

Θέμα 1. (20 Βαθμοί) Από μία κάλπη που περιέχει 50 σφαιρίδια αριθμημένα ως 1, 2, ..., 50 εξάγουμε το ένα μετά το άλλο χωρίς επανάθεση 8 σφαιρίδια. Σημειώνουμε τους αριθμούς που φέρουν και με τι σειρά επιλέχθηκε το καθένα. Υπολογίστε τις πιθανότητες:

(α) Και τα 8 σφαιρίδια να έχουν άρτιο αριθμό.

(β) Και τα 8 σφαιρίδια να έχουν αριθμό στοιχείο του $\{k \in \mathbb{N} : 1 \leq k \leq 20\}$.

(γ) Τουλάχιστον ένα από τα 8 σφαιρίδια να έχει αριθμό έναν από τους 10, 20, 30, 40, 50.

(δ) Το 5ο σε σειρά σφαιρίδιο να είναι μεγαλύτερο από τα πρώτα 4 και μικρότερο από τα επόμενα 3. Για παράδειγμα, μια αποδεκτή τέτοια εξαγωγή είναι η 20, 13, 5, 18, 30, 38, 47, 33 (αυτοί οι αριθμοί, με αυτή τη σειρά).

Θέμα 2. (15 Βαθμοί) Διαθέτουμε δύο νομίσματα N_1, N_2 . Το N_1 φέρνει Κεφαλή με πιθανότητα $p_1 := 3/4$ ενώ το N_2 φέρνει Κεφαλή με πιθανότητα $p_2 := 1/10$. Ένας φίλος επιλέγει ένα από τα νομίσματα στην τύχη (πιθανότητα $1/2$ να επιλεγεί το N_1) και το ρίχνει δύο φορές.

(α) Ποια είναι η πιθανότητα το νόμισμα να ρθει γράμματα και τις δύο φορές;

(β) Αν από όλο το πείραμα μαθαίνουμε μόνο ότι και οι δύο ρίψεις έφεραν γράμματα, ποια είναι η πιθανότητα να είχε επιλεγεί για τις ρίψεις το N_1 ;

Θέμα 3. (20 Βαθμοί) Έστω X συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας-πιθανότητας

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}} & \text{αν } x \in (0, 1), \\ 0 & \text{αν } x \in \mathbb{R} \setminus (0, 1). \end{cases}$$

Να υπολογιστούν:

(α) Η μέση τιμή $\mathbf{E}(X \log X)$ και οι πιθανότητες $\mathbf{P}(X = 1/2), \mathbf{P}(X \in [1/2, 2])$.

(β) Η συνάρτηση πυκνότητας-πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής $Y := -\log X$. Τι τιμές παίρνει η Y ;

Θέμα 4. (25 Βαθμοί) Έστω διδιάστατη συνεχής τυχαία μεταβλητή (X, Y) με συνάρτηση πυκνότητας-πιθανότητας

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} cx & \text{αν } 0 < y < \sqrt{x} < 1, \\ 0 & \text{διαφορετικά,} \end{cases}$$

όπου $c > 0$ είναι μια σταθερά. Να υπολογιστούν:

(α) Η σταθερά c .

(β) Οι περιθώριες συναρτήσεις πυκνότητας-πιθανότητας, f_X, f_Y , των X, Y . Είναι οι X, Y ανεξάρτητες;

(γ) Η πιθανότητα $\mathbf{P}(X < Y)$ και η $\text{Cov}(X, Y)$.

Θέμα 5. (10 Βαθμοί) Έστω X, Y ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές καθεμία με κατανομή την εκθετική με παράμετρο 1, δηλαδή με πυκνότητα $f(x) = e^{-x} \mathbf{1}_{x>0}$. Θέτουμε $U := X/Y$ και $V := X$.

(α) Να βρεθεί η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας-πιθανότητας, $f_{U,V}$, των U, V .

(β) Να βρεθεί η συνάρτηση πυκνότητας-πιθανότητας της U .

Θέμα 6. (20 Βαθμοί) Παίζουμε n φορές ένα τυχερό παιχνίδι. Συμβολίζουμε με X_k το ποσό που παίρνουμε από την k φορά που παίζουμε το παιχνίδι. Αν συμβεί $X_k > 0$, σημαίνει ότι κερδίσαμε το ποσό X_k , ενώ αν συμβεί $X_k \leq 0$, σημαίνει ότι χάσαμε το ποσό $|X_k|$. Θεωρούμε ότι οι $(X_k)_{1 \leq k \leq n}$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες. Έστω $S_n := X_1 + X_2 + \dots + X_n$.

(α) Αν η X_1 παίρνει μόνο τις τιμές -1 και 1 με πιθανότητα $1/2$ την καθεμία, ποια είναι προσεγγιστικά η πιθανότητα $\mathbf{P}(S_{96} \geq 0)$, δηλαδή μετά από 96 παιχνίδια συνολικά να μην είμαστε χαμένοι;

(β) Αν η X_1 παίρνει μόνο τις τιμές -1 και 1 αλλά με $\mathbf{P}(X_1 = -1) = 3/5, \mathbf{P}(X_1 = 1) = 2/5$, ποια είναι προσεγγιστικά η πιθανότητα $\mathbf{P}(S_{96} \geq 0)$; Εκ των προτέρων περιμένετε αυτή η πιθανότητα να είναι μικρή ή μεγάλη και γιατί;

Για την κατανομή $N(0, 1)$ δίνονται: $\Phi(0) = 0.5$, $\Phi(1) = 0.8413$, $\Phi(2) = 0.9773$, $\Phi(3) = 0.9986$.

Να λυθούν όλα τα θέματα.

Οι απαντήσεις να είναι αιτιολογημένες.

Άριστα είναι το 100.

Διάρκεια εξέτασης 2 ώρες. Καλή επιτυχία.

Απαντήσεις

Θέμα 1. (α) $(25)_8/(50)_8$

(β) $(20)_8/(50)_8$

(γ)

$$1 - \frac{(45)_8}{(50)_8}$$

(δ) Η κατασκευή ενός ευνοϊκού αποτελέσματος γίνεται ως εξής. Επιλέγουμε 8 αριθμούς από τους 50. Αυτοί έχουν μια διάταξη, $a_1 < a_2 < \dots < a_8$. Στο ευνοϊκό αποτέλεσμα, την πέμπτη θέση θα την καταλάβει ο a_5 (δεν υπάρχει άλλη επιλογή). Τις θέσεις 1, 2, 3, 4 θα τις πάρουν οι a_1, a_2, a_3, a_4 , και υπάρχουν 4! τρόποι να τοποθετηθούν. Όμοια, για τις θέσεις 6, 7, 8 υπάρχουν 3! τρόποι. Άρα, η πιθανότητα είναι

$$\frac{\binom{50}{8} 4! 3!}{(50)_8} = \frac{4! 3!}{8!}.$$

Θέμα 3. (α) $E(X \log X) = -2/9, P(X \in [1/2, 2]) = 1 - (1/\sqrt{2})$. $P(X = 1/2) = 0$ γιατί η X είναι συνεχής τυχαία μεταβλητή.

(β) Επειδή η X παίρνει τιμές στο $(0, 1)$, η Y παίρνει τιμές στο $(0, \infty)$ [ιδιότητες του λογαρίθμου]. Η συνάρτηση κατανομής της Y , F_Y , ισούται με

$$F_Y(t) = P(-\log X \leq t) = P(X \geq e^{-t}) = 1 - P(X < e^{-t}) = 1 - F_X(e^{-t}).$$

Επειδή η F_X είναι συνεχής (γιατί η X είναι συνεχής τ.μ.), έπεται από την τελευταία σχέση ότι και η F_Y είναι συνεχής. Επειδή η F_X είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ με συνεχή παράγωγο εκεί, έπεται ότι η F_Y είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ με συνεχή παράγωγο εκεί την

$$F'_Y(t) = f_X(e^{-t})e^{-t} = \frac{1}{2}e^{-t/2}\mathbf{1}_{t>0}.$$

Αυτή είναι η πυκνότητα της Y . Παρεμπιπτόντως, αυτή είναι η πυκνότητα της εκθετικής με παράμετρο $1/2$.

Θέμα 4. Κάνουμε σχήμα ώστε να δούμε το στήριγμα της $f_{X,Y}$.

(α) $c = 5/2$

(β) $f_X(x) = cx^{3/2}\mathbf{1}_{x \in (0,1)}, f_Y(y) = (c/2)(1 - y^4)\mathbf{1}_{y \in (0,1)}$.

(γ) $P(X < Y) = \int_0^1 \int_x^{\sqrt{x}} cx \, dy \, dx = c \int_0^1 x(\sqrt{x} - x) \, dx = 1/6$.

$E(X) = 5/7, E(Y) = 5/12, E(XY) = 5/16, \text{Cov}(X, Y) = 5/336$.

Θέμα 5. (α)

$$f_{U,V}(u, v) = e^{-v(1+\frac{1}{u})} \frac{v}{u^2} \mathbf{1}_{u,v>0}$$

(β)

$$f_U(u) = \frac{1}{(u+1)^2} \mathbf{1}_{u>0}.$$

Θέμα 5. (α) Η X_1 (όπως και κάθε X_i) έχει μέση τιμή 0 και διασπορά $\sigma^2 = E(X_1^2) - \{E(X_1)\}^2 = E(X_1^2) = 1$ αφού η τ.μ. X_1 έχει πάντοτε την τιμή 1. Για μεγάλο n , ακολουθεί προσεγγιστικά την κανονική κατανομή η τ.μ.

$$\frac{S_n - nE(X_1)}{\sqrt{n\sigma^2}} = \frac{S_n}{\sqrt{n}}.$$

Άρα $P(S_{96} \geq 0) = P(S_{96}/\sqrt{96} \geq 0) \approx P(Z \geq 0) = 1 - P(Z < 0) = 1 - \Phi(0) = 1/2$. Συμβολίσαμε με Z μια τ.μ. με κατανομή $N(0, 1)$ και εφαρμόσαμε το κεντρικό οριακό θεώρημα. Επειδή η Z είναι συνεχής τ.μ., $P(Z < 0) = P(Z \leq 0) = \Phi(0)$.

(β) Τώρα η X_1 έχει μέση τιμή $(-1)(3/5) + 1 \cdot (2/5) = -1/5$, δεύτερη ροπή $E(X_1^2) = 1$, και διασπορά $\sigma^2 = 1 - (1/5)^2 = 24/25$. Η S_{96} έχει μέση τιμή $96E(X_1) = -96/5$ και διασπορά $96 \cdot 24/25 = 4 \cdot 24 \cdot 24/25$, επομένως τυπική απόκλιση $2 \cdot 24/5$. Άρα ακολουθεί προσεγγιστικά την κανονική κατανομή η τ.μ.

$$\frac{S_{96} + (96/5)}{48/5}.$$

Οπότε

$$\mathbf{P}(S_{96} \geq 0) = \mathbf{P}(S_{96} + (96/5) \geq 96/5) = \mathbf{P}\left(\frac{S_{96} + (96/5)}{48/5} \geq \frac{96/5}{48/5}\right) \approx \mathbf{P}(Z \geq 2) = 1 - \Phi(2) = 0.0227.$$

Από πριν περιμένουμε αυτή η πιθανότητα να είναι μικρή γιατί παίζουμε σε ένα παιχνίδι που είναι εναντίον μας.