Πιθανοτητες Ι. Προβληματα

1. Έστω $X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$ με $n \in \mathbb{N}^+, p \in (0, 1)$. Να βρεθεί μια απλή έκφραση για την πιθανότητα $\mathbf{P}$(το X είναι πολλαπλάσιο του 2).

2. Όποτε έχουμε μια συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to [0, \infty)$ που είναι Riemann ολοκληρωσιμη με $\iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y)\, dxdy = 1$, υπάρχει διδιάστατη τυχαία μεταβλητή (X, Y) με συνάρτηση πυκνότητας f. Η συνάρτηση κατανομής της (X, Y) είναι προφανώς η

$$F_{X,Y}(x, y) := \mathbf{P}(X \leqslant x, Y \leqslant y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(s, t)\, dtds.$$

(α) Να δοθεί παράδειγμα πυκνότητας f και σημείου $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ ώστε η f να είναι συνεχής στο (x_0, y_0) αλλά να μην υπάρχει η $\partial F/\partial x(x_0, y_0)$.

(β) Να δοθεί παράδειγμα πυκνότητας f και σημείου $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ ώστε η f να είναι συνεχής στο (x_0, y_0) αλλά να μην υπάρχει καμία από τις

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0).$$

3. Έστω (X, Y) διδιάστατη τυχαία μεταβλητή της οποίας η συνάρτηση κατανομής ικανοποιεί

$$F(x, y) = \begin{cases} 2y^3 + y^2 + xy & \text{αν } 0 \leqslant 2y \leqslant x \leqslant 1, \\ \frac{x^3 - x^2}{4} + 2xy & \text{αν } 0 \leqslant x \leqslant 2y \leqslant 1. \end{cases}$$

[Τέτοια τυχαία μεταβλητή υπάρχει.]

(α) Να συμπληρωθούν οι τιμές της F για (x, y) εκτός του $[0, 1] \times [0, 1/2]$.

(β) Να υπολογιστούν η $h(x, y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x, y)$ όπου αυτή υπάρχει και το ολοκλήρωμα $\iint_{\mathbb{R}^2} h(x, y)\, dx\, dy$.

[Στα σημεία που η μικτή παράγωγος δεν υπάρχει, η h ορίζεται ίση με 0.]

(γ)* Να υπολογιστεί η πιθανότητα $\mathbf{P}(2Y \leqslant X \leqslant 1/3)$. Τι συμβαίνει;

4. Έστω $(U_n)_{n \geqslant 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών καθεμία με κατανομή ομοιόμορφη στο $(0, 1)$.

(α) Για $x \in (0, 1]$, έστω

$$N_x := \inf \left\{ n : \sum_{k=1}^{n} \sqrt{U_k} > x \right\}.$$

Να βρεθεί η $\mathbf{E}(N_x)$.

(β) Για $x \in (0, 1]$, έστω

$$M_x := \inf \left\{ n : \prod_{k=1}^{n} \sqrt{U_k} < x \right\}.$$

Να βρεθεί η $\mathbf{E}(M_x)$.

Σχόλια

3. (γ) Η ζητούμενη πιθανότητα είναι 1/27.