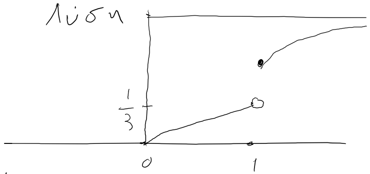
Άσκηση 10 Η συνάρτηση κατανομής πιθανότητας F της τ.μ. X, για $x \in (0,1)$ δίνεται από την $F(x) = \frac{x}{3}$. Αν η τ.μ. $\frac{1}{X}$ ακολουθεί την ίδια κατανομή όπως η X:

(α′) Να υπολογιστεί η πιθανότητα $\mathbb{P}(X = 1)$.

(β′) Να βρεθεί η σ.κ.π. F.

Λύση



Για $x > 1$

$$P(X \le x) = P\left(\frac{1}{X} \ge \frac{1}{x}\right)$$

$$= P\left(X \ge \frac{1}{x}\right) = P\left(X > \frac{1}{x}\right) + P\left(X = \frac{1}{x}\right)$$

$$= 1 - F\left(\frac{1}{x}\right) + \underbrace{F\left(\frac{1}{x}\right) - F\left(\frac{1}{x}-\right)}_{= 0}$$

$$= 1 - \frac{1}{3x}$$

Άρα

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{x}{3} & x \in [0, 1) \\ 1 - \frac{1}{3x} & x \in [1, \infty) \end{cases}$$

$$P(X = 1) = F(1) - F(1-) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

4.15. (Ο αμνήμων τουρίστας) Ένας τουρίστας επιθυμεί να επισκεφθεί 4 πρωτεύουσες Α,Β,Γ,Δ. Διαλέγει μια στην τύχη και την επισκέπτεται την 1η μέρα. Τη 2η μέρα διαλέγει μια από τις 3 που δεν επισκέφθηκε την 1η μέρα. Την 3η μέρα διαλέγει μια από τις 3 που δεν επισκέφθηκε την 2η μέρα (αλλά μπορεί να ξαναεπισκεφθεί αυτή που επισκέφθηκε την 1η μέρα). Βρείτε τη μέση τιμή του αριθμού των ημερών N μέχρι να έχει επισκεφθεί όλες τις πρωτεύουσες τουλάχιστον μία φορά.

Λύση

X_i = # βημάτων ώσπου να δει την i-οστή νέα πόλη αφού έχει δει την $i-1$

$X_1 = 1$

$X_2 = 1$

$X_3 \sim$ Γεωμ(p_3), $\quad p_3 = \frac{2}{3}$

$X_4 \sim$ Γεωμ(p_4), $\quad p_4 = \frac{1}{3}$

$N = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$

$EN = 1 + 1 + E(X_3) + E(X_4) = 1 + 1 + \frac{3}{2} + 3$
$= 6.5$

1. Έστω $X \sim \mathrm{Bin}(n,p)$ με $n \in \mathbb{N}^+, p \in (0,1)$. Να βρεθεί μια απλή έκφραση για την πιθανότητα $\mathbf{P}$(το X είναι πολλαπλάσιο του 2).

Λύση

$f_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad k = 0, 1, \ldots, n$

$P(X \text{ ζυγός}) = \sum_{j=0}^{n/2} P(X = 2j) = A$

$P_X(t) = E(t^X) = \sum_{k=0}^{n} P(X = k)\, t^k$
$= (tp + 1 - p)^n$

$$A = \frac{P_X(1) + P_X(-1)}{2} = \frac{1 + (1-2p)^n}{2}$$

4. (25 Βαθμοί) Αν X είναι τυχαία μεταβλητή με τιμές στο $\mathbb{N}$ και συνάρτηση πιθανότητας f_X ώστε $f_X(0) < 1$, θεωρούμε μια τυχαία μεταβλητή X^* με συνάρτηση πιθανότητας $f_{X^*}(k) = ck f_X(k)\mathbf{1}_{k\in\mathbb{N}}$ για κάθε $k \in \mathbb{R}$ όπου c είναι κατάλληλη σταθερά.
(α) Αν η X έχει πιθανογεννήτρια $P_X(t) := \mathbf{E}(t^X) = t/(2-t)^2$ για κάθε $t \in (-2, 2)$, να υπολογιστεί η σταθερά c.
(β) Αν δίνεται η $P_X(t)$ για κάθε $t \in (-1, 1)$ και ισχύει ότι $\mathbf{E}(X) \in (0, \infty)$, να υπολογιστεί η $P_{X^*}(t)$ για κάθε $t \in (-1, 1)$.
(γ) Αν η X ακολουθεί την κατανομή Poisson(λ), όπου $\lambda > 0$ σταθερά, να δειχθεί ότι η X^* έχει την ίδια κατανομή με την $X + 1$.

Λύση

Βρίσκουμε το c. Πρώτα

$1 = \sum_{k=0}^{\infty} f_{X^*}(k) = c \sum_{k=0}^{\infty} k f_X(k) = c EX$

(α) $c = 1/EX$

$EX = P_X'(1-) = \frac{(2-t)^2 + 2(2-t)t}{(2-t)^4}\Big|_{t=1} = \frac{1+2}{1} = 3$

(β) $P_{X^*}(t) = E(t^{X^*}) = \sum_{k=0}^{\infty} t^k c k f_X(k) = c \sum_{k=0}^{\infty} k t^k f_X(k)$

$= c\, t \sum_{k=0}^{\infty} k t^{k-1} f_X(k) = \frac{t}{EX} P_X'(t)$

Η X^* λέγεται size bias της X

(γ) $f_{X^*}(k) = \frac{1}{EX} k f_X(k) = \frac{1}{\lambda} k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} =$

$= e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = f_X(k-1), \quad k \geq 1$

$= P(X = k-1) = P(X+1 = k)$

$= f_{X+1}(k)$

Και για $k = 0$, $f_{X^*}(0) = 0 = P(X+1 = 0) =$
$= f_{X+1}(0)$

X^*, $X+1$ έχουν το ίδιο f

Άλλος τρόπος $\quad P_X(t) = e^{\lambda(t-1)}$

$P_{X^*}(t) = \frac{t}{\lambda} \lambda e^{\lambda(t-1)} = t e^{\lambda(t-1)}$

$P_{X+1}(t) = E(t^{X+1}) = t E(t^X) = t e^{\lambda(t-1)}$

Οι X^*, $X+1$ έχουν τις ίδιες πιθανογεννήτριες $\forall t \in \mathbb{R}$

Άρα έχουν την ίδια κατανομή.

Άσκηση. Απρίλιος 2014. Θ2

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & x \in (0,2) \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

$$Y = |X-1|$$

i) πυκνότητα της Y

ii) $\rho(X,Y)$

Λύση

i) Η X παίρνει τιμές στο $(0,2)$

Η Y παίρνει τιμές στο $[0,1)$

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(|X-1| \le y) = P(1-y \le X \le 1+y)$$

$$= \begin{cases} 0 & y \le 0 \\ 1 & y \ge 1 \end{cases}$$

Αν $y \in (0,1)$

$$F_Y(y) = P(y-1 \le X \le y+1) = F_X(y+1) - F_X(1-y)$$

Συνεχής στο $(-\infty,0) \cup (1,\infty) \cup (0,1)$

$$F_Y(0+) = F_X(1) - F_X(1) = 0 = F_Y(0-)$$

$$F_Y(1-) = F_X(2) - F_X(0) = 1 - 0 = 1 = F_Y(1+) = F_Y(1)$$

Επίσης για $y \in (0,1)$, $F_Y'(y)$

$$= F_X'(y+1) - F_X'(1-y)(-1) = f_X(y+1) + f_X(1-y)$$

$$= \frac{y+1}{2} + \frac{1-y}{2} = 1$$

$$F_Y'(y) = \begin{cases} 0 & y<0 \text{ ή } y>1 \\ 1 & y \in (0,1) \end{cases}$$

Άρα η Y έχει πυκνότητα $f_Y(y) = 1_{(0,1)}(y)$

$$E(XY) = E(X|X-1|) = \int_{\mathbb{R}} x|x-1| f(x)\,dx =$$

$$= \int_0^2 x|x-1| \frac{x}{2}\,dx$$

Τυχαίες μεταβλητές

$X : \Omega \to \mathbb{R}$

Την κωδικοποιεί η f_X

X διακριτή $\longrightarrow$ $f_X(a) = P(X = a)$

X συνεχής $\longrightarrow$ $P(X \in A) = \int_A f_X(t)\,dt$

12. Ορισμός της μέσης τιμής και χρήσεις της $f(= f_X)$

	X Διακριτή	X Συνεχής	
$\mathbf{P}(X \in A)$	$\sum_{x \in A} f(x)$	$\int_A f(x)\,dx$	(16)
$\mathbf{E}(X)$	$\sum_{x \in \mathbb{R}} x f(x)$	$\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx$	(17)
$\mathbf{E}\{h(X)\}$	$\sum_{x \in \mathbb{R}} h(x) f(x)$	$\int_{-\infty}^{\infty} h(x) f(x)\,dx$	(18)

Ειδικές διακριτές τ.μ. που εμφανίζονται σε πειράματα

i) Διωνυμική $\quad Bin(n, p)$

ii) Γεωμετρική $\quad$ Γεωμετρική(p)