Πιθανότητες Ι A

Εξέταση 13 Σεπτεμβρίου 2019

1. (10 Βαθμοί) Δυο φίλοι επιλέγουν ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλο μια πεντάδα αριθμών από το 1 ως το 45. Ποια είναι η πιθανότητα οι δυο πεντάδες να μην έχουν κοινό αριθμό;

2. (10 Βαθμοί) Έστω A, B ενδεχόμενα σε έναν χώρο πιθανότητας για τα οποία γνωρίζουμε ότι $\mathbf{P}(A \cup B) = 0.9$ και $\mathbf{P}(A) = 0.5$.
(α) Ποια είναι η τιμή της $\mathbf{P}(B)$ αν γνωρίζουμε ότι $\mathbf{P}(A \cap B) = 0$;
(β) Ποια είναι η τιμή της $\mathbf{P}(B)$ αν γνωρίζουμε ότι τα A, B είναι ανεξάρτητα;

3. (10 Βαθμοί) Η δευτέρα λυκείου ενός συγκεκριμένου σχολείου έχει τρία τμήματα Β1, Β2, Β3 με 30, 40, και 50 μαθητές αντίστοιχα. Ένας μαθητής θα επιλεγεί τυχαία και θα σταλεί σε ένα εκπαιδευτικό ταξίδι. Για την επιλογή, προτείνονται δύο διαδικασίες.
I: Επιλέγουμε στην τύχη ένα τμήμα και μετά, από αυτό το τμήμα, επιλέγουμε στην τύχη έναν μαθητή.
II: Επιλέγουμε στην τύχη έναν μαθητή από τη λίστα των 120 μαθητών.
Αν στόχος του κάθε μαθητή είναι να επιλεγεί, ποια διαδικασία προτιμούν οι μαθητές του τμήματος Β1, ποια του Β2, και ποια του Β3;

4. (25 Βαθμοί) Αν X είναι τυχαία μεταβλητή με τιμές στο $\mathbb{N}$ και συνάρτηση πιθανότητας f_X ώστε $f_X(0) < 1$, θεωρούμε μια τυχαία μεταβλητή X^* με συνάρτηση πιθανότητας $f_{X^*}(k) = ckf_X(k)\mathbf{1}_{k\in\mathbb{N}}$ για κάθε $k \in \mathbb{R}$ όπου c είναι κατάλληλη σταθερά.
(α) Αν η X έχει πιθανογεννήτρια $P_X(t) := \mathbf{E}(t^X) = t/(2-t)^2$ για κάθε $t \in (-2, 2)$, να υπολογιστεί η σταθερά c.
(β) Αν δίνεται η $P_X(t)$ για κάθε $t \in (-1, 1)$ και ισχύει ότι $\mathbf{E}(X) \in (0, \infty)$, να υπολογιστεί η $P_{X^*}(t)$ για κάθε $t \in (-1, 1)$.
(γ) Αν η X ακολουθεί την κατανομή Poisson(λ), όπου $\lambda > 0$ σταθερά, να δειχθεί ότι η X^* έχει την ίδια κατανομή με την $X + 1$.

5. (20 Βαθμοί) Έστω (X, Y) διδιάστατη συνεχής τ.μ. με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 6xy & \text{αν } 0 < x < 1, \text{ και } 0 < y < \sqrt{x}, \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

(α) Να υπολογιστούν οι περιθώριες συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας f_X και f_Y των X και Y.
(β) Είναι οι X και Y είναι ανεξάρτητες;
(γ) Για $0 < x < 1$, να υπολογιστούν η δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_{Y|X}(y|x)$ της Y δοθέντος $X = x$ και η μέση τιμή $\mathbf{E}[Y|X = x]$.
(δ) Να υπολογιστεί η μέση τιμή $\mathbf{E}(XY)$.

6. (25 Βαθμοί) Από μια κάλπη που περιέχει 30 αριθμημένα σφαιρίδια με αριθμούς από το 1 έως το 30, επίλέγουμε τυχαία ένα σφαιρίδιο και έστω W ο αριθμός του. Από μια νέα κάλπη με 6 αριθμημένα σφαιρίδια με αριθμούς από το 1 έως το 6, επιλέγουμε W σφαιρίδια με επανάθεση, όσες φορές δηλαδή δείχνει ο αριθμός του σφαιριδίου που επιλέχθηκε από τη πρώτη κάλπη. Έστω τώρα Y το πλήθος των φορών που επιλέχθηκε το σφαιρίδιο με τον αριθμό 2 κατά την εξαγωγή των σφαιριδίων από τη δεύτερη κάλπη. Να υπολογιστούν:
(α) Η πιθανότητα $\mathbf{P}(W = w, Y = y)$ όπου $w = 1, 2, ..., 30$ και $y = 0, 1, 2, ..., w$.
(β) Η πιθανότητα $\mathbf{P}(Y = 0)$.
(γ) Η δεσμευμένη πιθανότητα $\mathbf{P}(W = w|Y = 0)$, όπου $w = 1, 2, ..., 30$.
(δ) Η δεσμευμένη μέση τιμή $\mathbf{E}(Y|W = w)$, όπου $w = 1, 2, ..., 30$.
(ε) Η μέση τιμή $\mathbf{E}(Y)$.

7. (15 Βαθμοί) Ένα Πανεπιστήμιο θα ήθελε να πάρει 1050 πρωτοετείς φοιτητές για το νέο ακαδημαϊκό έτος και σε κάθε περίπτωση δεν μπορεί να δεχθεί περισσότερους από 1060 πρωτοετείς φοιτητές. Ας υποθέσουμε ότι κάθε υποψήφιος, ανεξάρτητα από τους υπόλοιπους, εφόσον η αίτησή του γίνει δεκτή και του γίνει προσφορά εγγραφής, την αποδέχεται με πιθανότητα 0.6. Αν το Πανεπιστήμιο τελικά κάνει 1700 προσφορές, ποια είναι η πιθανότητα ο αριθμός των φοιτητών που θα τις αποδεχθούν να είναι μεγαλύτερος από τον αριθμό των θέσεων που διαθέτει το Πανεπιστήμιο; [Δίνονται: $\Phi(1) = 0.841, \Phi(1.5) = 0.933, \Phi(2) = 0.977$. Αν χρειαστεί, χρησιμοποιήστε την προσέγγιση $17 \cdot 24 \approx 400$]

Άριστα είναι το 100. Η διάρκεια της εξέτασης είναι $2\frac{1}{2}$ ώρες. **Καλή επιτυχία!**

Μερικές απαντήσεις

1.

$$\frac{\binom{45}{5}\binom{40}{5}}{\binom{45}{5}^2}$$

4. Η $\sum_{k=0}^{\infty} f_{X^*}(k) = 1$ δίνει ότι $c = 1/\mathbf{E}(X)$.
(α) Κατά τα γνωστά, $\mathbf{E}(X) = P'_X(1-) = ... = 3$. Άρα $c = 1/3$.
(β) Για $|t| < 1$,

$$P_{X^*}(t) = \mathbf{E}(t^{X^*}) = \sum_{k=0}^{\infty} ckf_X(k)t^k = c\mathbf{E}(Xt^X) = \frac{tP'_X(t)}{\mathbf{E}(X)} = \frac{tP'_X(t)}{P'_X(1-)}.$$

(γ) Έχουμε $c = 1/\mathbf{E}(X) = 1/\lambda$. Έπειτα, για $k \in \mathbb{N}^+$ ισχύει

$$\mathbf{P}(X^* = k) = \frac{1}{\lambda}ke^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \mathbf{P}(X = k-1) = \mathbf{P}(X+1 = k)$$

ενώ για όλα τα άλλα $k \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}^+$, προφανώς $\mathbf{P}(X^* = k) = 0 = \mathbf{P}(X+1 = k)$. Άρα οι $X^*, X+1$ έχουν την ίδια κατανομή.