Πιθανότητες Ι
Τελική Εξέταση. 8 Φεβρουαρίου 2013
Ομάδα Α

Θέμα 1.[20 Βαθμοί] Σε μιά πόλη 20 ατόμων $a_1, a_2, \ldots, a_{20}$, τα $a_1, a_2, \ldots, a_8$ είναι άνδρες και τα υπόλοιπα 12 είναι γυναίκες. Ο a_1 επιλέγει τυχαία μία γυναίκα από τις 12 και της λέει μια φημολογία. Έπειτα εκείνη επιλέγει τυχαία έναν άνδρα από τους 8 και κάνει το ίδιο, και η διαδικασία συνεχίζεται όμοια. Δηλαδή κάθε άτομο που ακούει την φημολογία επιλέγει στην τύχη ένα άτομο του αντίθετου φύλου και του την μεταφέρει. Να βρεθεί η πιθανότητα η φημολογία να ειπωθεί 5 φορές χωρίς να ακουστεί ξανά από κάποιο άτομο που την έχει μεταφέρει σε κάποιο προηγούμενο βήμα.

Θέμα 2.[20 Βαθμοί] Ένα κουτί περιέχει $n \geq 2$ διακεκριμένους λαχνούς αριθμημένους από το 1 μέχρι το n. Ένας λαχνός επιλέγεται στην τύχη και στη συνέχεια ρίχνουμε ένα τίμιο ζάρι τόσες ανεξάρτητες φορές όσες ήταν η ένδειξη του λαχνού που επιλέχθηκε. Ποια είναι η πιθανότητα εμφάνισης και των δύο ενδείξεων 3 και 5 από τουλάχιστον μία φορά η καθεμιά;

Θέμα 3.[20 Βαθμοί] Η (συνεχής) τυχαία μεταβλητή X έχει πυκνότητα που δίνεται από τον τύπο

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{8}x^2 & \text{αν } x \in (0,2), \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Θέτουμε $Y = X^2$. Να βρεθούν:

(α) Η πυκνότητα της Y.

(β) Η συνδιακύμανση, $\mathrm{C}(X,Y) = \mathrm{Cov}(X,Y)$, των X και Y.

Θέμα 4.[20 Βαθμοί] Έστω διδιάστατη συνεχής τυχαία μεταβλητή (X,Y) με συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{3(3-x)} & \text{αν } 0 < x < y < 3, \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Να βρεθούν οι περιθώριες συναρτήσεις πυκνότητας των X και Y. Είναι οι X, Y ανεξάρτητες;

Θέμα 5.[10 Βαθμοί] Έστω X_1, X_2 ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με $X_1 \sim \Gamma(a_1, \lambda_1), X_2 \sim \Gamma(a_2, \lambda_2)$ με $a_1, a_2, \lambda_1, \lambda_2 > 0$ και $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Να δειχθεί ότι δεν υπάρχουν $a, \lambda > 0$ ώστε το άθροισμα $X_1 + X_2$ να ακολουθεί την κατανομή $\Gamma(a, \lambda)$.

Δίνεται ότι μία $X \sim \Gamma(a, \lambda)$ (με $a, \lambda > 0$) έχει πυκνότητα f_X και ροπογεννήτρια M_X που δίνονται από τις σχέσεις

$$f_X(x) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)}\, x^{a-1} e^{-\lambda x}\, \mathbf{1}_{x>0}, \qquad M_X(t) = \mathbf{E}(e^{tX}) = \begin{cases} \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^a & \text{αν } t < \lambda, \\ \infty & \text{αν } t \geq \lambda. \end{cases}$$

Θέμα 6.[20 Βαθμοί] Ένα καζίνο προσφέρει το ακόλουθο τυχερό παιγνίδι: ο παίκτης ρίχνει μία φορά ένα τίμιο ζάρι. Αν η ένδειξη του ζαριού είναι 2 ή 4, τότε ο παίκτης κερδίζει 3 ευρώ από το καζίνο, αν είναι 1 ή 3 ή 5, τότε ο παίκτης χάνει 4 ευρώ υπέρ του καζίνο, και αν είναι 6, τότε ο παίκτης δεν κερδίζει ούτε χάνει. Αν παίξουν 90 παίκτες το παραπάνω παιγνίδι (ανεξάρτητα μεταξύ τους), να βρεθεί προσεγγιστικά η πιθανότητα το καζίνο να κερδίσει συνολικά τουλάχιστον 30 ευρώ.

Για την συνάρτηση κατανομής της τυπικής κανονικής $N(0,1)$ ισχύει: $\Phi(0.5) = 0.691, \Phi(1) = 0.841, \Phi(2) = 0.977$

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

Απαντήσεις

1. Χρησιμοποιούμε την πολλαπλασιαστική αρχή για να βρούμε τον αριθμό ευνοϊκών και δυνατών περιπτώσεων. Η ζητούμενη πιθανότητα είναι.

$$\frac{12 \cdot 8 \cdot 11 \cdot 7 \cdot 10}{12 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 8 \cdot 12}$$

2. Είναι πείραμα σε δύο στάδια. Άρα χρησιμοποιούμε το θεώρημα ολικής πιθανότητας. Έστω B το ενδεχόμενο της εμφάνισης και των δύο ενδείξεων 3 και 5 τουλάχιστον μία φορά το καθένα, και A_i το ενδεχόμενο ο λαχνός να έχει τον αριθμό i, όπου $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Έστω επίσης Γ_i (αντίστοιχα Δ_i) το ενδεχόμενο σε i ρίψεις ενός ζαριού να έρχεται η ένδειξη 3 (η ένδειξη 5 αντίστοιχα) τουλάχιστον μία φορά.

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B \mid A_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} P(B \mid A_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} P(\Gamma_i \cap \Delta_i)$$

Τώρα με την αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού υπολογίζουμε

$$P(\Gamma_i \cap \Delta_i) = 1 - P(\Gamma_i^c \cup \Delta_i^c) = 1 - P(\Gamma_i^c) - P(\Delta_i^c) + P(\Gamma_i^c \cap \Delta_i^c) = 1 - \frac{5^i}{6^i} - \frac{5^i}{6^i} + \frac{4^i}{6^i}.$$

5. Για κάθε $t \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$M_{X_1}(t)M_{X_2}(t) = M_{X_1+X_2}(t).$$

Αν υπάρχουν τέτοια a, λ, τότε επειδή το αριστερό μέλος είναι πεπερασμένο ακριβώς για $t < \min\{\lambda_1, \lambda_2\}$ ενώ το δεξί για $t < \lambda$ έπεται ότι $\lambda = \min\{\lambda_1, \lambda_2\}$. Ας υποθέσουμε ότι $\lambda_1 < \lambda_2$. Οπότε $\lambda = \lambda_1$, και η πιο πάνω ισότητα δίνει

$$\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_2 - t}\right)^{a_2} = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^{a - a_1}$$

για κάθε $t < \lambda_1 = \lambda$. Ισχύει $a \neq a_1$, γιατί διαφορετικά το αριστερό μέλος θα ήταν σταθερή συνάρτηση, κάτι που δεν ισχύει. Παίρνουμε $t \to \lambda^-$ στην τελευταία ισότητα. Το αριστερό μέλος τείνει σε πεπερασμένο θετικό αριθμό γιατί $\lambda < \lambda_2$ ενώ το δεξί τείνει στο 0 (αν $a < a_1$) ή στο ∞ (αν $a > a_1$). Άτοπο.