Πιθανότητες Ι
Τμήμα Μαθηματικών, ΕΚΠΑ
Εξέταση 9 Απριλίου 2024

Θέμα 1. (20 Βαθμοί) Σε μια εταιρεία, κάθε βδομάδα, κάθε εργαζόμενος επιλέγει τυχαία (δηλαδή όλες οι δυνατές επιλογές έχουν την ίδια πιθανότητα) ακριβώς 4 μέρες της βδομάδας ανεξάρτητα από τους υπόλοιπους, και δουλεύει μόνο αυτές τις μέρες. Θεωρούμε έναν εργαζόμενο Α.

(α) Ποιο είναι το πλήθος δυνατών προγραμμάτων εργασίας (δηλαδή η τετράδα ημερών στις οποίες θα δουλέψει) του Α για μια δεδομένη βδομάδα;

(β) Ποια είναι η πιθανότητα οι μέρες που δουλεύει ο Α σε μια δεδομένη βδομάδα να είναι διαδοχικές; Π.χ., Τρίτη, Τετάρτη, Πέμπτη, Παρασκευή.

(γ) Ποια είναι η πιθανότητα ο Α να δουλεύει τη Δευτέρα μιας δεδομένης βδομάδας;

(δ) Θεωρούμε τα ενδεχόμενα $C := \{\text{ο Α δουλεύει τη Δευτέρα}\}, D := \{\text{ο Α δουλεύει την Τρίτη}\}$. Είναι τα C, D ανεξάρτητα;

(ε) Κατ' εξαίρεση, για έναν εργαζόμενο Β το πρόγραμμα εργασίας του προκύπτει ως εξής. Στην αρχή κάθε βδομάδας ρίχνει εφτά ανεξάρτητες φορές ένα νόμισμα που φέρνει Κεφαλή με πιθανότητα p. Μία φορά για κάθε μέρα της βδομάδας. Εργάσιμες μέρες θα είναι αυτές των οποίων η ρίψη έφερε Κεφαλή. Ποια πρέπει να είναι η τιμή του p ώστε οι Α, Β να έχουν το ίδιο μέσο πλήθος εργάσιμων ημερών τη βδομάδα.

Θέμα 2. (20 Βαθμοί) Θεωρούμε δύο κάλπες Χ και Υ με την εξής σύνθεση.
Χ: 1 άσπρο και 9 μαύρα σφαιρίδια,
Υ: 9 άσπρα και 1 μαύρο σφαιρίδιο.
Ένα άτομο, ας τον πούμε πειραματιστή, επιλέγει τυχαία (με ίση πιθανότητα) μία από τις δύο κάλπες και έπειτα εξάγει από αυτήν το ένα μετά το άλλο με επανάθεση 2 σφαιρίδια (δηλαδή μετά από κάθε εξαγωγή επιστρέφει το σφαιρίδιο στην κάλπη).
(α) Ποια είναι η πιθανότητα και τα δύο σφαιρίδια που εξάγει να είναι άσπρα.
(β) Αν από όλη τη διαδικασία μας κοινοποιείται μόνο ότι βγήκαν δύο άσπρα σφαιρίδια, ποια είναι η πιθανότητα ο πειραματιστής να είχε επιλέξει για τις εξαγωγές την κάλπη Χ;

Θέμα 3. (15 Βαθμοί) Η ροπογεννήτρια μιας συνεχούς τυχαίας μεταβλητής X, για $t \in (-3, 3)$, δίνεται από τον τύπο

$$M_X(t) = \frac{1}{1 - \left(\frac{t}{3}\right)^2}.$$

(α) Να αναλυθεί η M_X σε δυναμοσειρά με κέντρο το 0.

(β) Για $r \in \mathbb{N}^+$, να βρεθεί ως συνάρτηση του r η r τάξης ροπή, $\mathbf{E}(X^r)$, της τυχαίας μεταβλητής X.

Θέμα 4. (35 Βαθμοί) Έστω διδιάστατη συνεχής τυχαία μεταβλητή (X, Y) με συνάρτηση πυκνότητας-πιθανότητας

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{2}{9} & \text{αν } 0 < x < y < 3, \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

(α) Να βρεθούν οι περιθώριες συναρτήσεις πυκνότητας-πιθανότητας f_X και f_Y των X και Y. Είναι οι X, Y ανεξάρτητες;

(β) Να βρεθεί η πιθανότητα $\mathbf{P}(2X < Y)$.

(γ) Να βρεθούν η δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητας-πιθανότητας $f_{Y|X}(y|x)$ και η δεσμευμένη μέση τιμή $\mathbf{E}(Y|x)$ της Y δοθέντος ότι $X = x$. Για ποια $x \in \mathbb{R}$ αυτές ορίζονται;

(δ) Να βρεθεί η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας-πιθανότητας, $f_{U,V}$, των τυχαίων μεταβλητών $U = X/Y$ και $V = Y$. Για ποια $u, v \in \mathbb{R}$ (δηλαδή σε ποιο σύνολο) είναι η $f_{U,V}(u, v)$ θετική; Είναι οι U, V ανεξάρτητες;

(ε) Να βρεθεί η συνάρτηση πυκνότητας-πιθανότητας της $U = X/Y$.

Θέμα 5. (20 Βαθμοί) Έστω $X_1, X_2, ..., X_n$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές η καθεμία με συνάρτηση πυκνότητας-πιθανότητας

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{(1+x)^4} & \text{αν } x > 0, \\ 0 & \text{αν } x \leq 0. \end{cases}$$

Για μεγάλο $n \in \mathbb{N}^+$, να βρεθεί προσεγγιστικά η πιθανότητα το άθροισμα $\sum_{i=1}^{n} \ln(X_i + 1)$ να είναι τουλάχιστον $(n + \sqrt{n})/3$.

Για τη συνάρτηση κατανομής της Τυπικής Κανονικής $N(0, 1)$ δίνονται:
$\Phi(0.5) = 0.6915$, $\Phi(1) = 0.8413$, $\Phi(1.5) = 0.9332$, $\Phi(1.65) = 0.95$, $\Phi(1.96) = 0.975$, $\Phi(2) = 0.9773$.

Να λυθούν όλα τα θέματα. Άριστα είναι το 100.
Διάρκεια εξέτασης 2 ώρες. Καλή επιτυχία.

Απαντήσεις

Θέμα 1. (α) $\binom{7}{4} = ... = 35$.

(β) 4/35.

(γ)

$$\mathbf{P}(C) = \frac{\binom{6}{3}}{35} = \frac{20}{35} = \frac{4}{7}.$$

(δ)

$$\mathbf{P}(C \cap D) = \frac{\binom{5}{2}}{35} = ... = \frac{2}{7} = \frac{14}{49} < \frac{4}{7} \cdot \frac{4}{7} = \mathbf{P}(C)\mathbf{P}(D).$$

Είναι εξαρτημένα. Μάλιστα $\mathbf{P}(D|C) < \mathbf{P}(D)$, που είναι αναμενόμενο διαισθητικά.

(ε) Το πλήθος των εργάσιμων ημερών του Β σε μια δεδομένη βδομάδα ακολουθεί την κατανομή $\text{Bin}(7, p)$, με μέση τιμή $7p$. Πρέπει $7p = 4$, δηλαδή $p = 4/7$.

Θέμα 2. Θεωρούμε τα ενδεχόμενα

$$\begin{aligned} K_A &:= \{\text{επιλέχθηκε η κάλπη } A\} \\ K_B &:= \{\text{επιλέχθηκε η κάλπη } B\} \\ C &:= \{\text{και τα δύο σφαιρίδια που επιλέγονται είναι άσπρα}\} \end{aligned}$$

(α) Με εφαρμογή του θεωρήματος ολικής πιθανότητας, έχουμε

$$\mathbf{P}(C) = \mathbf{P}(K_A)\mathbf{P}(C|K_A) + \mathbf{P}(K_B)\mathbf{P}(C|K_B) = \frac{1}{2}\frac{1}{10^2} + \frac{1}{2}\frac{9^2}{10^2} = \frac{41}{100}.$$

(β) Με εφαρμογή του τύπου του Bayes, έχουμε

$$\mathbf{P}(K_A|C) = \frac{\mathbf{P}(K_A)\mathbf{P}(C|K_A)}{\mathbf{P}(C)} = \frac{\frac{1}{2}\frac{1}{10^2}}{\frac{1}{2}\frac{82}{10^2}} = \frac{1}{82}.$$

Θέμα 3. (α) $M_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{t}{3}\right)^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^{2k}} t^{2k}$

(β) Κατά τα γνωστά, όταν η M_X είναι πεπεπερασμένη σε περιοχή του 0, τότε αναπτύσσεται σε δυναμοσειρά ως $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbf{E}(X^n)}{n!} t^n$. Από τη μοναδικότητα του αναπτύγματος, έπεται $\mathbf{E}(X^{2k}) = (2k)!/3^{2k}$, $\mathbf{E}(X^{2k+1}) = 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$.

Θέμα 4. Κάνουμε σχήμα που να δείχνει το στήριγμα της $f_{X,Y}$. Είναι το εσωτερικό του τριγώνου με κορυφές τα σημεία (0, 0), (0, 3), (3, 3).

(α) $f_X(x) = \frac{2}{9}(3 - x)\mathbf{1}_{(0,3)}(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f_Y(y) = \frac{2}{9} y \mathbf{1}_{(0,3)}(y)$ για κάθε $y \in \mathbb{R}$.

(β) Υπολογίζοντας κατάλληλο διπλό ολοκλήρωμα, βρίσκουμε ότι η ζητούμενη πιθανότητα είναι 1/2. Πιο απλά, μπορούμε να πούμε το εξής. Το ζευγάρι (X, Y) έχει κατανομή ομοιόμορφη στο τρίγωνο που αναφέρθηκε πιο πάνω (έχει πυκνότητα σταθερή συνάρτηση στο τρίγωνο και 0 εκτός). Η ζητούμενη πιθανότητα είναι η πιθανότητα το ζευγάρι (X, Y) να πάρει τιμή στο τρίγωνο με κορυφές (0, 0), (0, 3), (3/2, 3), το οποίο έχει εμβαδόν το μισό εμβαδόν από ότι το στήριγμα του (X, Y).

(γ) Η δεσμευμένη πυκνότητα και η δεσμευμένη μέση τιμή ορίζονται ακριβώς για τα $x \in \mathbb{R}$ με $f_X(x) > 0$, δηλαδή για $x \in (0, 3)$. Και για τέτοια x, βρίσκουμε

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{1}{3 - x}\mathbf{1}_{(x,3)}(y)$$

για κάθε $y \in \mathbb{R}$. Δηλαδή η $Y|X = x$ είναι ομοιόμορφη στο $(x, 3)$. Έπειτα,

$$\mathbf{E}(Y|x) = \int_{\mathbb{R}} y f_{Y|X}(y|x)\, dy = \ldots = \frac{x+3}{2}.$$

Εναλλακτικά, αυτή η μέση τιμή προκύπτει αμέσως γιατί είναι η μέση τιμή της ομοιόμορφης στο $(x, 3)$.

(δ) Θεωρούμε το σύνολο $W := \{(x, y) : 0 < x < y < 3\}$ και την απεικόνιση $g : W \to \mathbb{R}^2$ με $g(x, y) = (x/y, y)$. Η g είναι 1-1 με $g(W) = (0, 1) \times (0, 3)$. Έχουμε $(U, V) = g(X, Y)$ και (με δουλειά) βρίσκουμε.

$$f_{U,V}(u, v) = \frac{2}{9} v \mathbf{1}_{(0,1)}(u) \mathbf{1}_{(0,3)}(v)$$

για κάθε $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. Επειδή η $f_{(U,V)}$ γράφεται ως γινόμενο ..., οι U, V είναι ανεξάρτητες.

(ε) Βρίσκουμε $f_U(u) = \mathbf{1}_{(0,1)}(u)$ για κάθε $u \in \mathbb{R}$, δηλαδή η U είναι ομοιόμορφη στο (0, 1).

Θέμα 5. Θέτουμε $Y_k = \log(X_k + 1)$ για κάθε $k \in \mathbb{N}^+$. Οι $(Y_k)_{k \in \mathbb{N}^+}$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες. Με τον γνωστό τρόπο, βρίσκουμε ότι η Y_1 έχει πυκνότητα $f_{Y_1}(t) = 3e^{-3t} \mathbf{1}_{(0,\infty)}(t)$, δηλαδή έχει κατανομή εκθετική με παράμετρο 3. Κατά τα γνωστά, $\mathbf{E}(Y_1) = 1/3$, $\mathrm{Var}(Y_1)$=1/9. Έστω $S_n := Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n$, Τότε

$$\mathbf{P}\left(S_n \geq \frac{n + \sqrt{n}}{3}\right) = \mathbf{P}\left(\frac{S_n - (n/3)}{\sqrt{n/9}} \geq 1\right) \approx \mathbf{P}(Z \geq 1) = 1 - \mathbf{P}(Z < 1) = 1 - \mathbf{P}(Z \leq 1) = 1 - \Phi(1).$$

Το $\approx$, η προσέγγιση, είναι συνέπεια του ότι το όριο (για $n \to \infty$) της πιθανότητας αριστερά του $\approx$ ισούται με $\mathbf{P}(Z \geq 1)$ λόγω του κεντρικού οριακού θεωρήματος. Έπειτα, η $\mathbf{P}(Z < 1) = \mathbf{P}(Z \leq 1)$ ισχύει γιατί η Z είναι συνεχής τυχαία μεταβλητή.