# 20/1/2021. Θεματα εξετάσεων

**5.** (20 βαθμοί) (α) Να υπολογιστεί η ροπογεννήτρια $M_X(t) := E(e^{tX})$ αν η $X$ ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο $\lambda$. Για ποιά $t \in \mathbb{R}$ είναι η $M_X(t)$ πεπερασμένη?

(β) Ποιές απο τις συναρτήσεις

$$H_1(t) := \begin{cases} 4/(2-t) & \text{για } t \in (-\infty, 2), \\ \infty & \text{για } t \in [2, \infty), \end{cases} \quad H_2(t) := \begin{cases} \frac{6}{(2-t)(3-t)} & \text{για } t \in (-\infty, 2), \\ \infty & \text{για } t \in [2, \infty), \end{cases}$$

$$H_3(t) := \cos t \text{ για κάθε } t \in \mathbb{R}$$

είναι ροπογεννήτριες μιας τυχαίας μεταβλητής με τιμές στο $\mathbb{R}$? Δικαιολογήστε την απάντηση σας.

## Λύση

(α)

$$M_X(t) = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{\lambda - t} & t < \lambda \\ \infty & t \geq \lambda \end{cases}$$

(β) $H_1(0) = 2 \Rightarrow$ οχι ροπογεννήτρια

$$H_2(t) = \frac{2}{2-t} \cdot \frac{3}{3-t} \quad \text{για} \quad t < 2$$

$X, Y$ ανεξ. $\Rightarrow M_{X+Y} = M_X \cdot M_Y$

Αν $X \sim exp(2)$, $Y \sim exp(3)$

ανεξάρτητες, τότε

$$M_{X+Y}(t) = \begin{cases} \dfrac{2}{2-t} \cdot \dfrac{3}{3-t} & \text{αν } t<2 \\ \infty & \text{αν } t \geq 3 \end{cases}$$

$$= H_2(t)$$

Η $H_3$ δεν είναι γιατί παίρνει και τιμές $\leq 0$

**Θέμα 4.**(25 Βαθμοί) Έστω $X$ διακριτή τυχαία μεταβλητή με μη αρνητικές ακέραιες τιμές και πιθανογεννήτρια

$$P_X(t) := E(t^X) = \frac{2}{3}e^{2(t-1)} + ce^{5(t-1)}$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}$, όπου $c$ είναι μια σταθερά. Να υπολογιστούν:

(α) Η τιμή του $c$.

(β) Οι $E(X), V(X)$.

(γ) Η πιθανογεννήτρια της $2X$.

Λύση

(α) $P_X(1) = 1 \implies c = \frac{1}{3}$

(β) $P_X'(t) = E(X t^{X-1})$

$EX = P_X'(1-) = \frac{4}{3} + \frac{5}{3} = 3$

$E(X(X-1)) = P_X''(1-) = \frac{8}{3} + \frac{25}{3} = 11$

$Var(X) = E(X(X-1)) + EX - (EX)^2 = 11 + 3 - 9$
$= 5$

(γ) $P_{2X}(t) = E(t^{2X}) = P_X(t^2)$

Μια αναπαράσταση της $X$

$Y \sim Poisson(\lambda) \quad e^{\lambda(t-1)}$

$Y_1 \sim Poisson(2)$

$Y_2 \sim \quad " \quad (3)$

$I \sim Bernoulli(2/3) \qquad I, Y_1, Y_2$ ανεξάρτητες

$$X = \begin{cases} Y_1 & \text{αν } I = 1 \\ Y_2 & \text{αν } I = 0 \end{cases} = I Y_1 + (1-I) Y_2$$

**Θέμα 3.** Η ζήτηση $X$ ενός φαρμάκου κατά τη διάρκεια ενός έτους είναι συνεχής τυχαία μεταβλητή με ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $(0,2)$. Η φαρμακευτική εταιρεία θέλει να παρασκευάσει στην αρχή του έτους ποσότητα $\beta \in (0,2)$ του φαρμάκου. Διευκρινίζεται ότι η εταιρεία θα παρασκευάσει όλη την ποσότητα του φαρμάκου στην αρχή του έτους, τότε που δεν γνωρίζει την μελλοντική ζήτηση $X$. Η παρασκευή της ποσότητας $\beta$ έχει κόστος παραγωγής $40\beta$ (το κόστος ανά μονάδα παραγωγής είναι 40), ενώ η τιμή πώλησης ανά μονάδα είναι 50. Να προσδιοριστεί η τιμή $\beta^*$ που μεγιστοποιεί το αναμενόμενο κέρδος της εταιρείας.
[Υπόδειξη: Αν η εταιρεία παρασκευάσει ποσότητα $\beta$ τότε θα εισπράξει συνολικά, στο τέλος του έτους, ποσό ίσο με $50X$ αν $X \le \beta$ και $50\beta$ αν $X > \beta$, δηλαδή $50\min\{X,\beta\}$.]

Λύση

Κέρδος $Y = 50(\overbrace{X \wedge \beta}^{\min\{X,\beta\}}) - 40\beta$

$$E(X\wedge\beta) = \int_{\mathbb{R}} (x\wedge\beta) f_X(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^2 (x\wedge\beta)\,dx$$

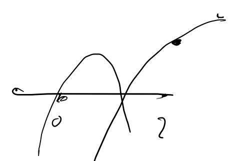
$$= \frac{1}{2}\int_0^\beta x\,dx + \frac{1}{2}\int_\beta^2 \beta\,dx = \frac{\beta^2}{4} + \frac{1}{2}\beta(2-\beta)$$

$$= \beta - \frac{\beta^2}{4}$$

Άρα $EY = 50\beta - \frac{25}{2}\beta^2 - 40\beta = 10\beta - \frac{25}{2}\beta^2$

$H(\beta)$

$H'(\beta) = 10 - 25\beta = 0 \Rightarrow \beta = \frac{2}{5}$



**Θέμα 4:** Έστω $(X, Y)$ διδιάστατη τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.)

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 4xy & \text{αν } x^2+y^2 \leq 1 \text{ και } xy > 0, \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Ζητείται:

(α) να σχεδιαστεί το στήριγμα της $(X, Y)$ και να δειχθεί ότι η $f_{X,Y}$ είναι πράγματι σ.π.π..

(β) να προσδιοριστούν οι περιθώριες συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας $f_X(x)$ και $f_Y(y)$ των $X$ και $Y$, και να εξεταστεί αν είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές.

(γ) να βρεθεί η δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_{X|Y}(x|y)$ της $X$ δοθέντος ότι $Y = y$, για $0 < y < 1$.

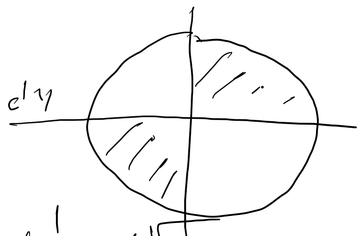
(δ) να προσδιοριστούν η δεσμευμένη μέση τιμή $E[X|Y = y]$ και η δεσμευμένη διασπορά $Var[X|Y = y]$ της $X$ δοθέντος ότι $Y = y$, για $0 < y < 1$.

(ε) να υπολογιστούν οι πιθανότητες $P(X = Y)$ και $P(X < Y)$.

Λύση

(α)

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f\,dx\,dy = 2\iint_{\substack{x^2+y^2<1\\ x,y>0}} 4xy\,dx\,dy$$



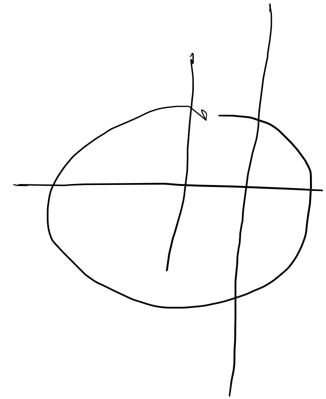
$$= 2\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}} 4xy\,dy\,dx = 8\int_0^1 x\int_0^{\sqrt{\dots}} y\,dy\,dx$$

$$= 4\int_0^1 x\,(1-x^2)\,dx = 4\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right) = 1$$

(β) $\forall x \in \mathbb{R}$

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)\,dy$$

Αυτό $= 0$ αν $x \in \mathbb{R} \setminus [-1,1]$



Αν $x \in [-1,1]$

- $x \geq 0$

$$f_X(x) = \int_0^{\sqrt{1-x^2}} 4xy\,dy$$

$$= 4x\frac{(1-x^2)}{2} = 2x(1-x^2)$$

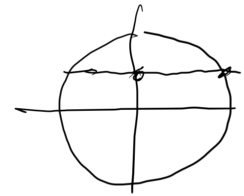
- $x < 0$

$$f_X(x) = \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{0} 4xy\,dy = 4x\frac{(0-(1-x^2))}{2}$$

$$= -2x(1-x^2)$$

Άρα $f_X(x) = 2|x|(1-x^2)\,\mathbb{1}_{[-1,1]}(x)$

$$f_Y(y) = 2|y|(1-y^2)\, 1_{[-1,1]}(y)$$



$y \in (0,1)$

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{4|xy|\, 1_{x^2+y^2\leq 1}\, 1_{xy>0}}{2|y|(1-y^2)}$$

$$= \frac{2x}{1-y^2} \cdot 1_{0<x<\sqrt{1-y^2}}$$

$$E(X|Y=y) = \int_{\mathbb{R}} x f_{X|Y}(x|y)\, dx =$$

$$= \frac{2}{1-y^2} \int_0^{\sqrt{1-y^2}} x^2\, dx = \frac{2}{1-y^2} \frac{(1-y^2)^{\frac{3}{2}}}{3}$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{1-y^2}$$

$$\mathrm{Var}(X \mid Y=y) = E(X^2 \mid Y=y) - (E(X \mid Y=y))^2$$

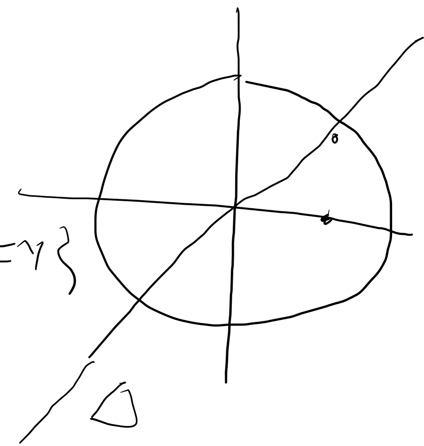
$$E(X^2 \mid Y=y) = \int_{\mathbb{R}} x^2 f_{X|Y}(x|y)\,dx$$

$$= \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \cdots \, dx$$

(e) $P(X=Y) = P((X,Y) \in \Delta)$

$\Delta = \{(x,y) : x=y\}$

$$= \iint_{\Delta} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy = 0$$

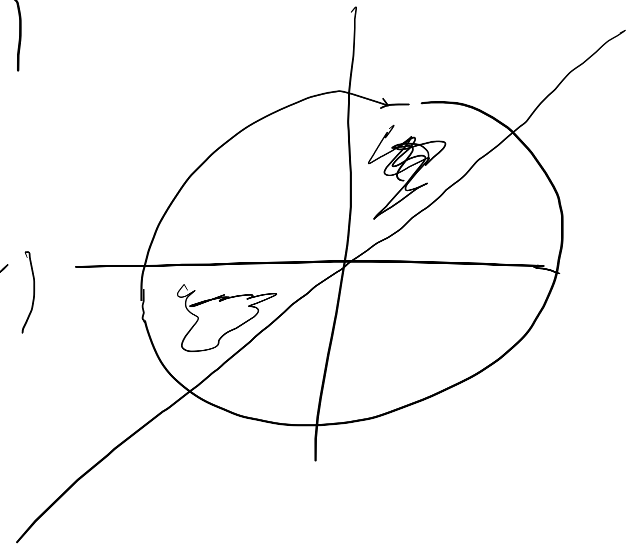


$$P(X<Y) = P(Y<X)$$

$$1 = P(X=Y) + P(X<Y) + P(X>Y)$$

$$= 2P(X<Y)$$

$$P(X<Y) = \frac{1}{2}$$



**Θέμα 4: (3 βαθμοί)** Έστω $(U, V)$ διδιάστατη τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_{U,V}(x, y)$, και περιθώριες συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας $f_U(x)$ και $f_V(x)$.

**(α)** Να βρεθεί σταθερά $c$ τέτοια ώστε η συνάρτηση $f(x, y) = c\,(f_{U,V}(x, y) + f_{U,V}(y, x))$, να είναι συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας κάποιας διδιάστατης τυχαίας μεταβλητής.

**(β)** Αν $(X, Y)$ διδιάστατη τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_{X,Y}(x, y) = f(x, y)$ (όπως στο ερώτημα (α)), τότε να δειχθεί ότι $f_X(x) = f_Y(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Τί συμπεραίνετε για τις τυχαίες μεταβλητές $X$ και $Y$ ?

**(γ)** Δείξτε ότι οι διδιάστατες τυχαίες μεταβλητές $(X, Y)$ και $(Y, X)$ είναι ισόνομες. (Υπόδειξη: δείξτε ότι $f_{X,Y}(x, y) = f_{Y,X}(x, y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$)

**(δ)** Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(X < Y)$.

(α) $$1 = \iint f(x,y)\,dx\,dy = c \iint_{\mathbb{R}^2} f_{U,V}(x,y)\,dx\,dy + c \iint_{\mathbb{R}^2} f_{U,V}(y,x)\,dx\,dy = c\cdot 1 + c\cdot 1 = 2c$$

$$\Rightarrow c = 1/2$$

(J) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < y\}$

$$P(X < Y) = P((X,Y) \in A)$$

$$= P((Y,X) \in A) = P(Y < X)$$

$$P(X = Y) = 0$$

$$P(X < Y) = \frac{1}{2}$$

**Θέμα 3. α)** Να δειχθεί ότι

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{n/2}\frac{2^n}{(n-1)!}t^{n-1}e^{-2t}dt=\frac{1}{2}.$$

β) Η $X$ είναι συνεχής τυχαία μεταβλητή με πυκνότητα πιθανότητας 1

$$f_X(x)=\begin{cases} x/2, & 0<x<c,\\ 0, & \text{διαφορετικά}\end{cases}$$

όπου $c>0$ σταθερά.
i) Βρείτε τη σταθερά $c$.
ii) Να υπολογιστεί η συνάρτηση κατανομής $F_X(x)$, $x\in\mathbb{R}$.
iii) Να υπολογιστούν οι ροπές $E(X^n)$, $n=1,2,\ldots$ .
iv) Να αναλυθεί σε δυναμοσειρά η ροπογεννήτρια $M_X(t)$ της $X$.

(α) $\Gamma(a,\lambda)$ $\quad \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)}x^{a-1}e^{-\lambda x}1_{x>0}$

$\Gamma(n,2) \leftarrow$ αντιστοιχία $f(t)=\frac{2^n}{(n-1)!}t^{n-1}e^{-2t}1_{t>0}$

$I_n=\int_0^{\frac{n}{2}}f(t)\,dt=P\left(Y_n<\frac{n}{2}\right)$

(γ) $$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2}\left(f_{U,V}(x,y) + f_{U,V}(y,x)\right) \quad (*)$$

Η $(Y, X)$ έχει συνάρτηση $f_{X,Y}(y,x)$

$$\longrightarrow f_{Y,X}(x,y) \simeq \frac{P\left(Y \in (x, x+dx),\ X \in (y, y+dy)\right)}{dx\,dy}$$

$$= f_{X,Y}(y,x) \overset{(*)}{=} f_{X,Y}(x,y)$$

$$(X,Y) \overset{d}{=} (Y\ X)$$

Έστω $(X_i)_{i \geq 1}$ ανεξάρτητες ισόνομες

με $X_1 \sim \Gamma(1, 2)$

$= \exp(2)$

$\Gamma(a_1, \lambda)$

$\Gamma(a_2, \lambda)$ $\Big\} \longrightarrow$

$\Gamma(a_1 + a_2, \lambda)$

$S_n = X_1 + \quad + X_n \sim \Gamma(n, 2)$

$EX_1 = \frac{1}{2} \quad Var(X_1) = \frac{1}{4}$

$$\frac{S_n - n \cdot \frac{1}{2}}{\sqrt{n \cdot \frac{1}{4}}}$$

η κανονικοποίηση της $S_n$

$$I_n = P\left(S_n < \frac{n}{2}\right) = P\left(\frac{S_n - \frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{4}}} < 0\right)$$

$$\xrightarrow{n \to \infty} P(\underbrace{Z}_{\sim N(0,1)} < 0) = \frac{1}{2}$$

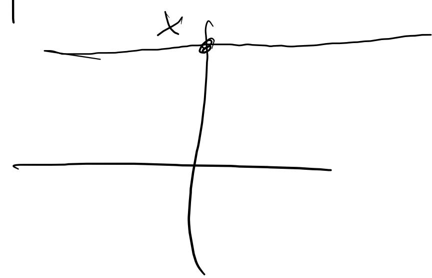
$$P\left(\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{\phantom{x}}} \in I\right) \xrightarrow{n \to \infty} P(Z \in I)$$

(β) $f_{U,V}$, $f_U$, $f_V$ δοσμένα

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2}\left(f_{U,V}(x,y) + f_{U,V}(y,x)\right)$$

$$f_X(x) = \frac{1}{2}\int f_{U,V}(x,y)\,dy + \frac{1}{2}\int f_{U,V}(y,x)\,dy$$

$$= \frac{1}{2} f_U(x) + \frac{1}{2} f_V(x)$$




όμοια $f_Y(x)$ ″

b) i) $1 = \int_{\mathbb{R}} f = \int_0^c \frac{x}{2}\,dx = \frac{c^2}{4} \Rightarrow c = 2$

ii) $F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x > 2 \\ \int_0^x \frac{t}{2}\,dt = \frac{x^2}{4} & x \in [0, 2] \end{cases}$

iii) $EX^n = \int_0^2 x^n \frac{x}{2}\,dx = \frac{2^{n+2}}{(n+2)\cdot 2} = \frac{2^{n+1}}{n+2}$

$n \in \mathbb{N}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^n \frac{x}{2} \quad dx$$

iv) $$M_X(t) = \frac{1}{t}\left\{ e^{2t} - \frac{1}{2t}\left(e^{2t}-1\right) \right\}$$

$0\,x\,1 \in (0,1)$

$$M_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k E(X^k)}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \frac{2^{k+1}}{(k+2)}$$