A

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ Ι, ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2011

Θέμα 1.(20 Βαθμοί) Ρίχνουμε ένα συνηθισμένο ζάρι n φορές ($n \geq 2$). Να βρείτε:

(α) την πιθανότητα να εμφανιστεί τουλάχιστον δύο φορές ο αριθμός 6 και

(β) την πιθανότητα να εμφανιστεί τουλάχιστον δύο φορές ο αριθμός 6 και να μην εμφανιστεί καθόλου ο αριθμός 1.

Θέμα 2.(20 Βαθμοί) Μιά κάλπη περιέχει 10 σφαιρίδια από τα οποία τα 4 είναι μαύρα και τα 6 είναι άσπρα. Επιλέγουμε ένα στην τύχη, το επιστρέφουμε στην κάλπη, και προσθέτουμε άλλα 990 που έχουν το ίδιο χρώμα με αυτό που επιλέξαμε. Έπειτα επιλέγουμε ένα σφαιρίδιο από την κάλπη (με την νέα σύνθεση πλέον).

(α) Ποια η πιθανότητα το σφαιρίδιο που επιλέγουμε στο τέλος να είναι μαύρο;

(β) Αν το σφαιρίδιο που επιλέγουμε στο τέλος είναι μαύρο, ποιά είναι η πιθανότητα το σφαιρίδιο που επιλέξαμε αρχικά να είναι άσπρο;

Θέμα 3.(25 Βαθμοί) Η (συνεχής) τυχαία μεταβλητή X έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας που δίνεται από τον τύπο

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{7}x^2, & x \in (1,2), \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Θέτουμε $Y = X^2$. Να βρεθούν:

(α) Η μέση τιμή της Y.

(β) Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της Y.

(γ) Η συνδιακύμανση, $\mathrm{C}(X,Y) = \mathrm{Cov}(X,Y)$, των X και Y.

Θέμα 4.(25 Βαθμοί) Έστω X διακριτή τυχαία μεταβλητή με μη αρνητικές ακέραιες τιμές και πιθανογεννήτρια

$$P_X(t) := E(t^X) = \frac{2}{3}e^{2(t-1)} + ce^{5(t-1)}$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}$, όπου c είναι μια σταθερά. Να υπολογιστούν:

(α) Η τιμή του c.

(β) Οι $E(X), V(X)$.

(γ) Η πιθανογεννήτρια της $2X$.

Θέμα 5.(25 Βαθμοί) (α) Έστω X μία τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x) = \begin{cases} |x| & \text{αν } x \in (-1,1), \\ 0 & \text{αν } x \in \mathbb{R} \setminus (-1,1). \end{cases}$$

Να υπολογιστούν οι ροπές $E(X^k)$ για $k \in \mathbb{N}$, και να δειχθεί ότι $V(X^2) = \frac{1}{12}$.

(β) Έστω $(X_n)_{n \geq 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών καθεμία με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας όπως στο Ερώτημα (α). Θέτουμε $T = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_{1200}^2$. Να υπολογιστεί προσεγγιστικά η πιθανότητα $P(T \in (575, 615))$.

Τιμές από τον Πίνακα της Τυποποιημένης Κανονικής, $N(0,1)$**:**

$\Phi(0.5) = 0.6915$, $\Phi(1) = 0.8413$, $\Phi(1.5) = 0.9332$,
$\Phi(2) = 0.9773$, $\Phi(2.5) = 0.9938$, $\Phi(3) = 0.9987$.

Άριστα είναι το 100. Διάρκεια $2\frac{1}{2}$ ώρες. **ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!**

ΛΥΣΕΙΣ

Θέμα 1 (α) Έστω X = πλήθος εμφανίσεων του 6 στις n ρίψεις. Η X ακολουθεί την διωνυμική κατανομή με παραμέτρους n και $p = 1/6$. Έχουμε

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n - n\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}.$$

(β) Θεωρούμε τα ενδεχόμενα

$$\begin{aligned} A &:= \{\text{δεν εμφανίζεται καθόλου ο αριθμός } 1\}, \\ B &:= \{\text{εμφανίζεται τουλάχιστον 2 φορές ο αριθμός } 6\} = \{X \geq 2\}. \end{aligned}$$

Τότε $P(A \cap B) = P(A) - P(A \cap B^c)$, $P(A) = (5/6)^n$, και

$$P(A \cap B^c) = P(A \cap \{X < 2\}) = P(A \cap \{X = 0\}) + P(A \cap \{X = 1\}) = \left(\frac{4}{6}\right)^n + n\frac{1}{6}\left(\frac{4}{6}\right)^{n-1}.$$

Ο τελευταίος όρος προκύπτει γιατί έχουμε n επιλογές για την ρίψη κατά την οποία θα εμφανιστεί η μοναδική ένδειξη 6, έπειτα έχουμε την πιθανότητα $1/6$ να εμφανιστεί το 6 στην συγκεκριμένη ρίψη, και τέλος το $(4/6)^{n-1}$ που είναι η πιθανότητα στις υπόλοιπες ρίψεις να μην εμφανιστεί το 1 ή το 6.

Θέμα 2 (α) Θεωρούμε τα ενδεχόμενα

$$\begin{aligned} A_1 &:= \{\text{το σφαιρίδιο που επιλέγουμε αρχικά είναι άσπρο}\}, \\ A_2 &:= \{\text{το σφαιρίδιο που επιλέγουμε αρχικά είναι μαύρο}\}, \\ B &:= \{\text{το σφαιρίδιο που επιλέγουμε στο τέλος είναι μαύρο}\}. \end{aligned}$$

Τότε

$$P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) = \frac{6}{10} \times \frac{4}{1000} + \frac{4}{10} \times \frac{994}{1000} = \frac{4}{10}.$$

(β) [Το ερώτημα αυτό είναι τυπική εφαρμογή του τύπου του Bayes.] Χρησιμοποιούμε το αποτέλεσμα του ερωτήματος (α).

$$P(A_1|B) = \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(B)} = \frac{\frac{6}{10} \times \frac{4}{1000}}{\frac{4}{10}} = \frac{6}{1000}.$$

Είναι λογικό το ότι αυτή η πιθανότητα είναι πολύ μικρή.

Θέμα 3 (α)

$$E(Y) = E(X^2) = \int_{\mathbb{R}} x^2 f(x)\, dx = \frac{3}{7}\int_1^2 x^4\, dx = \frac{3}{35}(2^5 - 1).$$

(β) Για $y \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση κατανομής είναι $F_Y(y) = P(X^2 \leq y)$ που προφανώς ισούται με 0 για $y \leq 1$, και με 1 για $y \geq 4$ γιατί $P(X \in (1,2)) = 1$. Για $y \in (1,4)$ έχουμε $\sqrt{y} \in (1,2)$, και άρα, χρησιμοποιώντας το ότι η X παίρνει μόνο θετικές τιμές, παίρνουμε

$$F_Y(y) = P(X \leq \sqrt{y}) = F_X(\sqrt{y}).$$

Η παράγωγος της τελευταίας συνάρτησης στο $(1,4)$ είναι

$$f_X(\sqrt{y})\frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{3}{14}\sqrt{y}.$$

Η F_Y είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ (αφού και η F_X είναι συνεχής) και παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο στο συμπλήρωμα ενός πεπερασμένου συνόλου, συγκεκριμένα στο $\mathbb{R} \setminus \{1, 4\}$. Έπεται απο τα πιο πάνω ότι μια πυκνότητα για την κατανομή της Y είναι η

$$f_Y(y) = \frac{3}{14}\sqrt{y}\ \mathbf{1}_{y\in(1,4)}.$$

(γ) $C(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = E(X^3) - E(X)E(X^2)$. Έχουμε από το (α) ότι $E(X^2) = 93/35$. Επίσης

$$E(X) = \frac{3}{7}\int_1^2 x^3\,dx = \frac{45}{28},$$
$$E(X^3) = \frac{3}{7}\int_1^2 x^5\,dx = \frac{3}{7} \times \frac{(2^6-1)}{6} = \frac{9}{2}.$$

Θέμα 4 (α) Επειδή $P_X(1) = E(1^X) = 1$, έπεται ότι $2/3 + c = 1$, δηλαδή $c = 1/3$.

(β) $E(X) = P'_X(1) = (2/3) \times 2 + (1/3) \times 5 = 3$. $E(X(X-1)) = P''_X(1) = 8/3 + 25/3 = 11$. $V(X) = E(X(X-1)) + E(X) - E(X)^2 = 11 + 3 - 9 = 5$.

(γ) Για κάθε $t \in \mathbb{R}$, έχουμε $P_{2X}(t) = E(t^{2X}) = E((t^2)^X) = P_X(t^2) = ...$

Θέμα 5 (α) Αν $k \geq 0$ περιττός ακέραιος, τότε $E(X^k) = \int_{\mathbb{R}} x^k f(x) = \int_{-1}^1 |x|x^k\,dx = 0$ ως ολοκλήρωμα της περιττής συνάρτησης $x \mapsto |x|x^k$ στο συμμετρικό (ως προς το 0) διάστημα $(-1, 1)$. Αν $k \geq 0$ άρτιος ακέραιος, τότε $E(X^k) = \int_{-1}^1 |x|x^k\,dx = 2\int_0^1 xx^k\,dx = 2/(k+2)$. Χρησιμοποιήσαμε το ότι η συνάρτηση $x \mapsto |x|x^k$ τώρα είναι άρτια.
Χρησιμοποιώντας τον πιο πάνω υπολογισμό, βρίσκουμε

$$V(X^2) = E((X^2)^2) - (E(X^2))^2 = E(X^4) - (E(X^2))^2 = (2/6) - (1/2)^2 = 1/12.$$

(β) Η $(X_i^2)_{i\geq1}$ είναι μια ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών. Για κάθε $n \geq 1$, θέτουμε $S_n := X_1^2 + \cdots + X_n^2$. Επειδή από το (α), $E(X_1^2) = 1/2$ και $V(X_1^2) = 1/12 < \infty$, το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα δίνει ότι για μεγάλο n, η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής

$$\frac{S_n - (n/2)}{\sqrt{n/12}}$$

είναι προσεγγιστικά η τυπική κανονική, $N(0,1)$. Για $n = 1200$, ο παρονομαστής του τελευταίου κλάσματος ισούται με 10. Άρα

$$P(575 < T < 615) = P\left(-2.5 < \frac{S_{1200} - 600}{\sqrt{1200/12}} < 1.5\right) \approx \Phi(1.5) - \Phi(-2.5) = \Phi(1.5) + \Phi(2.5) - 1$$