A

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ Ι, ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 2011

Θέμα 1.(20 Βαθμοί) Ρίχνουμε ένα συνηθισμένο ζάρι n διαδοχικές φορές, $n \geq 3$. Να βρεθούν:

(α) Η πιθανότητα να εμφανιστεί η ένδειξη «1» (τουλάχιστον μία φορά).

(β) Η πιθανότητα να υπάρχουν τουλάχιστον δύο ίδιες διαδοχικές ενδείξεις.

(γ) Η πιθανότητα να εμφανιστούν και οι τρεις ενδείξεις «1», «2» και «3» από τουλάχιστον μία φορά η καθεμία.

Θέμα 2.(20 Βαθμοί) Διαθέτουμε δύο φαινομενικά όμοια νομίσματα, πλην όμως, το ένα φέρνει «Κ» με πιθανότητα $p_1 = 3/4$ (κίβδηλο) ενώ το άλλο με πιθανότητα $p_2 = 1/2$ (δίκαιο). Διαλέγουμε ένα νόμισμα στην τύχη, και το ρίχνουμε δύο ανεξάρτητες φορές.

(α) Ποια η πιθανότητα να φέρουμε και τις δύο φορές «Κ»;

(β) Αν και στις δύο δοκιμές έχει εμφανιστεί «Κ», ποια είναι η πιθανότητα να είχαμε διαλέξει το δίκαιο νόμισμα;

Θέμα 3.(30 Βαθμοί) Η (συνεχής) τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $(1, 2)$. Θέτουμε $Y = 1/X$. Να βρεθούν:

(α) Η μέση τιμή και η διασπορά της Y.

(β) Η συνάρτηση κατανομής και η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της Y.

(γ) Η συνδιακύμανση, $\mathrm{C}(X, Y) = \mathrm{Cov}(X, Y)$, των X και Y, και η διασπορά της τυχαίας μεταβλητής $X + Y = X + 1/X$.

Θέμα 4.(30 Βαθμοί) (α) Έστω $\rho \geq 0$ και $a > 0$. Να υπολογίσετε τη ροπογεννήτρια $M_X(t) = \mathrm{E}(e^{tX})$ της (συνεχούς) τυχαίας μεταβλητής X με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(a)}(x - \rho)^{a-1} e^{-(x-\rho)}, \quad x > \rho.$$

(β) Χρησιμοποιώντας τη ροπογεννήτρια που βρήκατε στο Ερώτημα (α), να προσδιορίσετε την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της $Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$, όταν οι $X_1, X_2, \ldots, X_n$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες, καθεμία με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας όπως στο Ερώτημα (α).

Θέμα 5.(20 Βαθμοί) (α) Να βρεθεί η μέση τιμή και η διασπορά της τυχαίας μεταβλητής X με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{αν } 0 < x \leq 1, \\ 2 - x & \text{αν } 1 \leq x < 2, \\ 0 & \text{αν } x \in \mathbb{R} \setminus (0, 2). \end{cases}$$

[**Σημείωση:** Για να διευκολυνθείτε στις πράξεις, μπορείτε να χρησιμοποιήσετε, χωρίς απόδειξη, το γεγονός ότι η παραπάνω τυχαία μεταβλητή X έχει την ίδια κατανομή με την τυχαία μεταβλητή $U + V$, όπου οι U, V είναι ανεξάρτητες, καθεμία με ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $(0, 1)$.]

(β) Να βρείτε κατά προσέγγιση την πιθανότητα όπως το άθροισμα 150 ανεξαρτήτων και ισονόμων τυχαίων μεταβλητών, καθεμία με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας όπως στο Ερώτημα (α), δεν υπερβαίνει τον αριθμό 145.

Τιμές από τον Πίνακα της Τυποποιημένης Κανονικής, $N(0, 1)$**:**

$$\Phi(0.5) = 0.6915, \quad \Phi(1) = 0.8413, \quad \Phi(1.5) = 0.9332,$$
$$\Phi(2) = 0.9773, \quad \Phi(2.5) = 0.9938, \quad \Phi(3) = 0.9987$$

Άριστα είναι το 100. Διάρκεια $2\frac{1}{2}$ ώρες. ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

ΛΥΣΕΙΣ

Θέμα 1 (α)

$$P(\text{εμφανίζεται το 1 τουλάχιστον μία φορά}) = 1 - P(\text{δεν εμφανίζεται το 1}) = 1 - \frac{5^n}{6^n}.$$

(β)

$$\begin{aligned} &P(\text{υπάρχουν τουλάχιστον δύο ίδιες διαδοχικές ενδείξεις}) \\ &\qquad = 1 - P(\text{δεν υπάρχουν ίδιες διαδοχικές ενδείξεις}) = 1 - \frac{6 \times 5^{n-1}}{6^n} = 1 - \frac{5^{n-1}}{6^{n-1}}. \end{aligned}$$

Στην τελευταία πιθανότητα, οι ευνοϊκές επιλογές για την πρώτη ρίψη είναι 6, ενώ για καθεμία από τις επόμενες είναι 5, γιατί καθεμία πρέπει να είναι διαφορετική απο την προηγούμενη της.

(γ) Θεωρούμε τα ενδεχόμενα $A_i := \{\text{εμφανίζεται η ένδειξη } i \text{ τουλάχιστον μία φορά}\}$ με $i = 1, 2, 3$, περνάμε στο συμπληρωματικό ενδεχόμενο, και εφαρμόζουμε την αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού.

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) &= 1 - P(A_1' \cup A_2' \cup A_3') \\ &= 1 - \sum_{i=1}^{3} P(A_i') + \sum_{1 \le i < j \le 3} P(A_i' \cap A_j') - \sum_{1 \le i < j < k \le 3} P(A_i' \cap A_j' \cap A_k') \\ &= 1 - 3P(A_1') + 3P(A_1' \cap A_2') - P(A_1' \cap A_2' \cap A_3') \\ &= 1 - 3\left(\frac{5}{6}\right)^n + 3\left(\frac{4}{6}\right)^n - \left(\frac{3}{6}\right)^n. \end{aligned}$$

Θέμα 2 (α) Θεωρούμε τα ενδεχόμενα

$$\begin{aligned} A_1 &: = \{\text{επιλέγω το δίκαιο νόμισμα}\}, \\ A_2 &: = \{\text{επιλέγω το κίβδηλο νόμισμα}\}, \\ B &: = \{\text{οι δύο ρίψεις φέρνουν «Κ»}\}. \end{aligned}$$

Τότε

$$P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{13}{32}.$$

(β) [Το ερώτημα αυτό είναι τυπική εφαρμογή του τύπου του Bayes.] Χρησιμοποιούμε το αποτέλεσμα του ερωτήματος (α).

$$P(A_1|B) = \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(B)} = \frac{1/8}{13/32} = \frac{4}{13}$$

Θέμα 3 (α) Η πυκνότητα της X είναι $f(x) = \mathbf{1}_{x \in (1,2)}$. Άρα $E(Y) = \int_1^2 1/x\, dx = \log 2$, $E(Y^2) = \int_1^2 1/x^2\, dx = 1/2$, και $V(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = 1/2 - (\log 2)^2$.

(β) Για $y \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση κατανομής είναι $F_Y(y) = P(1/X \le y)$ που προφανώς ισούται με 0 για $y \le 1/2$, και με 1 για $y \ge 1$ γιατί $P(X \in (1,2)) = 1$. Για $y \in (1/2, 1)$ έχουμε $1/y \in (1,2)$, και άρα

$$F_Y(y) = P(1/X \le y) = P(X \ge 1/y) = 2 - (1/y).$$

Η F_Y είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο στο συμπλήρωμα ενός πεπερασμένου συνόλου, συγκεκριμένα στο $\mathbb{R} \setminus \{1/2, 1\}$. Έπεται με παραγώγιση απο τα πιο πάνω ότι μια πυκνότητα για την κατανομή της Y είναι η $f_Y(y) = y^{-2}\mathbf{1}_{y \in (1/2,1)}$.

(γ) $C(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 1 - (3/2)\log 2$. Και

$$\begin{aligned} V(X+Y) &= V(X) + V(Y) + 2C(X,Y) \\ &= \frac{(2-1)^2}{12} + \frac{1}{2} - (\log 2)^2 + 2\left(1 - \frac{3}{2}\log 2\right) = \frac{31}{12} - (\log 2)^2 - 3\log 2. \end{aligned}$$

Θέμα 4 (α) Για $t \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\begin{aligned} M_X(t) =& \frac{1}{\Gamma(a)} \int_\rho^\infty e^{tx}(x-\rho)^{a-1} e^{-(x-\rho)}\,dx \overset{y=x-\rho}{=} \frac{e^{t\rho}}{\Gamma(a)} \int_0^\infty e^{ty} y^{a-1} e^{-y}\,dy \\ =& \frac{e^{t\rho}}{\Gamma(a)} \int_0^\infty y^{a-1} e^{-y(1-t)}\,dy. \end{aligned}$$

Προκύπτει απο την τελευταία έκφραση ότι $M(t) = \infty$ ακριβώς για $t \ge 1$. Ενώ για $t < 1$ έχουμε

$$M_X(t) = \frac{e^{t\rho}}{\Gamma(a)} \int_0^\infty y^{a-1} e^{-y(1-t)}\,dy \overset{z=y(1-t)}{=} \frac{e^{t\rho}}{\Gamma(a)} \frac{\Gamma(a)}{(1-t)^a} = \frac{e^{t\rho}}{(1-t)^a}.$$

(β) Επειδή οι X_i είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, η ροπογεννήτρια του αθροίσματος τους ισούται με

$$M_Y(t) = M_{X_1}(t) M_{X_2}(t) \cdots M_{X_n}(t)$$

το οποίο ισούται με ∞ ακριβώς για $t \ge 1$, ενώ για $t < 1$ ισούται με

$$\frac{e^{t\rho n}}{(1-t)^{an}}.$$

Επίσης, η κατανομή με πυκνότητα όπως στο (α) με παραμέτρους $na, n\rho$ αντί των a, ρ έχει ακριβώς την ίδια ροπογεννήτρια, και αυτή η ταυτότητα των ροπογεννητριών ισχύει σε μια περιοχή του 0. Έπεται ότι η πυκνότητα της Y είναι η

$$f_Y(y) = \frac{1}{\Gamma(na)} (y - n\rho)^{na-1} e^{-(y-n\rho)} \mathbf{1}_{y > n\rho}.$$

Θέμα 5 (α) Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $X = U + V$ όπου οι U, V είναι ανεξάρτητες με ομοιόμορφη κατανομή στο $(0,1)$. Άρα $E(X) = E(U) + E(V) = 1/2 + 1/2 = 1$, και λόγω ανεξαρτησίας έχουμε $V(X) = V(U) + V(V) = 1/12 + 1/12 = 1/6$.

(β) Έστω $(X_i)_{i \ge 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών, καθεμία με κατανομή που έχει πυκνότητα όπως στο (α). Για κάθε $n \ge 1$, θέτουμε $S_n := X_1 + \cdots + X_n$. Επειδή $E(X_1) = 1$ και $V(X_1) = 1/6 < \infty$, το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα δίνει ότι για μεγάλο n, η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής

$$\frac{S_n - n}{\sqrt{n/6}}$$

είναι προσεγγιστικά η τυπική κανονική, $N(0,1)$. Άρα

$$P(S_{150} \le 145) = P\left(\frac{S_{150} - 150}{\sqrt{150/6}} \le -1\right) \approx \Phi(-1) = 1 - \Phi(1) = 0.1587$$