t)e^{-in(t-2k\pi)}dt = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{1}{2\pi}\int_{2k\pi-\pi}^{2k\pi+\pi} f(t)e^{-int}dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-int}dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\hat{f}(n)
\end{aligned}$$

και η Πρόταση αποδείχθηκε. $\square$

12 Ο μετασχηματισμός Fourier στον $L^2(\mathbb{R})$

Θεώρημα 12.1 (Plancherel) *Αν $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ τότε* $\quad \left\langle \hat{f}, \hat{g} \right\rangle = \langle f, g\rangle$

δηλαδή

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)}d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{g(x)}dx.$$

Ειδικότερα, $\qquad \|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2\,.$

Απόδειξη Η απόδειξη είναι ανάλογη με εκείνην του Λήμματος αλλαγής στέγης (Λήμμα 10.4): Κατ' αρχήν τα δύο ολοκληρώματα υπάρχουν αφού οι f, g ανήκουν στον $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ οπότε οι fg και $\hat{f}\hat{g}$ ανήκουν στον $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, άρα και στον $L^1(\mathbb{R})$. Έχουμε

$$\int \hat{f}(x)\overline{\hat{g}(x)}dm(x) = \int \left(\int f(y)e^{-ixy}dm(y) \right) \overline{\hat{g}(x)}dm(x) = \int \left(\int f(y)e^{-ixy}\overline{\hat{g}(x)}dm(y) \right) dm(x)$$

και

$$\int f(y)\overline{g(y)}dm(y) = \int f(y)\overline{\left(\int \hat{g}(x)e^{+ixy}dm(x) \right)}dm(y) = \int \left(\int f(y)e^{-ixy}\overline{\hat{g}(x)}dm(x) \right) dm(y)$$

όπου στη δεύτερη ισότητα χρησιμοποιήθηκε και το Θεώρημα 10.5 (Αντιστροφής Ι). Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $\phi(x, y) = f(y)e^{-ixy}\overline{\hat{g}(x)}$ (είναι μετρήσιμη και) ικανοποιεί

$$\int \left(\int |f(y)e^{-ixy}\overline{\hat{g}(x)}|dm(x) \right) dm(y) = \int |f(y)| \left(\int |\hat{g}(x)|dm(x) \right) dm(y) = \|f\|_1 \|\hat{g}\|_1 < \infty$$

άρα, από το Θεώρημα Tonelli, $\phi \in L^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ και συνεπώς από το Θεώρημα Fubini τα δύο διαδοχικά ολοκληρώματα $\int \left(\int f(y)e^{-ixy}\overline{\hat{g}(x)}dm(y) \right) dm(x)$ και $\int \left(\int f(y)e^{-ixy}\overline{\hat{g}(x)}dm(x) \right) dm(y)$ είναι ίσα, πράγμα που αποδεικνύει τη ζητούμενη ισότητα. $\square$

Θεώρημα 12.2 (Plancherel) *Ο μετασχηματισμός Fourier $f \to \hat{f}$ επεκτείνεται μοναδικά σε μια ισομετρία*

$$\mathcal{F}_2 : (L^2(\mathbb{R}), \|\cdot\|_2) \longrightarrow (L^2(\mathbb{R}), \|\cdot\|_2)$$

που είναι επί.

Πράγματι, μόλις δείξαμε ότι ο μετασχηματισμός Fourier απεικονίζει τον πυκνό υπόχωρο $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ του $(L^2(\mathbb{R}), \|\cdot\|_2)$ ισομετρικά και επί του $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, άρα έχει εικόνα πυκνή στον $L^2(\mathbb{R})$. Επομένως η μοναδική συνεχής επέκτασή του [20] σε όλον τον $L^2(\mathbb{R})$ είναι ισομετρία και έχει πυκνή εικόνα, άρα είναι επί του $L^2(\mathbb{R})$.

Παρατήρηση 12.3 *Τονίζουμε ότι, ενώ ο μετασχηματισμός Fourier μιάς $f \in L^1(\mathbb{R})$ είναι μια (παντού ορισμένη) συνάρτηση $\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, ο μετασχηματισμός Fourier μιάς $f \in L^2(\mathbb{R})$ είναι ένα στοιχείο $\mathcal{F}_2 f$ του $L^2(\mathbb{R})$, και κατά συνέπεια ορίζει μια συνάρτηση μόνον σχεδόν παντού.*

Επομένως, όταν $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, ορίζονται δύο αντικείμενα: η $\hat{f} \in C_0(\mathbb{R})$ και το $\mathcal{F}_2 f \in L^2(\mathbb{R})$. Θα δείξουμε ότι στην πραγματικότητα αυτά τα δύο αντικείμενα «ουσιαστικά» συμπίπτουν:

Πρόταση 12.4 *Αν $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, τότε $\hat{f} = \mathcal{F}_2 f$ σχεδόν παντού.*

Απόδειξη Από τον ορισμό του $\mathcal{F}_2 f$, *για κάθε* ακολουθία (f_n) με $f_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ώστε $\lim_n \|f - f_n\|_2 = 0$ έχουμε $\lim_n \left\|\mathcal{F}_2 f - \hat{f}_n\right\|_2 = 0$, κατά συνέπεια υπάρχει υπακολουθία (f_{k_n}) ώστε $\hat{f}_{k_n} - \mathcal{F}_2 f \to 0$ σχεδόν παντού.

[20] Γνωρίζουμε ότι μια γραμμική ισομετρία ορισμένη σε πυκνό υπόχωρο χώρου Banach με τιμές σε χώρο Banach επεκτείνεται μοναδικά σε όλον τον χώρο.

Από την άλλη μεριά, αφού $f \in L^1(\mathbb{R})$, η συνάρτηση $\hat{f}$ ορίζεται. *Αν η (f_n) συγκλίνει στην f και ως προς την νόρμα του $L^1(\mathbb{R})$, τότε θα έχουμε*

$$\left\| \hat{f}_n - \hat{f} \right\|_\infty \leq \|f_n - f\|_1 \to 0$$

και συνεπώς $\hat{f}_n \to \hat{f}$ κατά σημείο, άρα

$$\mathcal{F}_2 f(x) = \lim_n \hat{f}_{k_n}(x) = \hat{f}(x) \qquad \text{σχεδόν για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Αρκεί λοιπόν να βρούμε ακολουθία (f_n) στον $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ που να προσεγγίζει την f *ταυτόχρονα και ως προς την* $\|\cdot\|_1$ *και ως προς την* $\|\cdot\|_2$.
Ισοδύναμα, αν $\epsilon > 0$, θέλουμε $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ώστε $\|f - h\|_1 < \epsilon$ και $\|f - h\|_2 < \epsilon$.

Αν $\chi_n = \chi_{[-n,n]}$, τότε, αφού $f \in L^1 \cap L^2$, ισχύει ότι $\|f - f\chi_n\|_1 \to 0$ και $\|f - f\chi_n\|_2 \to 0$ (κυριαρχημένη σύγκλιση). Επομένως, αν δοθεί $\epsilon > 0$, υπάρχει n_0 ώστε, γράφοντας $g = f\chi_{n_0}$, να έχουμε $\|f - g\|_1 < \epsilon/2$ και $\|f - g\|_2 < \epsilon/2$. Τώρα, χρησιμοποιώντας μια προσεγγιστική μονάδα (ϕ_k) για τον $L^1(\mathbb{R})$ με $\phi_k \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ και $\operatorname{supp}\phi_k \subseteq [\frac{-1}{k}, \frac{1}{k}]$ (δες Λήμμα 10.1), έχουμε, για $p = 1$ και $p = 2$,

$$\lim_k \|\phi_k * g - g\|_p \to 0\,,$$

άρα υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $\|\phi_k * g - g\|_p < \epsilon/2$ για $p = 1$ και για $p = 2$. Θέτουμε τώρα $h = \phi_k * g$ και παρατηρούμε ότι η h έχει συμπαγή φορέα, αφού και η ϕ_k και η g έχουν συμπαγή φορέα, και είναι C^∞, αφού η ϕ_k είναι C^∞. Επομένως, $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Τέλος, $\|h - g\|_p = \|\phi_k * g - g\|_p < \epsilon/2$, άρα $\|h - f\|_p \leq \|h - g\|_p + \|g - f\|_p < \epsilon$ για $p = 1$ και για $p = 2$. $\square$

Παρατήρηση 12.5 *Στο εξής, για κάθε $f \in L^2(\mathbb{R})$ θα συμβολίζουμε $\hat{f}$ τον μετασχηματισμό Fourier $\mathcal{F}_2 f$ της f.*

Επαναλαμβάνουμε όμως ότι, όταν $f \in L^2(\mathbb{R}) \setminus L^1(\mathbb{R})$, ο μετασχηματισμός Fourier της f είναι ένα στοιχείο του $L^2(\mathbb{R})$, και κατά συνέπεια ορίζει μια συνάρτηση μόνον σχεδόν παντού.

Πρόταση 12.6 *Για κάθε $f \in L^2(\mathbb{R})$ έχουμε*

$$\begin{aligned}
(i) \quad & \lim_n \left\| \hat{f} - \hat{f}_n \right\|_2 = 0 \quad \textit{όπου} \;\; f_n = \chi_{[-n,n]} f, \\
\textit{δηλαδή} \quad & \lim_n \left\| \hat{f} - \psi_n \right\|_2 = 0 \quad \textit{όπου} \;\; \psi_n(\xi) = \int_{-n}^{n} f(x) e^{-ix\xi} dm(x), \\
(ii) \quad & \lim_n \|f - \phi_n\|_2 = 0 \quad \textit{όπου} \;\; \phi_n(x) = \int_{-n}^{n} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} dm(\xi).
\end{aligned}$$

Σε περίπτωση που $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, έχουμε $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} dm(\xi)$ σχεδόν για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη Θέτουμε $f_n = f\chi_n$ (όπου $\chi_n = \chi_{[-n,n]}$) και παρατηρούμε ότι $f_n \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, διότι

$$\begin{aligned}
\|f_n\|_2^2 &= \int_{-n}^{n} |f(x)|^2 dm(x) \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dm(x) = \|f\|_2^2 < \infty \\
\text{και} \quad \|f_n\|_1^2 &= \left(\int |f\chi_n(x)| dm(x) \right)^2 \leq \int |f(x)|^2 dm(x) \int \chi_n(x)^2 dm(x) < \infty
\end{aligned}$$

από την ανισότητα Cauchy-Schwarz. Εφόσον $f - f_n \in L^2(\mathbb{R})$, από την ισότητα Parseval έχουμε

$$\left\|\hat{f} - \hat{f}_n\right\|_2^2 = \left\|\widehat{(f - f_n)}\right\|_2^2 = \|f - f_n\|_2^2 = \int |f(x)(1 - \chi_n(x))|^2 dm(x) \to 0$$

από κυριαρχημένη (ή μονότονη) σύγκλιση. Όμως, αφού $f_n \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, από την Πρόταση 12.4 έχουμε

$$\hat{f}_n(\xi) = \int f_n(x) e^{-ix\xi} dm(x) = \int_{-n}^{n} f(x) e^{-ix\xi} dm(x) = \psi_n(\xi)$$

άρα $\left\|\hat{f} - \psi_n\right\|_2 \to 0$.

Για το (ii), εφαρμόζοντας το (i) στην $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$, βλέπουμε ότι η ακολουθία (ϕ_n) συγκλίνει ως προς τη νόρμα του $L^2(\mathbb{R})$. Το ζήτημα είναι να δείξουμε ότι συγκλίνει στην f.

Αν ονομάσουμε $\Psi : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ την απεικόνιση $(\Psi g)(x) = \hat{g}(-x)$, παρατηρούμε ότι η Ψ είναι ισομετρία (σύνθεση της ισομετρίας $\mathcal{F}_2$ με την $h \to \tilde{h}$ όπου $\tilde{h}(x) = h(-x)$). Επίσης, εφαρμόζοντας το (i) στην $\hat{f}$ έχουμε ότι για κάθε $f \in L^2(\mathbb{R})$, η $\Psi\hat{f}$ είναι το $L^2(\mathbb{R})$-όριο της ακολουθίας ϕ_n.

Θέλουμε να δείξουμε ότι $\Psi\hat{f} = f$ δηλαδή ότι $(\Psi \circ \mathcal{F}_2)f = f$ για κάθε $f \in L^2(\mathbb{R})$. Εφόσον η απεικόνιση $\Psi \circ \mathcal{F}_2$ είναι ομοιόμορφα συνεχής, αρκεί να δείξουμε ότι ταυτίζεται με την ταυτοτική απεικόνιση $f \to f$ σε ένα πυκνό υποσύνολο του $L^2(\mathbb{R})$. Αρκεί λοιπόν να υποθέσουμε ότι $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Τότε, αφού $\phi_n \to \Psi\hat{f}$ ως προς τη νόρμα του $L^2(\mathbb{R})$, υπάρχει μια υπακολουθία (k_n) ώστε $\phi_{k_n} \to \Psi\hat{f}$ σχεδόν παντού, δηλαδή

$$\int \chi_{k_n}(\xi)\hat{f}(\xi)e^{ix\xi}dm(\xi) \to (\Psi\mathcal{F}_2)f(x)$$

($\chi_{k_n} = \chi_{[k_n,k_n]}$) σχεδόν για κάθε x. Όμως από την άλλη μεριά έχουμε $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ (αφού $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$) και $\chi_{k_n}(\xi)\hat{f}(\xi) \to \hat{f}(\xi)$ κατά σημείο, άρα

$$\int \chi_{k_n}(\xi)\hat{f}(\xi)e^{ix\xi}dm(\xi) \to \int \hat{f}(\xi)e^{ix\xi}dm(\xi)$$

(κυριαρχημένη σύγκλιση). Όμως $\int \hat{f}(\xi)e^{ix\xi}dm(\xi) = f(x)$ από τον τύπο αντιστροφής. Έχουμε λοιπόν

$$(\Psi\mathcal{F}_2)f(x) = \lim_n \int \chi_{k_n}(\xi)\hat{f}(\xi)e^{ix\xi}dm(\xi) = f(x)$$

σχεδόν για κάθε x, δηλαδή $(\Psi\mathcal{F}_2)f = f$ ως στοιχεία του $L^2(\mathbb{R})$, πράγμα που ολοκληρώνει την απόδειξη του (ii).

Τέλος, αν $f \in L^2(\mathbb{R})$ και $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ (οπότε $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$) το ολοκλήρωμα $\int \hat{f}(\xi)e^{ix\xi}dm(\xi)$ υπάρχει για κάθε x και ισούται με το όριο $\lim_n \int_{-n}^{n} \hat{f}(\xi)e^{ix\xi}dm(\xi) = \lim_n \phi_n(x)$, από κυριαρχημένη σύγκλιση. Όμως από το (ii) η ϕ_n συγκλίνει, ως προς τη νόρμα του $L^2(\mathbb{R})$, στην f, άρα μια υπακολουθία της συγκλίνει στην f σχεδόν παντού, επομένως $f(x) = \int \hat{f}(\xi)e^{ix\xi}dm(\xi)$ σχεδόν παντού. □