Αρχή ομοιόμορφου φράγματος

Έστω $(E, \|\cdot\|)$ χώρος Banach και $\mathcal{P} = \{p_i\}$ μια οικογένεια από *συνεχείς* ημινόρμες $p : E \to \mathbb{R}$. [1]
Τότε

> **είτε** η $\mathcal{P}$ *είναι ομοιόμορφα φραγμένη, δηλαδή υπάρχει* M *ώστε* $p(x) \leq M$ *για κάθε* $x \in E$ *με* $\|x\| \leq 1$ *και κάθε* $p \in \mathcal{P}$
>
> **ή αλλιώς** *(δεν είναι κατά σημείο φραγμένη, μάλιστα) το σύνολο* $K = \{x \in E : \sup_i p_i(x) = \infty\}$ *είναι πυκνό* G_δ *υποσύνολο του* E.

Απόδειξη Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε

$$A_n = \{x \in E : \sup_i p_i(x) \leq n\}.$$

Παρατηρούμε ότι το A_n είναι κλειστό: πράγματι, $A_n = \bigcap_i \{x \in E : p_i(x) \leq n\} = \bigcap_i p_i^{-1}([0, n])$ και κάθε p_i είναι συνεχής.

Έστω ότι κάποιο A_{n_0} περιέχει μια ανοιχτή μπάλα $B(x_0, r)$. Τότε, για κάθε $x \in E$ με $\|x\| \leq 1$, αν θέσουμε $z = \frac{r}{2}x$ παρατηρούμε ότι $x_0 + z \in B(x_0, r)$ (γιατί $\|z\| = \frac{r}{2} < r$), και επομένως, για κάθε $p_i \in \mathcal{P}$,

$$\begin{aligned} p_i(z) &\leq p_i(x_0 + z) + p_i(-x_0) = p_i(x_0 + z) + p_i(x_0) \leq n_0 + n_0 \\ \text{άρα} \quad p_i(x) &= p_i\left(\frac{2}{r}z\right) = \frac{2}{r}p_i(z) \leq \frac{4n_0}{r} \end{aligned}$$

άρα $p_i(x) \leq M$ για κάθε $x \in E$ με $\|x\| \leq 1$, όπου $M = \frac{4n_0}{r}$. Επομένως η οικογένεια $\mathcal{P}$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη.

Έπεται ότι *αν* η οικογένεια $\mathcal{P}$ *δεν* είναι ομοιόμορφα φραγμένη, τότε κάθε A_n θα έχει κενό εσωτερικό και επομένως το συμπλήρωμά του, $K_n := A_n^c$, θα είναι ανοικτό και πυκνό. Αφού ο E είναι πλήρης, από το Θεώρημα *Baire* έπεται ότι η τομή $K = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} K_n$ είναι πυκνό και G_δ (:αριθμήσιμη τομή ανοικτών) υποσύνολο του E. Όμως, η τομή αυτή ισούται με

$$K = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in E : \sup_i p_i(x) > n\} = \{x \in E : \sup_i p_i(x) = \infty\}. \qquad \square$$

[1] δηλ. $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ και $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$ για κάθε $x, y \in E$ και $\lambda \in \mathbb{K}$.