ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ Ι

Εξετάσεις Ιανουαρίου 2010- Ομάδα Α

Θ1. Από μία κάλπη που περιέχει 6 κόκκινα και 8 μπλε σφαιρίδια εξάγονται χωρίς επανατοποθέτηση 4 σφαιρίδια το ένα μετά το άλλο. Να βρεθεί η πιθανότητα όλα τα σφαιρίδια που επιλέχτηκαν να είναι του ίδιου χρώματος.

Θ2. Μία κάλπη περιέχει 5 νομίσματα από τα οποία τα 4 είναι αμερόληπτα και το 1 είναι κίβδηλο. Η πιθανότητα εμφάνισης της ένδειξης "κεφαλή" είναι 1/2 για κάθε αμερόληπτο νόμισμα και 4/5 για το κίβδηλο. Επιλέγουμε από την κάλπη ένα νόμισμα στην τύχη, και το ρίχνουμε τρεις φορές. Αν και οι τρεις ρίψεις φέρουν την ένδειξη "κεφαλή", ποια είναι η πιθανότητα το επιλεγμένο νόμισμα να είναι κίβδηλο;

Θ3. Η συνάρτηση πυκνότητας-πιθανότητας μίας τυχαίας μεταβλητής X είναι

$$f(x)=\begin{cases} c(3-x) & \text{αν } 0<x<3, \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Να βρεθούν: (*i*) η σταθερά c (*ii*) η συνάρτηση κατανομής της X (*iii*) η μέση τιμή και η διασπορά της X και (*iv*) η συνάρτηση πυκνότητας-πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής $Y=\log X$.

Θ4. Ένα σύστημα αποτελείται από n_1 εξαρτήματα τύπου Α και από n_2 εξαρτήματα τύπου Β που λειτουργούν ανεξάρτητα το ένα από το άλλο (με $n_1 \geq 2$, $n_2 \geq 4$). Η πιθανότητα λειτουργίας κάθε εξαρτήματος τύπου Α είναι p_1, ενώ η πιθανότητα λειτουργίας κάθε εξαρτήματος τύπου Β είναι p_2 (με $p_1, p_2 \in (0,1)$). Το σύστημα λειτουργεί όταν λειτουργούν ταυτόχρονα τουλάχιστον δύο εξαρτήματα τύπου Α και τουλάχιστον τέσσερα εξαρτήματα τύπου Β. Ποια είναι η πιθανότητα λειτουργίας του συστήματος;

Θ5. Πραγματοποιούμε μία ακολουθία ανεξάρτητων δοκιμών Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας p_1 σε καθεμία, και έστω N ο αριθμός των δοκιμών μέχρι την πρώτη επιτυχία. Στη συνέχεια πραγματοποιούμε N ανεξάρτητες δοκιμές Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας p_2 σε καθεμία, και έστω X ο αριθμός των επιτυχιών. Να υπολογισθεί η $P(X=1)$.

Θ6. (*α*) Έστω X,Y ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με διασπορές $0<V(X)<+\infty$ και $0<V(Y)<+\infty$. Να δείξετε ότι ο συντελεστής συσχέτισης μεταξύ των τυχαίων μεταβλητών $X+Y$ και $X-Y$ δίνεται από τη σχέση:

$$\rho\big(X+Y, X-Y\big)=\frac{V(X)-V(Y)}{V(X)+V(Y)}.$$

(*β*) Έστω X,Y τυχαίες μεταβλητές με $E(X)=E(Y)=0$, $E(X^2)=E(Y^2)=1$ και διασπορά του αθροίσματος τους $V(X+Y)=3$. Είναι οι X,Y ανεξάρτητες; Δικαιολογείστε την απάντησή σας.

Θ7. Έστω (X,Y) διδιάστατη τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας-πιθανότητας

$$f(x,y)=\begin{cases} c & \alpha\nu\ 0<x^3<y<x<1, \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Να βρεθούν: (*i*) η σταθερά c και (*ii*) οι περιθώριες συναρτήσεις πυκνότητας-πιθανότητας των X και Y.

Θ8. (*α*) Να βρεθεί η πιθανογεννήτρια της κατανομής Poisson με παράμετρο λ.
(*β*) Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_\nu$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές όπου η X_i ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο λ_i, $i=1, 2, \ldots, \nu$. Να βρεθεί η κατανομή του αθροίσματός τους.

Θ9. Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_{80}$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές όπου η καθεμία ακολουθεί τη διακριτή ομοιόμορφη κατανομή στο $\{1, 2, 3, 4\}$. Να βρεθεί προσεγγιστικά η πιθανότητα το άθροισμά τους να είναι στο $[190, 220]$ (δίνονται $\Phi(1)=0.8413$, $\Phi(1.5)=0.9332$, $\Phi(2)=0.9773$).

Να λυθούν όλα τα θέματα σε 2 ½ ώρες. Καλή επιτυχία.