

Πιθανότητες Ι
Εξέταση 26 Ιανουαρίου 2017

A

1. (20 Βαθμοί) Το δοχείο A_1 περιέχει 5 άσπρα και 10 μαύρα σφαιρίδια, ενώ το δοχείο A_2 περιέχει 12 άσπρα και 3 μαύρα σφαιρίδια. Επιλέγουμε ένα δοχείο στην τύχη και έπειτα εξάγουμε δύο σφαιρίδια χωρίς επανάθεση από το δοχείο που επιλέχτηκε. Βρείτε

(α) την πιθανότητα τα δύο σφαιρίδια να είναι άσπρα, και

(β) τη δεσμευμένη πιθανότητα να είχαμε επιλέξει το δοχείο A_1 δεδομένου ότι τα δύο σφαιρίδια είναι άσπρα.

2. (20 Βαθμοί) Έστω X και Y δύο τυχαίες μεταβλητές με πεπερασμένες ροπές δεύτερης τάξης για τις οποίες γνωρίζουμε ότι $\text{Var}(X + Y) = 1$ και $\text{Var}(X - Y) = 2$.

(α) Να υπολογίσετε την συνδιακύμανση $\text{Cov}(X, Y)$ των X, Y . Είναι οι X, Y ανεξάρτητες;

(β) Να αποδείξετε ότι $|\text{Var}(X) - \text{Var}(Y)| \leq \sqrt{2}$.

3. (25 Βαθμοί) (α) Δείξτε ότι η ροπογεννήτρια της $\Gamma(a, 1)$ δίνεται από τον τύπο $M(t) = (1 - t)^{-a}$, $t < 1$.

(β) Έστω X, X_1, \dots, X_n συνεχείς ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, καθεμία με πυκνότητα

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\pi}} e^{-\lambda x^2}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$$

όπου $\lambda > 0$ είναι σταθερά. Να βρεθεί η πυκνότητα και η μέση τιμή της $Y = \lambda X^2$. Ποια γνωστή κατανομή ακολουθεί η Y ;

(γ) Με χρήση ροπογεννητριών να δειχθεί ότι η τυχαία μεταβλητή $\lambda(X_1^2 + \dots + X_n^2)$ ακολουθεί την κατανομή $\Gamma(n/2, 1)$.

4. (20 Βαθμοί) Έστω διδιάστατη συνεχής τυχαία μεταβλητή (X, Y) με πυκνότητα

$$f(x, y) := \begin{cases} cxy & \text{αν } 0 < y < \sqrt{x} < 1, \\ 0 & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

(α) Να βρεθεί η σταθερά c .

(β) Να βρεθούν οι περιθώριες πυκνότητες f_X, f_Y .

(γ) Να βρεθεί η δεσμευμένη μέση τιμή $\mathbf{E}(X|Y = y)$ για $y \in (0, 1)$.

5. (20 Βαθμοί) Στην εξέταση για το μάθημα «Πιθανότητες Ι» προσήλθαν 300 φοιτητές. Οι χρόνοι βαθμολόγησης των γραπτών είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές καθεμία με μέση τιμή 5 λεπτά και διασπορά $4/3$ λεπτά². Να βρεθεί προσεγγιστικά η πιθανότητα ο συνολικός χρόνος βαθμολόγησης να είναι το πολύ 24 ώρες και 40 λεπτά.

Δίνονται $\Phi(0.5) = 0.6915, \Phi(1) = 0.8413, \Phi(1.5) = 0.9332, \Phi(2) = 0.9772$.

Άριστα είναι το 100. Η διάρκεια της εξέτασης είναι $2\frac{1}{2}$ ώρες.

Καλή επιτυχία!