# Τυπολογιο για το μαθημα Πιθανοτητες I

**Συνδυαστικά**

**1.** Έστω $n, N_1, N_2, \ldots, N_n \in \mathbb{N}^+$. Κατασκευάζουμε μια διατεταγμένη $n$-άδα $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ με τους εξής περιορισμούς.

$$\begin{aligned}
\text{Για το } a_1 \text{ έχουμε } N_1 \text{ επιλογές.}\\
\text{Για κάθε επιλογή του } a_1, \text{ για το } a_2 \text{ έχουμε } N_2 \text{ επιλογές.}\\
\text{Για κάθε επιλογή των } a_1, a_2, \text{ για το } a_3 \text{ έχουμε } N_3 \text{ επιλογές.}\\
\vdots\quad\\
\text{Για κάθε επιλογή των } a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, \text{ για το } a_n \text{ έχουμε } N_n \text{ επιλογές.}
\end{aligned}$$

Τότε μπορούμε να κατασκευάσουμε

$$N_1 \cdot N_2 \cdots N_n$$

διαφορετικές $n$-άδες.

**2.**

| | Διατάξεις | Συνδυασμοί |
|---|---|---|
| Με επανάληψη | $n^k$ | $\binom{n+k-1}{k}$ |
| Χωρίς επανάληψη | $(n)_k$ | $\binom{n}{k}$ |

(1)

**3.** Πλήθος διαιρέσεων[1] $(A_1, A_2, \ldots, A_r)$ ενός συνόλου $n$ στοιχείων σε $r$ σύνολα ώστε το σύνολο $A_i$ να έχει $k_i$ στοιχεία. Τα $k_1, k_2, \ldots, k_r$ είναι δεδομένα με $k_1 + k_2 + \cdots + k_r = n$.

$$\frac{n!}{k_1!\, k_2! \cdots k_r!} \tag{2}$$

Ισοδύναμα, πλήθος διατετεγμένων $n$-άδων ώστε κάθε μία να περιέχει $k_1$ φορές το $a_1$, $k_2$ φορές το $a_2$, ..., $k_r$ φορές το $a_r$, όπου $a_1, a_2, \ldots, a_r$ είναι $r$ διαφορετικά αντικείμενα.

**Πιθανότητα**

**4.** Αξιώματα:

$$\mathbf{P}(\Omega) = 1 \tag{3}$$

$$\mathbf{P}(\cup_{i=1}^N A_i) = \sum_{i=1}^N \mathbf{P}(A_i) \tag{4}$$

$N \in \mathbb{N}$ ή $N = \infty$, και τα $A_i$ ξένα ανά δύο υποσύνολα του $\Omega$.
Ιδιότητες:

$$\mathbf{P}(A^c) = 1 - \mathbf{P}(A) \tag{5}$$

$$\mathbf{P}(A \setminus B) = \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(A \cap B) \tag{6}$$

$$\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B) \tag{7}$$

για $A, B \subset \Omega$. $A^c := \Omega \setminus A$.

[1] Διαίρεση ενός συνόλου $S$ σε $r$ υποσύνολα λέγεται κάθε διατεταγμένη $r$-άδα ξένων ανα δύο υποσυνόλων που έχουν ένωση το $S$. Δεν απαιτούμε να είναι όλα μη κενά.

**5.** Αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού. $n \in \mathbb{N}, A_1, A_2, \ldots, A_n$ ενδεχόμενα

$$\mathbf{P}(\cup_{i=1}^n A_i) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} S_k \tag{8}$$

με

$$S_k := \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n} \mathbf{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k})$$

Το $S_k$ έχει $\binom{n}{k}$ όρους.

## Δεσμευμένη πιθανότητα

**6.** Για $\mathbf{P}(B) > 0$,

$$\mathbf{P}(A|B) := \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)} \tag{9}$$

**7.** Πολλαπλασιαστικός κανόνας. Αν $A_1, A_2, \ldots, A_n \subset \Omega$ και $\mathbf{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}) > 0$, τότε

$$\mathbf{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(A_2|A_1)\mathbf{P}(A_3|A_1 \cap A_2) \cdots \mathbf{P}(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \tag{10}$$

**8.** Θεώρημα ολικής πιθανότητας. Αν $A_1, A_2, \ldots, A_n$ είναι διαμέριση του $\Omega$ με $\mathbf{P}(A_k) > 0$ για κάθε $k = 1, 2, \ldots, n$, τότε

$$\mathbf{P}(B) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(A_k)\mathbf{P}(B|A_k) \tag{11}$$

Ισχύει και για $n = \infty$ (δηλαδή για άπειρη αριθμήσιμη διαμέριση του $\Omega$).

**9.** Τύπος Bayes. Αν $A_1, A_2, \ldots, A_n$ είναι διαμέριση του $\Omega$ με $\mathbf{P}(A_k) > 0$ για κάθε $k = 1, 2, \ldots, n$, και $B \subset \Omega$ με $\mathbf{P}(B) > 0$, τότε

$$\mathbf{P}(A_r|B) = \frac{\mathbf{P}(A_r)\mathbf{P}(B|A_r)}{\sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(A_k)\mathbf{P}(B|A_k)} \tag{12}$$

Ισχύει και για $n = \infty$ (δηλαδή για άπειρη αριθμήσιμη διαμέριση του $\Omega$).

**10.** Ορισμός της ανεξαρτησίας. Τα $A_1, A_2, \ldots, A_n \subset \Omega$ λέγονται ανεξάρτητα αν για κάθε $k \in \{2, \ldots, n\}$ και $i_1, i_2, \ldots, i_k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ διαφορετικούς δείκτες ισχύει

$$\mathbf{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = \mathbf{P}(A_{i_1})\mathbf{P}(A_{i_2}) \cdots \mathbf{P}(A_{i_k}) \tag{13}$$

## Μονοδιάστατες τυχαίες μεταβλητές

**11.** Συνάρτηση κατανομής

$$F_X(x) := \mathbf{P}(X \leqslant x)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Είναι αύξουσα, δεξιά συνεχής, $F_X(-\infty) = 0, F_X(\infty) = 1$.

$$\mathbf{P}(a < X \leqslant b) = F_X(b) - F_X(a) \tag{14}$$

$$\mathbf{P}(X = a) = F_X(a) - F_X(a-) \tag{15}$$

για $a < b$.

**12.** Ορισμός της μέσης τιμής και χρήσεις της $f(= f_X)$

$$\begin{array}{llll} & X \text{ Διακριτή} & X \text{ Συνεχής} & \\ \mathbf{P}(X \in A) & \sum_{x \in A} f(x) & \int_A f(x)\,dx & (16) \\ \mathbf{E}(X) & \sum_{x \in \mathbb{R}} x f(x) & \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx & (17) \\ \mathbf{E}\{h(X)\} & \sum_{x \in \mathbb{R}} h(x) f(x) & \int_{-\infty}^{\infty} h(x) f(x)\,dx & (18) \end{array}$$

Η τελευταία σχέση λέγεται Νόμος του Αφηρημένου Στατιστικού.

**13.** Αν $X$ συνεχής με πυκνότητα $f$ και συνάρτηση κατανομής $F$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt \tag{19}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

**14.** Αν $X$ διακριτή, η συνάρτηση πιθανότητάς της ορίζεται ως

$$f_X(a) := \mathbf{P}(X = a) \tag{20}$$

για κάθε $a \in \mathbb{R}$.
Αν $X$ συνεχής με πυκνότητα $f_X$ και συνάρτηση κατανομής $F_X$,

$$f_X(a) = F'_X(a) \tag{21}$$

για κάθε $a \in \mathbb{R}$ σημείο συνέχειας της $f_X$.

**15.** Γραμμικότητα της μέσης τιμής

$$\mathbf{E}(X + Y) = \mathbf{E}(X) + \mathbf{E}(Y) \tag{22}$$

$$\mathbf{E}(aX) = a\,\mathbf{E}(X) \qquad \text{με } a \in \mathbb{R} \tag{23}$$

**16.** Διασπορά

$$\mathrm{Var}(X) := \mathbf{E}\big(\{X - \mathbf{E}(X)\}^2\big) = \mathbf{E}(X^2) - \{\mathbf{E}(X)\}^2 \tag{24}$$

για $X$ τ.μ. με $\mathbf{E}(X) \in \mathbb{R}$

**17.** $\mathrm{Var}(aX + b) = a^2\,\mathrm{Var}(X)$ για $a, b \in \mathbb{R}$

**18.** Νόμος των σπάνιων γεγονότων (προσέγγιση της διωνυμικής από την Poisson)

$$\mathrm{Bin}(n, p) \approx \mathrm{Poisson}(np)$$

για $n$ μεγάλο και $p$ μικρό.
Δηλαδή: Αν $X_n \sim \mathrm{Bin}(n, p_n)$, $\lim_{n\to\infty} np_n = \lambda \in (0, \infty)$, και $Y \sim \mathrm{Poisson}(\lambda)$, τότε για κάθε $k \in \mathbb{N}$ ισχύει $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(X_n = k) = \mathbf{P}(Y = k)$.

## Πολυδιάστατες τυχαίες μεταβλητές

**19.** Συνάρτηση κατανομής της διδιάστατης τ.μ. $(X, Y)$

$$F_{X,Y}(x, y) = \mathbf{P}(X \leqslant x, Y \leqslant y) \tag{25}$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

**20.** Χρήσεις της $f_{X,Y}$

| | $(X,Y)$ Διακριτή | $(X,Y)$ Συνεχής | |
|---|---|---|---|
| $\mathbf{P}((X,Y)\in A)$ | $\sum_{(x,y)\in A} f_{X,Y}(x,y)$ | $\iint_A f_{X,Y}(x,y)\,dxdy$ | (26) |
| $f_X(x)$ | $\sum_{y\in\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)$ | $\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy$ | (27) |
| $f_Y(y)$ | $\sum_{x\in\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)$ | $\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx$ | (28) |
| $\mathbf{E}\{h(X,Y)\}$ | $\sum_{x,y\in\mathbb{R}} h(x,y)f(x,y)$ | $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(x,y)f(x,y)\,dxdy$ | (29) |

Η τελευταία σχέση λέγεται Νόμος του Αφηρημένου Στατιστικού.

**21.** Αν $(X,Y)$ συνεχής διδιάστατη τ.χ. με πυκνότητα $f_{X,Y}$ και συνάρτηση κατανομής $F_{X,Y}$

$$F_{X,Y}(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(s,t)\,dt\,ds \tag{30}$$

**22.** $X,Y$ ανεξάρτητες. Ορισμός και κριτήριο.

$$\mathbf{P}(X\in A, Y\in B) = \mathbf{P}(X\in A)\mathbf{P}(Y\in B) \qquad \text{για κάθε } A,B\subset\mathbb{R} \tag{31}$$

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y) \qquad \text{για κάθε } x,y\in\mathbb{R} \tag{32}$$

**23.** Άθροισμα ανεξάρτητων τ.μ.

$$f_{X+Y}(z) = \sum_{x\in\mathbb{R}} f_X(x)f_Y(z-x) = \sum_{y\in\mathbb{R}} f_X(z-y)f_Y(y) \qquad X,Y \text{ διακριτές} \tag{33}$$

$$f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)f_Y(z-x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y)f_Y(y)\,dy \qquad X,Y \text{ από κοινού συνεχείς} \tag{34}$$

**24.** Ανισότητα Cauchy-Schwarz. Αν η $\mathbf{E}(XY)$ ορίζεται, τότε

$$|\mathbf{E}(XY)| \leqslant \sqrt{\mathbf{E}(X^2)}\sqrt{\mathbf{E}(Y^2)} \tag{35}$$

**25.** Συνδιακύμανση

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(X,Y) :&= \mathbf{E}\{(X-\mathbf{E}(X))(Y-\mathbf{E}(Y))\} &(36)\\ &= \mathbf{E}(XY) - \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y) &(37)\end{aligned}$$

**26.** Ιδιότητες της συνδιακύμανσης

$$\mathrm{Cov}(X,X) = \mathrm{Var}(X) \tag{38}$$

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{Cov}(Y,X) \tag{39}$$

$$\mathrm{Cov}(aX,Y) = a\,\mathrm{Cov}(X,Y) \qquad \text{με } a\in\mathbb{R} \tag{40}$$

$$\mathrm{Cov}\left(\sum_{i=1}^{m} X_i, \sum_{j=1}^{n} Y_j\right) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \mathrm{Cov}(X_i,Y_j) \tag{41}$$

**27.** Διασπορά αθροίσματος

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i) + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \mathrm{Cov}(X_i,X_j) \tag{42}$$

**28.** Συντελεστής συσχέτισης

$$\rho(X,Y) := \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}\sqrt{\mathrm{Var}(Y)}} \in [-1,1] \tag{43}$$

**29.** Δεσμευμένες κατανομές. Για $y \in \mathbb{R}$ με $f_Y(y) > 0$

$$f_{X|Y}(x|y) := \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} \tag{44}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. $X, Y$ διακριτές ή από κοινού συνεχείς.

**30.** Δεσμευμένη μέση τιμή. Για $y$ με $f_Y(y) > 0$,

$$\mathbf{E}(X|Y=y) := \begin{cases} \displaystyle\sum_{x\in\mathbb{R}} x f_{X|Y}(x|y) & \text{αν } X, Y \text{ διακριτές} \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y}(x|y)\, dx & \text{αν } X, Y \text{ από κοινού συνεχείς} \end{cases} \tag{45}$$

$$\mathbf{E}(h(X)|Y=y) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{x\in\mathbb{R}} h(x) f_{X|Y}(x|y) & \text{αν } X, Y \text{ διακριτές} \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} h(x) f_{X|Y}(x|y)\, dx & \text{αν } X, Y \text{ από κοινού συνεχείς} \end{cases} \tag{46}$$

Νόμος του Αφηρημένου Στατιστικού για τη δεσμευμένη μέση τιμή.

**31.** Νόμος της επαναλαμβανόμενης μέσης τιμής

$$\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}(\mathbf{E}(X|Y)) \tag{47}$$

όπου $\mathbf{E}(X|Y) := m(Y)$ με $m(y) := \mathbf{E}(X|Y=y)$. Προϋπόθεση: $\mathbf{E}X \in \mathbb{R}$.

**32.**

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbf{E}\{\mathrm{Var}(X|Y)\} + \mathrm{Var}\{\mathbf{E}(X|Y)\} \tag{48}$$

$\mathrm{Var}(X|Y) := \delta(Y)$ με $\delta(y) := \mathbf{E}(X^2|Y=y) - \{\mathbf{E}(X|Y=y)\}^2$

**33.** Υπολογισμός πιθανοτήτων με δέσμευση

$$\mathbf{P}(A) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{y\in\mathbb{R}} \mathbf{P}(A|Y=y) f_Y(y) & \text{αν } Y \text{ διακριτή} \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{P}(A|Y=y) f_Y(y)\, dy & \text{αν } Y \text{ συνεχής} \end{cases} \tag{49}$$

**34.** Πιθανογεννήτρια

$$P_X(t) := \mathbf{E}(t^X) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}(X=k)\, t^k \tag{50}$$

για κάθε $t \in [-1,1]$. $X$ τ.μ. με τιμές στο $\mathbb{N}$

$$\mathbf{E}((X)_k) = P_X^{(k)}(1-) \tag{51}$$

$$\mathbf{P}(X=k) = \frac{1}{k!} P_X^{(k)}(0) \tag{52}$$

$k \in \mathbb{N}$

**35.** Ροπογεννήτρια

$$M_X(t) := \mathbf{E}(e^{tX}) \in (0,\infty] \tag{53}$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}$. $X$ τ.μ. με τιμές στο $\mathbb{R}$
Αν υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $M_X(t) < \infty$ για κάθε $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, τότε

$$M_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \mathbf{E}(X^k) \qquad \text{για κάθε } t \in (-\varepsilon, \varepsilon) \tag{54}$$

$$\mathbf{E}(X^k) = M_X^{(k)}(0) \qquad \text{για κάθε } k \in \mathbb{N} \tag{55}$$

Αν $X, Y$ ανεξάρτητες,

$$M_{X+Y}(t) = M_X(t) M_Y(t) \tag{56}$$

**36.** Ανισότητα Markov

$$\mathbf{P}(X \geqslant a) \leqslant \frac{\mathbf{E}(X)}{a} \tag{57}$$

$X$ τ.μ. με τιμές στο $[0, \infty)$, και $a > 0$.

**37.** Ανισότητα Chebyshev

$$\mathbf{P}(|X - \mathbf{E}(X)| \geqslant a) \leqslant \frac{\mathrm{Var}(X)}{a^2} \tag{58}$$

$X$ τ.μ. με τιμές στο $\mathbb{R}$, $\mathbf{E}(X) \in \mathbb{R}$, και $a > 0$.

**38.** Ασθενής νόμος των μεγάλων αριθμών. Για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left( \left| \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} - \mathbf{E}(X_1) \right| > \varepsilon \right) = 0 \tag{59}$$

$\{X_i : i \geqslant 1\}$ ανεξάρτητες ισόνομες με $\mathbf{E}(X_1) \in \mathbb{R}$.

**39.** Ισχυρός νόμος των μεγάλων αριθμών. Με πιθανότητα 1 ισχύει

$$\lim_{n\to\infty} \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} = \mathbf{E}(X_1) \tag{60}$$

$\{X_i : i \geqslant 1\}$ ανεξάρτητες ισόνομες με $\mathbf{E}(X_1) \in \mathbb{R}$.

**40.** Κεντρικό οριακό θεώρημα. Για κάθε $I \subset \mathbb{R}$ διάστημα ισχύει

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left( \frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \in I \right) = \mathbf{P}(Z \in I) \tag{61}$$

$S_n := X_1 + X_2 + \cdots + X_n$
$\{X_i : i \geqslant 1\}$ ανεξάρτητες ισόνομες
$\mu := \mathbf{E}(X_1) \in \mathbb{R}, \sigma^2 := \mathrm{Var}(X_1) \in (0, \infty)$
$Z \sim N(0, 1)$

**41.** Συνάρτηση πολυδιάστατης τυχαίας μεταβλητής

- $X = (X_1, \ldots, X_n)$ τυχαία μεταβλητή με πυκνότητα $f_X$ και τιμές σε ένα $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοιχτό
- $g : U \to \mathbb{R}^n$ απεικόνιση 1-1 διαφορίσιμη με Ιακωβιανή που δεν μηδενίζεται στο $U$
- $Y = g(X)$

Η $Y := g(X)$ είναι συνεχής τ.μ. και έχει πυκνότητα

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(g^{-1}(y))|\det J_{g^{-1}}(y)| & \text{αν } y \in g(U), \\ 0 & \text{αν } y \in \mathbb{R}^n \backslash g(U). \end{cases} \tag{62}$$

$J_{g^{-1}}(y)$ ο Ιακωβιανός πίνακας της $g^{-1}$ στο $y \in g(U)$

## Διακριτές κατανομές

| Όνομα και τιμές | Παράμετροι | Συνάρτηση πιθανότητας $P(X=k)$ για $k$ δυνατή τιμή | Μέση τιμή | Διασπορά | Ροπογεννήτρια $\mathbb{E}(e^{tX})$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Ομοιόμορφη στο $\{a, a+1, \ldots, b\}$ | $b-a \in \mathbb{N}$ | $\frac{1}{b-a+1}$ | $\frac{a+b}{2}$ | $\frac{(b-a+1)^2-1}{12}$ | $\frac{1}{b-a+1}\frac{e^{t(b+1)}-e^{ta}}{e^t-1}$ |
| Bernoulli$(p)$ στο $\{0,1\}$ | $p \in [0,1]$ | $P(X=1)=p$<br>$P(X=0)=1-p$ | $p$ | $p(1-p)$ | $pe^t+1-p$ |
| Διωνυμική $(n,p)$ στο $\{0,1,\ldots,n\}$ | $n \in \mathbb{N}, p \in [0,1]$ | $\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ | $np$ | $np(1-p)$ | $(pe^t+1-p)^n$ |
| Poisson$(\lambda)$ στο $\{0,1,2,\ldots\}$ | $\lambda > 0$ | $e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$ | $\lambda$ | $\lambda$ | $e^{\lambda(e^t-1)}$ |
| Γεωμετρική$(p)$ στο $\{1,2,\ldots\}$ | $p \in [0,1]$ | $(1-p)^{k-1}p$ | $\frac{1}{p}$ | $(1-p)/p^2$ | $\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}$<br>για $t < \log\{1/(1-p)\}$ |

## Συνεχείς κατανομές

| Όνομα | Παράμετροι | Πεδίο τιμών | Πυκνότητα $f(x)$ για $x$ στο πεδίο τιμών | Συνάρτηση κατανομής $F(x)$ για $x$ στο πεδίο τιμών | Μέση τιμή | Διασπορά | Ροπογεννήτρια $\mathbb{E}(e^{tX})$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Ομοιόμορφη$(a,b)$ | $a,b \in \mathbb{R}, a < b$ | $(a,b)$ | $\frac{1}{b-a}$ | $\frac{x-a}{b-a}$ | $\frac{a+b}{2}$ | $\frac{(b-a)^2}{12}$ | $\frac{e^{bt}-e^{at}}{t(b-a)}$ |
| $N(0,1)$ | | $(-\infty,\infty)$ | $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$ | $\Phi(x)$ | $0$ | $1$ | $e^{t^2/2}$ |
| $N(\mu,\sigma^2)$ | $\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$ | $(-\infty,\infty)$ | $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^2/\sigma^2}$ | $\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$ | $\mu$ | $\sigma^2$ | $e^{\mu t+\sigma^2 t^2/2}$ |
| Εκθετική$(\lambda)$ | $\lambda > 0$ | $(0,\infty)$ | $\lambda e^{-\lambda x}$ | $1-e^{-\lambda x}$ | $1/\lambda$ | $1/\lambda^2$ | $\frac{1}{\left(1-\frac{t}{\lambda}\right)}$ για $t \in (-\infty,\lambda)$ |
| Γάμμα$(a,\lambda)$ | $a,\lambda > 0$ | $(0,\infty)$ | $\frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\lambda x}$ | $1-e^{-\lambda x}\sum_{k=0}^{a-1}\frac{(\lambda x)^k}{k!}$ για ακέραιο $a$ | $a/\lambda$ | $a/\lambda^2$ | $\frac{1}{\left(1-\frac{t}{\lambda}\right)^a}$ για $t \in (-\infty,\lambda)$ |
| Cauchy | | $(-\infty,\infty)$ | $\frac{1}{\pi(1+x^2)}$ | $\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arctan(x)$ | Δεν ορίζεται | Δεν ορίζεται | $\infty \cdot \mathbf{1}_{x\neq 0} + \mathbf{1}_{x=0}$ |