

Πιθανότητες Ι
Εξέταση 22 Σεπτεμβρίου 2017

A

1. (15 Βαθμοί) Μια συλλογή από 100 ερωτήσεις πιθανοτήτων περιέχει 5 δύσκολες και 95 εύκολες ερωτήσεις. Για τη δημιουργία ενός τεστ, επιλέγουμε στην τύχη 13 από αυτές τις ερωτήσεις. Ποια η πιθανότητα το τεστ να περιέχει ακριβώς 2 δύσκολες ερωτήσεις;

2. (20 Βαθμοί) Μια κάλπη περιέχει 12 άσπρα και 8 μαύρα σφαιρίδια. Επιλέγουμε ένα σφαιρίδιο στην τύχη και έπειτα το επιστρέφουμε στην κάλπη μαζί με άλλα r του άλλου χρώματος. Έπειτα από την κάλπη επιλέγουμε ένα σφαιρίδιο.

(α) Να υπολογιστεί η πιθανότητα το δεύτερο σφαιρίδιο που επιλέγουμε να είναι άσπρο.

(β) Αν το δεύτερο σφαιρίδιο που επιλέξαμε ήταν άσπρο, να βρεθεί η πιθανότητα το πρώτο σφαιρίδιο να ήταν μαύρο. Πού τείνει αυτή η πιθανότητα καθώς $r \rightarrow \infty$. Εξηγήστε διαισθητικά γιατί το όριο έχει αυτή την τιμή.

3. (15 Βαθμοί) Έστω X τυχαία μεταβλητή με πυκνότητα $f_X(x) = \frac{3}{x^4} \mathbf{1}_{x \in (1, \infty)}$. Να βρεθεί η πυκνότητα της τυχαίας μεταβλητής $Y := \log X$. Ποια κατανομή ακολουθεί η Y ;

4. (20 Βαθμοί) Έστω ότι οι τυχαίες μεταβλητές X, Y είναι ανεξάρτητες και καθεμία ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο $(0, 1)$. Θέτουμε $(U, V) = (X, X/Y)$.

(α) Ποια είναι η απο κοινού πυκνότητα του ζεύγους (U, V) ; Σε ποιο σύνολο είναι θετική;

(β) Ποια είναι η πυκνότητα της τυχαίας μεταβλητής X/Y ;

5. (20 Βαθμοί) Η τυχαία μεταβλητή X έχει ροπογεννήτρια

$$M_X(t) := E(e^{tX}) = \frac{1}{3}e^{2(e^t-1)} + ce^{5(e^t-1)}$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}$, όπου c είναι μία σταθερά. Να υπολογιστούν:

(α) Η τιμή του c .

(β) Οι $E(X), V(X)$.

(γ) Η ροπογεννήτρια της $2X + 1$.

6. (20 Βαθμοί) Το σφάλμα μέτρησης, X , ενός οργάνου έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x) = \begin{cases} cx^2, & -1 < x < 1, \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

(α) Να υπολογίσετε την σταθερά c , την μέση τιμή και την διασπορά της X .

(β) Ποια είναι κατά προσέγγιση η πιθανότητα το σφάλμα μέτρησης για το άθροισμα 1500 ανεξάρτητων μετρήσεων να είναι κατ' απόλυτη τιμή μικρότερο του 15;

Δίνονται $\Phi(0.5) = 0.6915, \Phi(1) = 0.8413, \Phi(1.5) = 0.9332, \Phi(2) = 0.9772$.

Άριστα είναι το 100. Η διάρκεια της εξέτασης είναι $2\frac{1}{2}$ ώρες.

Καλή επιτυχία!

Σχόλια

1.

$$\frac{\binom{5}{2}\binom{95}{11}}{\binom{100}{13}}$$

2.

(α) Θεώρημα ολικής πιθανότητας.

$$\frac{12}{20} \times \frac{12}{20+r} + \frac{8}{20} \times \frac{12+r}{20+r} = \frac{12 \times 20 + 8r}{20(20+r)}$$

(β) Θεώρημα Bayes.

$$\frac{8(12+r)}{8r + 12 \times 20}$$

Έχει όριο 1 για $r \rightarrow \infty$

3. $X \sim \text{Exp}(3)$.

5. $M_X(0) = 1 \Rightarrow c = 2/3$.

6. (α) $c = 3/2$, $\mathbf{E}(X) = 0$, $\text{Var}(X) = 3/5$.