Θέμα 4. (3 βαθμοί) Οι τυχαίες μεταβλητές $X_1, X_2, \ldots$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες και ακολουθούν την εκθετική κατανομή με παράμετρο 2, δηλαδή έχουν συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f_{X_i}(x) = \begin{cases} 2e^{-2x} & \text{αν } x > 0 \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Η N είναι ανεξάρτητη των $X_1, X_2, \ldots$ και έχει τη γεωμετρική κατανομή με παράμετρο $\frac{1}{3}$ δηλαδή συνάρτηση πιθανότητας

$$p_N(n) = P(N = n) = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

(α) Να υπολογιστεί η ροπογεννήτρια της X_i, $i = 1, 2, \ldots$.
(β) Να υπολογιστεί η ροπογεννήτρια της $S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i$ και να βρεθεί τί κατανομή ακολουθεί η S_N.
(γ) Έστω $S_{100} = \sum_{i=1}^{100} X_i$ Να υπολογιστεί προσεγγιστικά, με χρήση του κεντρικού οριακού θεωρήματος, η πιθανότητα $P(S_{100} \geq 50)$.

Λυση

α) $$M_{X_1}(t) = \begin{cases} \dfrac{2}{2-t} & \text{αν } t < 2 \\ \infty & \text{αν } t \geq 2 \end{cases}$$

β) Εστω $p = \frac{1}{3}$. Βρισκουμε την πιθανογεννήτρια της N

$$P_N(t) = E(t^N) = \sum_{k=1}^{\infty} t^k P(N=k)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} t^k (1-p)^{k-1} p = tp \sum_{k=1}^{\infty} (t(1-p))^{k-1}$$

$$= \frac{tp}{1 - t(1-p)} \quad \text{για} \quad |t| < \frac{1}{1-p}$$

και $P_N(t) = \infty$ για $t \geq \dfrac{1}{1-p}$

Για $t \in \mathbb{R}$

$$E(e^{tS_N}) = E(\underbrace{E(e^{tS_N} \mid N)}_{m(N)})$$

$$m(n) = E(e^{tS_N} \mid N=n) = E(e^{tS_n} \mid N=n)$$

$$= E(e^{tS_n}) = E(e^{tX_1} e^{tX_2} \cdots e^{tX_n})$$

N, S_n ανεξάρτητες

$$= E(e^{tX_1}) \cdots E(e^{tX_n})$$

$$= (M_{X_1}(t))^n$$

Άρα $M_{S_N}(t) = E((M_{X_1}(t))^N)$

$$= P_N(M_{X_1}(t))$$

Αν $t \geq 2$, $M_{S_N}(t) = \infty$

Αν $t < 2$ και $M_{X_1}(t) < \frac{3}{2} = \frac{1}{1-p}$ τότε

$$M_{S_N}(t) = \frac{p M_{X_1}(t)}{1 - (1-p) M_{X_1}(t)} = \frac{\frac{2p}{2-t}}{1 - \frac{2p(1-p)}{2-t}}$$

$$= \frac{2p}{2-t-2(1-p)} = \frac{2p}{2p-t}$$

$$M_{X_1}(t) < \frac{1}{1-p} \iff \frac{2}{2-t} < \frac{1}{1-p}$$

$$2-2p < 2-t \iff t < 2p \; \ldots\ldots$$

Άρα $M_{S_N}(t) \overset{*}{=} \begin{cases} \dfrac{2p}{2p-t} & \text{αν } t<2p \\ \infty & \text{αν } t \geq 2p \end{cases}$

$$\exp(\lambda) \longrightarrow \frac{\lambda}{\lambda-t} 1_{t<\lambda} + \infty\, 1_{t\geq\lambda}$$

$$S_N \sim \exp(2p)$$

(*) Αν $t \geq 2p$, τότε $M_{X_1}(t) \geq \dfrac{1}{1-p}$

Άρα $P_N(M_{X_1}(t)) = \infty$

όπως είδαμε πιο πάνω

γ) $X_i \sim exp(2)$

$EX_1 = \frac{1}{2}$ $\quad Var(X_1) = \frac{1}{4}$

$P(S_{100} \geq 60)$

Η κανονικοποίηση της S_n είναι η

$$\frac{S_n - n/2}{\sqrt{n/4}} = \frac{S_n - \frac{n}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{n}}$$

$$P(S_{100} \geq 60) = P(S_{100} - 50 \geq 10)$$

$$= P\left(\frac{S_{100} - 50}{5} \geq 2\right) \simeq P(Z \geq 2)$$

$$= 1 - \Phi(2) \qquad Z \sim N(0,1)$$

$$P(S_{100} \geq 50) = P\left(\frac{S_{100} - 50}{\sqrt{\ }} \geq 0\right) =$$

$$\simeq P(Z \geq 0) = \frac{1}{2}$$

1. (20 Βαθμοί) Τοποθετούμε στην τύχη m (διακεκριμένα) σφαιρίδια σε n κουτιά $K_1, K_2, \ldots, K_n$. Κάθε κουτί έχει απεριόριστη χωρητικότητα. Να υπολογιστούν:
(α) Η πιθανότητα το κουτί K_1 να παραμείνει άδειο.
(β) Η μέση τιμή A_n του πλήθους των κουτιών που μένουν άδεια. Αν θέλουμε

$$C_1 < \varliminf_{n\to\infty} A_n \leq \varlimsup_{n\to\infty} A_n < C_2$$

για κάποιες πεπερασμένες και θετικές σταθερές C_1, C_2, ποια από τις εξής επιλογές για το m είναι κατάλληλη;

$$\text{(i) } m = n, \quad \text{(ii) } m = n[\log n], \quad \text{(iii) } m = n^2.$$

(γ) Η πιθανότητα να υπάρχει μόνο ένα άδειο κουτί όταν $m = n$.

α) $P = \dfrac{(n-1)^m}{n^m}$

β) $X_n = 1_{E_1} + \quad + 1_{E_n}$

$E_i = \{ \text{το } i \text{ κουτί άδειο} \}$

$A_n = E(X_n) = E(1_{E_1}) + \quad + E(1_{E_n})$

$= P(E_1) + \quad + P(E_n) = nP(E_1)$

$= n \dfrac{(n-1)^m}{n^m}$

$$A_n = n\frac{(n-1)^m}{n^m} = n\left(1-\frac{1}{n}\right)^m \simeq n e^{-\frac{m}{n}}$$

$$1-\frac{1}{n} \simeq e^{-\frac{1}{n}}$$

i) $m = n$ τότε

$$A_n = n\left(1-\frac{1}{n}\right)^n \to \infty \cdot \frac{1}{e} = \infty$$

ii, iii) $\log A_n = \log n + m\log\left(1-\frac{1}{n}\right)$

$$= \log n + m\left(-\frac{1}{n} - \frac{a(n)}{n^2}\right)$$ με $a(n)$ φραγμένη ακολουθία (*)

$$\log(1+x) = x + \frac{x^2}{2}\left(-\frac{1}{(1+\xi)^2}\right),$$ για $|x|<1$ και ξ μεταξύ 0 και x Θ. Taylor.

$$\log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2}\frac{1}{(1-\xi)^2}$$ για $x \in (0,1)$. Το ξ: $0<\xi<x$

Αν $m = n^2$, $\log A_n = \log n - n - a(n) \to -\infty$

Άρα $A_n \to 0$

Αν $m = n[\log n]$

$$\log A_n = \log n + n[\log n]\left(-\frac{1}{n} - \frac{a(n)}{n^2}\right)$$

$$= \underbrace{\log n - [\log n]}_{-1 < \ \ < 1} - \frac{a(n)[\log n]}{n^2}$$

$$\frac{1}{e} < A_n < e$$

(*) Για $n \geq 2$ $\exists \xi_n \in \left(0, \frac{1}{n}\right)$: $\to \xi_n < \frac{1}{2}$

$$\log\left(1-\frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2}\frac{1}{(1-\xi_n)^2}$$

Θέτουμε $a(n) := \dfrac{1}{2(1-\xi_n)^2} \leq \dfrac{1}{2\cdot\frac{1}{4}} = 2$

επίσης $a(n) > 0$.

γ) $\dfrac{n(n-1)\binom{n}{2}(n-2)!}{n^n}$

n κουτιά
n σφαιρ.

επιλογές για τα δύο σφαιρίδια που πάνε στο ίδιο κουτί

n επιλογές για το άδειο κουτί

$n-1$ επιλογές για το κουτί που θα περιέχει 2 σφαιρίδια

(ΘΕΜΑ 3) Έστω (απολύτως) συνεχής τ.μ. X με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f_X(x) = ke^{-x} 1_{(c,\infty)}(x) \qquad \text{με } c > 0$$

(α) Να υπολογιστεί η σταθερά k, (β) Να βρεθούν η $E[X]$ και η $Var[X]$, (γ) Να βρεθεί η συνάρτηση κατανομής $F_X(x)$, (δ) Να βρεθεί η ροπογεννήτρια $M_X(t)$. Για ποιες τιμές του t αυτή παίρνει πραγματικές τιμές;

$$f(x) = \begin{cases} ke^{-x} & x > c \\ 0 & x \leq c \end{cases}$$

$$1 = \int f(x)\,dx = k\int_c^\infty e^{-x}\,dx = ke^{-c}$$

$$\Rightarrow \quad k = e^c$$

(β) $$EX = \int_{\mathbb{R}} x f(x)\,dx = \int_c^\infty x e^c e^{-x}\,dx$$

$y = x - c$

$$= \int_0^\infty (y+c)e^{-y}\,dy = \int_0^\infty y e^{-y}\,dy + c\int_0^\infty e^{-y}\,dy$$

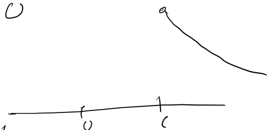
$$= 1 + c$$

$$E(X^2) = \dots$$

$$Var(X) = 1$$

γ) $F_X(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$

Αν $x \le c$, $F_X(x) = 0$



Αν $x > c$

$$F_X(x) = \int_c^x e^{c} e^{-t}\,dt = e^{c}(e^{-c} - e^{-x})$$

$$= 1 - e^{c-x}$$

δ) $M_X(t) = \int_c^{\infty} e^{tx} e^{-c} e^{-x}\,dx =$

$$= e^{-c} \int_c^{\infty} e^{-(1-t)x}\,dx$$

Αν $1-t<0$, $\lim_{x\to\infty} e^{-(1-t)x} = \infty$ ...

$= 0$, $\int_c^{\infty} 1\,dx = \infty$

Αν $1-t>0$, $M_X(t) = e^{-c}\dfrac{e^{-(1-t)c}}{1-t}$

$$= \frac{e^{ct}}{1-t} \qquad \frac{e^{-(1-t)x}}{-(1-t)}$$

Η $Y = X - c \sim exp(1)$

Άρα $X = c + Y$

$X \quad g(X)$

$$P(\underbrace{X - c}_{Y} \le x) = P(X \le c + x)$$

$$f_Y(y) = f_X(c+x) = e^{c} e^{-(x+c)} 1_{c+x>c}$$

$$= e^{-x} 1_{x>0}$$

Θέμα 4. (α) Έστω X συνεχής τυχαία μεταβλητή με πυκνότητα πιθανότητας

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2x}, & e^{-1} < x < e, \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Να βρεθεί η πυκνότητα πιθανότητας της $Y = \ln X$.

(β) Έστω $X_1, X_2, \ldots$ ακολουθία ανεξαρτήτων και ισονόμων τυχαίων μεταβλητών, καθεμία με πυκνότητα πιθανότητας την f_X του Ερωτήματος (α). Αν $W_n = \prod_{i=1}^{n} X_i$, να δείξετε ότι

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\ln W_n}{\sqrt{n}} \le x\right) = \Phi\left(x\sqrt{3}\right), \quad x \in \mathbb{R},$$

όπου Φ η συνάρτηση κατανομής της τυποποιημένης κανονικής.

(α) $F_Y(y) = P(Y \le y) = P(X \le e^y) = F_X(e^y)$ $\quad -1 < Y < 1$

$$f_Y(y) = f_X(e^y)\,e^y = \begin{cases} \frac{1}{2e^y}e^y, & e^{-1} < e^y < e \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2} & -1 < y < 1 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Άρα $Y \sim U(-1,1)$

B) $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\frac{\log W_n}{\sqrt{n}} \le x\right)$

$W_n = X_1 X_2 \quad X_n$

$S_n = \log W_n = \underbrace{\log X_1}_{Y_1} + \quad + \underbrace{\log X_n}_{Y_n}$

$EY_1 = 0$

$Var(Y_1) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

a b

$\frac{(b-a)^2}{12}$

$P\left(\frac{S_n - n \cdot 0}{\sqrt{n\frac{1}{3}}} \le \sqrt{3}x\right)$

$\xrightarrow{n\to\infty} P(Z \le x\sqrt{3}) = \Phi(x\sqrt{3})$

$\Phi(-2) \qquad \Phi(2)$

$\Phi(x) + \Phi(-x) = 1$

Εκτός ύλης

Ασθενής + Ισχυρός νόμος μεγ. αριθμών

Συνάρτηση πολυδιάστατης τ.μ. (Ross § 6.7)