Ώρα Γραφείου
Τετ. 11-2

2/10/2018 — 1º μάθημα

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ I

[Βασικές Αρχές Θεωρίας Πιθανοτήτων S.Ross] → Βιβλίο

• Αρχείο Ασκήσεων στην e-class !! [να διαβάσω σειρές και πώς να τις φέρω]

1). Τυχαία Φαινόμενα → Αυθεντική τυχαιότητα (μικρόκοσμος)

Τυχαιότητα από άγνοια
[έλλειψη στοιχείων ή αδυναμία ανάλυσης τους]

ΟΡΙΣΜΟΣ

Πιθανότητα: είναι ο αριθμός που ποσοτικοποιεί την άγνοιά μας για ένα γεγονός

Βασικές ερμηνείες
(α) Υποκειμενική πιθανότητα
(β) Συχνοτική (αντικειμενική) πιθανότητα
πχ: η δήλωση ότι το νόμισμα φέρνει Κ με πιθανότητα 40% σημαίνει ότι αν κάνουμε N δοκιμές (N μεγάλο) και έρθει Κ στις N_K, τότε $\frac{N_K}{N} \simeq 0{,}4$

Η συχνοτική πιθανότητα απαιτεί να γίνει πολλές φορές το "πείραμα".

Ερώτημα: πώς αποδίδουμε αυτό τον αριθμό σ'ένα γεγονός;

→ Μόνη καλή περίπτωση, είναι όταν έχουμε συμμετρία, π.χ. ρίψη ζαριού
Μια άλλη περίπτωση, είναι όταν το πείραμα μπορεί να επαναληφθεί.

Λογισμός των πιθανοτήτων
πχ.: Έχω πολλά γεγονότα $A_1, A_2, \ldots, A_K$ των οποίων ξέρω την πιθανότητα. Πώς βρίσκουμε την πιθανότητα γεγονότων που περιγράφονται, με τη βοήθεια των $A_1, A_2, \ldots, A_K$. πχ. Αν τα A_1, A_2 είναι γεγονότα, που δεν είναι δυνατόν να γίνουν ταυτόχρονα

και ξέρουμε οτι εχουν πιθανοτητα 0,2 και 0,6 αντιστοιχα
Τοτε, η πιθανοτητα να γινει το A_1 ή το A_2 ειναι $0,2+0,6$.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΟ ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ
(i) ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ
(ii) ΝΑ ΑΠΟΔΩΣΟΥΜΕ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ (αριθμος στο $[0,1]$) ΣΕ ΚΑΠΟΙΑ ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΑ
→ θα γίνει μονο σε περιπτωσεις, που εχουμε συμμετρια, δηλαδή "ισοπιθανά" γεγονοτα. (Με την εννοια ισοπιθανα, εννοούμε οτι κανένα δεν έχει προτέρημα εναντι των άλλων)

→ Αν εχουμε πείραμα με n "ισοπιθανα" δυνατοί αποτελεσματα $a_1, a_2, .., a_n$ τοτε δίνουμε πιθανοτητα $\frac{1}{n}$ σε καθενα απο τα $a_1, a_2, .., a_n$.

Εστω $\Omega = \{a_1, a_2, .., a_n\}$. Αν $A \subseteq \Omega$, η πιθανοτητα να συμβει το A είναι $A = \{a_1, a_3, a_8\}$ πιθανοτητα του $A = \frac{3}{4}$.

$$|A| \cdot \frac{1}{n} = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

<u>Επομενος Στοχος</u>: καταμετρηση στοιχειων συνολων.

§1.2 (Ross)

A: σύνολο, $|A| = \#A$ = πλήθος στοιχείων του A

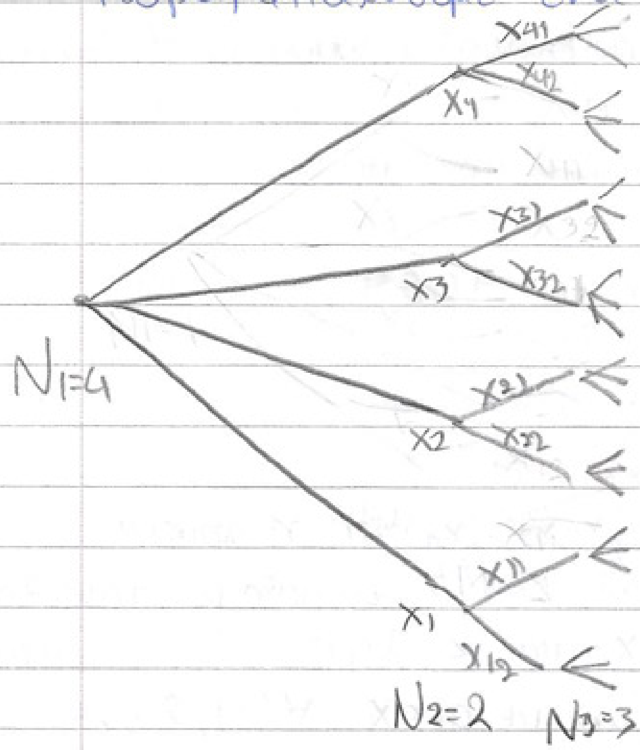
ΠΡΟΣΘΕΤΙΚΗ ΑΡΧΗ: A, B σύνολα με $A \cap B = \emptyset$. Τότε
$|A \cup B| = |A| + |B|$

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΤΙΚΗ ΑΡΧΗ: Έστω ότι φτιάχνουμε μια διατεταγμένη n-άδα $(a_1, \ldots, a_n)$.

Για το a_1 έχουμε N_1 επιλογές
Για κάθε επιλογή του a_1, για το a_2 N_2 "
Για " " a_1, a_2, για το a_3 N_3 "
Για " " $a_1, \ldots, a_{n-1}$ για το a_n N_n "

Τότε, μπορούμε να κατασκευάσουμε $N_1 N_2 \cdots N_n$ n-άδες.

Τώρα, φτιάχνουμε ένα δέντρο.



Κάθε επιλογή διαδρομής απ' τη ρίζα στο φύλλο δίνει την επιλογή (a_1, a_2, a_3)
\# φύλλων στο δέντρο $= 4 \cdot 2 \cdot 3$

– Η πολλαπλασιαστική αρχή, είναι γενικότερα του $|A_1 \times A_2 \cdots \times A_n| = |A_1| \cdots |A_n|$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Φτιάχνουμε πινακίδα με 4 γράμματα από τα $\{A, B, \dots, \Omega\}$. Πόσες τέτοιες πινακίδες υπάρχουν αν:

α) Επιτρέπονται επαναλήψεις γραμμάτων

β) δεν επιτρέπονται " "

-ΛΥΣΗ-

Φτιάχνουμε διατεταγμένη 4-άδα $(a_1, \dots, a_4)$

(α) $= 24 \cdot 24 \cdot 24 \cdot 24 = 24^4$ (Το πλήθος αυτό είναι καρτεσιανό γινόμενο)

(β) $= 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21$ (Το πλήθος αυτό δεν είναι καρτεσιανό γινόμενο, γιατί η επιλογή του επόμενου, επηρεάζει το προηγούμενο.

Παράδειγμα: Πλήθος πινακίδων με 4 γράμματα από το $\{A, B, \Gamma, \dots, \Omega\}$ που είναι όλα σύμφωνα ή όλα φωνήεντα.

-ΛΥΣΗ-

Έστω A = πινακίδες μόνο με φωνήεντα

B = πινακίδες μόνο με σύμφωνα

$|A \cup B| = |A| + |B| = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 + 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14$

προσθετική αρχή

Διατάξεις και Συνδυασμοί

Έστω σύνολο $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ με n στοιχεία.

Ορισμός: Έστω $k \in \mathbb{N}^+$. Διάταξη με επανάληψη των n στοιχείων του X ανά k, λέμε κάθε διατεταγμένη k-άδα $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ με $a_i \in X$, $\forall i = 1, 2, \dots, k$

Ορισμός: Έστω $k \in \mathbb{N}^+$. Διάταξη χωρίς επανάληψη των " " " , " "

με $a_1, \dots, a_k \in X$ διαφορετικά μεταξύ τους.

Ορισμός: Μετάθεση των στοιχείων του X, λέμε κάθε διάταξη (χωρίς επανάληψη) με $k=n$

Παρατήρηση: Στις διατάξεις χωρίς επανάληψη, θα πρέπει $k \leq n$

Πρόταση. (i) Το πλήθος των διατάξεων με επανάληψη των n (στοιχείων του X) ανά k, είναι n^k

(ii). Το πλήθος των διατάξεων των n (στοιχείων του X) ανά k, είναι $n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)$ σε γινόμενο k-όρων.

(iii) Το πλήθος των μεταθέσεων των στοιχείων του X, είναι $n!$

-Απόδειξη-

(i) Φτιάχνουμε μια διατεταγμένη k-άδα $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$
επιλογών για το $a_1 = n$
"
" για το $a_k = n$
Απ' την πολλαπλασιαστική αρχή, # διατάξεων με επανάληψη $= n^k$

(ii) # επιλογών για το $a_1 = n$
για το $a_2 = n-1$
...
επιλογών για το $a_k = n-(k-1)$

πολλαπλασιαστική αρχή: $n(n-1)\ldots(n-k+1)$

(iii) Θέτουμε $k=n$ στο (ii)

$\boxed{\text{Συμβολισμος}}$: $\forall x \in \mathbb{R}$ και $k \in \mathbb{N}^+$, θετουμε
$(x)_k = x(x-1)\cdot \ldots \cdot (x-k+1)$
Αρα, πληθος διαταξεων των n ανα $k = (n)_k$.

Ορισμος: Εστω $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ συνολο
(i) συνδυασμό του n (στοιχειων του X) ανα k, λεμε καθε υποσύνολο του X, με k στοιχεια.

(ii) συνδυασμό με επανάληψη των n (στοιχειων του X) ανά k, λεμε "καθε συλλογη" k στοιχειων του X, που επιτρέπονται επαναληψεις

Παραδειγματα.
i). Ενας προπονητης διαλεγει 5 παικτες απ'τους 12 διαθεσιμους για ένα παιχνίδι
→ Αυτό είναι συνδυασμος των 12 ανά 5.

ii) 10 άτομα παραγγελουν μπύρες σ'ένα μπαρ.
Διαθέσιμες: Bios, Fix, Mythos, Erdinger
4^{10} η διάταξη για τα 4 είδη μπυρας
Για τον σερβιτορο δεν είναι συνδυασμος με επανάληψη.

$\boxed{\text{Συμβολισμός}}$ Για καθε $x \in \mathbb{R}$ και $k \in \mathbb{N}^+$, θετουμε
$$\binom{x}{k} = \frac{(x)_k}{k!} = \frac{x(x-1)\cdot \ldots \cdot (x-k+1)}{k!}$$

Αν $x = n \in \mathbb{N}^+$ με $n \geq k$. Τοτε:
$$(n)_k = n(n-1)\cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n(n-1)\cdot \ldots \cdot (n-k+1)(n-k)\cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}{(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Πρόταση (i): το πλήθος των συνδυασμών του n, ανά k, είναι $\binom{n}{k}$

(ii) Το πλήθος των συνδυασμών με επανάληψη των n ανά k είναι $\binom{n-k+1}{k}$

-Απόδειξη-

(i) Έστω Δ_k^n, Σ_k^n τα σύνολα των διατάξεων και συνδυασμών των n στοιχείων του $X=\{x_1,..,x_k\}$ ανά k.

Ορίζουμε μία απεικόνιση $f: \Delta_k^n \to \Sigma_k^n$ με $f(a_1,a_2,..,a_k)=\{a_1,a_2,..,a_k\}$, ότι είναι 1-1.

$X=\{1,2,3,4,5,6,7\}$

$k=3$

$(4,6,1) \to \{1,4,6\}$

$(1,4,6)$
$(1,6,4)$
$(4,1,6)$
$(6,1,4)$
$(6,4,1)$

όλες δίνουν τον ίδιο συνδυασμό παρ'όλο που δεν είναι 1-1

Δεν είναι 1-1, μάλιστα, είναι $k!$ προς 1
Είναι επί. Άρα $|\Sigma_k^n| k! = |\Delta_k^n|$
$\Rightarrow |\Sigma_k^n| = \frac{|\Delta_k^n|}{k!} = \frac{(n)_k}{k!}$

Βασική Αρχή Μέτρησης: Έστω ότι πρέπει να εκτελέσουμε δύο πειράματα. Αν πείραμα 1: m δυνατά αποτελέσματα και αν για κάθε αποτέλεσμα του πειράματος 1, υπάρχουν n δυνατά αποτελέσματα για το πείραμα 2, τότε υπάρχουν $m \cdot n$ δυνατά αποτελέσματα και για τα δύο πειράματα (6.14/Ross)

4/10/2018 2º μάθημα.

Πιθανότητες J-Χελιώτης

	Διατάξεις	Συνδυασμοί	
Με επανάληψη	n^k	$\binom{n+k-1}{k}$	§1.6 Ross
Χωρίς επανάληψη	$(n)_k$	$\binom{n}{k}$	

$(0!=1)$ $\binom{n}{0}=1$ $\quad \binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}=\frac{(n)_k}{k!}$

→ πλήθος υποσυνόλων του $\{1,2,\dots,k\}$ με k στοιχεία.

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$$

$a_1\ a_2\ a_3\ \ k_1\ k_2\ k_3$

$a_1a_2a_3k_1k_2k_3$

$a_3a_2a_2$

$$\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}$$

$\boxed{\text{Άσκηση 1.7}}$ (Ross)

(α) Με πόσους τρόπους μπορούν να κάτσουν σε μια σειρά 3 αγόρια και 3 κορίτσια

(β) Το ίδιο ερώτημα με το (α) αρκεί να έχει κάθε αγόρι, δίπλα του ένα κορίτσι

(γ) Το ίδιο " με το (α) αν τα αγόρια πρέπει να καθίσουν μαζί

(δ) Το ίδιο με το (α) αν άτομα ίδιου ~~φύλλου~~ φύλου δεν μπορούν να καθίσουν δίπλα.

-ΛΥΣΗ-

(α) 6 άτομα να τα βάλουμε σε σειρά. Οι τρόποι είναι $6!$ $(=6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1)$

(β). -

(γ) Σκεφτόμαστε τα αγόρια ως μια μονάδα ΑΑΑ. Η τριάδα στοιχίζεται με 3! τρόπους. Τα αντικείμενα τα βάζουμε σε σειρά με 4! τρόπους. Άρα, τα 6 άτομα μπαίνουν σε σειρά με 3!4! τρόπους.

δ). Εχουμε δύο σεναρια.

ΑΚΑΚΑΚ

ΚΑΚΑΚΑ

Συνολικά : τα κορίτσια καθονται με 3! τροπους.
Τα αγορια κάθονται κι αυτά με 3! τροπους
Συνολικά, απ'την πολλαπλασιαστική αρχή, το πληθος των τροπων ειναι 2·3!·3!

$\boxed{\text{Ασκηση 1.12}}$

5 διαφορετικά βραβεία δίνονται σε 30 μαθητές μιας τάξης. Ποσοι οι συνδυασμοί των βραβευσεων, αν:

α). ένας μαθητής μπορεί να πάρει περισσοτερα από ενα βραβεια

β) ένας μαθητης μπορει να πάρει το πολύ ενα βραβειο.

-ΛΥΣΗ-

(α) 30^5 βραβεια.

30 πιθανα για 1ο βραβείο
30 πιθανοτητα 2ο βρ

30 πιθανοτητες 5ο βραβ

(β). 30 29 28 27 26

βραβειο B_1 βραβειο B_2

$(30)_5$

6. (19) Pascal

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r} \quad , 1 \leq r \leq n$$

Θεωρούμε μια ομαδα n αντικειμένων και επικεντρωνοντας την προσοχη μας σ'ένα συγκεκριμενο αντικειμενο, πχ. το 1. Τοτε υπάρχουν $\binom{n-1}{r-1}$ ομαδες μεγεθους r που να περιεχουν το αντικειμενο 1. Επισης, υπαρχουν $\binom{n-1}{r}$ ομαδες μεγ. r, που δεν περιέχουν το αντικειμενο 1.

Άσκηση Ποιο το πλήθος λύσεων της $x_1+\dots+x_n=k$,
(α) με $x_i\in\mathbb{N}=\{0,1,2,\dots\}$ και (β) με $x_i\in\{0,1\}$.

-ΛΥΣΗ-

(β). $\binom{n}{k}$, διατί . Έχουμε την αντιστοίχηση $x_1,\dots,x_n \mapsto A=\{i: x_i=1\}\subset\{1,\dots,n\}$
↳ k στοιχεία

(α) Συνδυασμός (με) επανάληψη των n ανά k.
Δηλαδή x_i = πόσες φορές διαλέγουμε το i,
$\#: \binom{n+k-1}{k}=\left[{n \atop k}\right]$

Άσκηση 1.7(β)

Το ~~μόνο~~ κακό σενάριο είναι ένα αγόρι να μην έχει δίπλα του κορίτσι και το άλλο να είναι 3 αγόρια μαζί

§1.5 Διαιρέσεις συνόλου

X: πεπερασμένο σύνολο και $\nu\in\mathbb{N}^+$

ΟΡΙΣΜΟΣ.

Διαίρεση του X σε ν-υποσύνολα λέμε κάθε διατεταγμένη ν-άδα $(A_1,A_2,\dots,A_r)$ με $(A_1,A_2,\dots,A_r)$ με $(A_i)_{1\le i\le r}$ ξένα ανά δύο υποσύνολα του X και $\bigcup_{i=1} A_i=X$

ΠΡΟΤΑΣΗ.

X: σύνολο με $|X|=n\in\mathbb{N}^+$, $n_1,n_2,\dots,n_r\in\mathbb{N}$, με $n_1+n_2+\dots+n_r=n$. Το πλήθος των διαιρέσεων του X σε r: υποσύνολα $(A_1,\dots,A_r)$ με $|A_i|=n_i$ $\forall i$, ισούται με $\dfrac{n!}{n_1!n_2!\dots n_r!}=\binom{n}{n_1,n_2,\dots,n_r}$

↳ τόσες είναι οι μεταθέσεις n αντικειμένων, απ' τα οποία, τα n_1 είναι όμοια, τα n_2 είναι όμοια, ... τα n_r είναι όμοια.

-Αποδ-

\# τρόπων κατάστασης του A_1 $\binom{n}{n_1}$

\# " " του A_2 $\binom{n-n_1}{n_2}$

⋮

\# " " του A_r $\binom{n-n_1-\dots-n_{r-1}}{n_r}$

Με βάση την πολλαπλασιαστική αρχή το πλήθος των δυνατών κατασκευών είναι:

$$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\binom{n-n_1-n_2}{n_3}\cdots\binom{n-n_1-\dots-n_{r-1}}{n_r}=$$

$$=\frac{n!}{n_1!(n-n_1)!}\cdot\frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!}\cdot\frac{(n-n_1-n_2)!}{n_3!(n-n_1-n_2-n_3)!}\cdot(\dots)\cdot\frac{(n-\dots-n_{r-1})!}{n_r!(n-n_1-\dots-n_r)!}$$

$$=\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_r!}$$

Άσκηση 1.18

Έχουμε 5 ρεπουμπλικάνους, 6 δημοκρατικούς, 4 ανεξάρτ. βουλευτές. Με πόσους τρόπους μπορεί να φτιαχτεί μια επιτροπή, ώστε να περιέχει 2 ρεπουμπλικάνους, 2 δημοκρατικούς και 3 ανεξάρτητους.

-ΛΥΣΗ-

$$\binom{5}{2}\binom{6}{2}\binom{4}{3}$$

Άσκηση Ένα λεωφορείο ξεκινάει με 13 φοιτητές. Περνάει από 4 στάσεις. Με πόσους τρόπους μπορεί να αποβιβαστούν 3 φοιτητές στην $1^{η}$ στάση
" 4 " " $2^{η}$ "
" 4 " " $3^{η}$ "
" 2 " " $4^{η}$ "

-ΛΥΣΗ-

$$\binom{13}{3}\binom{10}{4}\binom{6}{4}\binom{2}{2} = \frac{13!}{3!4!4!2!}$$

Διαίρεση του $X=\{1,2,\ldots,13\}$ σε υποσύνολα (A_1,A_2,A_3,A_4) και $|A_1|=3$, $|A_2|=4$, $|A_3|=4$, $|A_4|=2$

ΑΡΧΗ ΕΓΚΛΕΙΣΜΟΥ-ΑΠΟΚΛΕΙΣΜΟΥ (για την συνάρτηση πληθικότ.)

$A_1,\ldots,A_n$ σύνολα πεπερασμένα.

Τότε, $|A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n| = S_{n,1}-S_{n,2}-S_{n,3}-\ldots+(-1)^{n-1}S_{n,n} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}S_{n,k}$,

όπου $S_{n,k}=\sum|A_1\cap\ldots\cap A_k|$

Το $S_{n,k}$ έχει $\binom{n}{k}$ όρους, γιατί αν έχουμε μια επιλογή k στοιχείων απ' τα $\{1,2,\ldots,n\}$
Τα διατάσσουμε και τα ονομάζουμε $i_1<i_2<\ldots<i_k$
πχ: για $k=3$

$|A_1\cup A_2\cup A_3| = |A_1|+|A_2|+|A_3|-|A_1\cap A_2|-|A_1\cap A_3|-|A_2\cap A_3|+|A_1\cap A_2\cap A_3|$

ΑΣΚΗΣΗ Πόσο είναι το πλήθος των φυσικών στο $A=\{1,2,\dots,70n\}, n\in\mathbb{N}^+$;
1) που διαιρούνται με το 5 ή με το 7.
2) " με κάποιο από τα 2, 5, 7.

- ΛΥΣΗ -

$A_i=\{k\in A : i\mid k\}\ \{i=2,5,7\}$

α). $|A_5\cup A_7|=$;

$|A_5|=\left[\frac{70n}{5}\right]=14n \quad , \quad |A_7|=10n.$

$$|A_5\cup A_7|=|A_5|+|A_7|-|A_5\cap A_7|=24n-\left[\frac{70n}{35}\right]=$$
$$=24n-2n$$
$$=22n$$

β). $|A_2\cup A_5\cup A_7|=|A_2|+|A_5|+|A_7|-|A_2\cap A_5|-|A_2\cap A_7|-|A_5\cap A_7|+|A_2\cap A_5\cap A_7|=$
$=35n+14n+10n-7n-5n-2n+n=46n$

ΑΣΚΗΣΗ Κατανομές σφαιριδίων σε κελιά

n κελιά στα οποία κατανέμουμε k σφαιρίδια

(α) Θεωρούμε ότι τα σφαιρίδια είναι διαφορετικά. Να βρεθεί το πλήθος διαφορετικών κατανομών για τα εξής σενάρια

(i) κάθε κελί είναι απεριορίστης χωρητικότητας

(ii) " " χωράει μόνο ένα σφαιρίδιο

(iii) σε κάθε κελί πρέπει να βάλουμε τουλάχιστον ένα σφαιρίδιο

-ΛΥΣΗ-

(i) Κάθε κατανομή είναι μια διάταξη με επανάληψη των n ανά k. Άρα $\#=n^k$.

(ii) (πρέπει $k\leq n$)

$n(n-1)\dots(n-k+1)=(n)_k$ έχουμε μια διάταξη

(iii) Έστω $A_i=\#$ κατανομών που το i κελί είναι $\emptyset$. $N=\#$ όλων των κατανομών $=n^k$. $|A_1\cap A_2\cap\dots\cap A_k|=$
$N-|(A_1\cap A_2\dots\cap A_n)^c|=$

9/10/2018 — 3º μαθημα

Πιθανότητες Ι - τμήμα Χελιώτη

Συνέχεια άσκησης (κατανομές σφαιριδίων σε κελιά)

n κελιά

k σφαιρίδια

(α) Διαφορετικά σφαιρίδια

(iii) Σε κάθε κελί, τουλάχιστον ένα σφαιρίδιο

A_i: πλήθος κατανομών που το i κελί, είναι μη κενό.

S: όλες οι κατανομές $= n^k$.

$|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n| = |S| - |(A_1 \cap \dots \cap A_n)^c| = n^k - |A_1^c \cup A_2^c \cup \dots \cup A_n^c|$

$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| =$
$= |A_1| + |A_2| + |A_3| -$
$- |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| -$
$- |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$

$$|A_1^c \cup A_2^c \cup \dots \cup A_n^c| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \cdot \sum_{1 \le i_1 < i_2 \dots < i_j \le n} |A_{i_1}^c \cap \dots \cap A_{i_j}^c|$$

$$|A_{i_1}^c \cap \dots \cap A_{i_j}^c| = (n-j)^k$$

Άρα: $X = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \binom{n}{j} (n-j)^k$

$$|A_1 \cap \dots \cap A_n| = n^k + \sum_{j=1}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} (n-j)^k = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} (n-j)^k$$

(β) Όμοια σφαιρίδια

ποιο το πλήθος κατανομών αν

(i) κάθε κελί είναι απεριόριστης χωρητικότητας

(ii) κάθε κελί χωράει ένα σφαιρίδιο

(iii) Σε κάθε κελί πρέπει να βάλουμε τουλάχιστον ένα σφαιρίδιο.

-ΛΥΣΗ-

Τώρα, το σύνολο των κατανομών είναι το:

$\{(a_1, a_2, \dots, a_n) : a_i \in \mathbb{N}, \sum_{i=1}^{k} a_i = k\}$

a_i: πόσα σφαιρίδια βάζουμε στο i κελί

(i) κάθε κατανομή δίνει ένα συνδυασμό με επανάληψη των n ανά k (και αντίστροφα)

Το πλήθος τους είναι $\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix}\right] = \binom{n+k-1}{k} = \binom{k-1}{k-n}$

(ii) $\binom{n}{k}$

(iii) Βάζουμε σε κάθε κελί 1 σφαιρίδιο
Μετά, μοιράζουμε τα υπόλοιπα k-n σφαιρίδια, με
$\left[\begin{matrix} n \\ k-n \end{matrix}\right] = \binom{n+k-n-1}{k-n} = \binom{k-1}{k-n}$

§ 2.2 ΧΩΡΟΙ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

Έχουμε ένα τυχαίο φαινόμενο. Το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων, το λέμε δειγματικό χώρο του φαινομένου και συνήθως το συμβολίζουμε με Ω.

Παράδειγμα

α) ρίψη ζαριού: $\Omega = \{1, 2, .., 6\}$

β) κλήρωση Λόττο: $\Omega = \{A \subset \{1, 2, .., 49\}, |A| = 6\}$

γ) χρόνος ζωής ενός ατόμου που μόλις γεννήθηκε: $\Omega = [0,$

Ενδεχόμενο λέμε κάθε υποσύνολο του Ω.

→ Κάθε παρατήρηση του φαινομένου δίνει ένα αποτέλεσμα $\omega \in \Omega$. Λέμε ότι το ενδεχόμενο $A \subset \Omega$ πραγματοποιείται αν $\omega \in A$

πχ: στο ζάρι $A = \{2, 4, 6\}$. Το A: πραγματοποιείται αν έρθει ζυγός

→ Θέλουμε σε κάθε $A \subset \Omega$ να αντιστοιχήσουμε έναν αριθμό $P(A)$, την πιθανότητα πραγματοποίησης του

Ορισμος

Συνάρτηση πιθανότητας στον Ω, λέμε καθε απεικόνιση $P: \mathcal{P}(\Omega) \to \mathbb{R}$ με τις ιδιότητες:

i). $P(A) \in [0,1]$ $\forall A \subset \Omega$

ii). $P(\Omega) = 1$

iii). $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$ $\forall$ ακολουθία ενδεχομενων $(A_n)_{n \geq 1}$ που είναι ξενα ανά δυο

→ Ο ορισμος <u>ΔΕΝ είναι απολύτα σωστός</u>. Συνηθως, η P δεν ορίζεται σ'ολο το $\mathcal{P}(\Omega)$, αλλά σε ενα $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$, που είναι σ-άλγεβρα.

ΠΡΟΤΑΣΗ. (Συνεπειες 1)

Εστω P συνάρτηση πιθανότητας στον Ω. Τοτε

(α) $P(\emptyset) = 0$

(β). $P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$ $\forall A_1, .., A_n \subset \Omega$ ξένα ανά δύο

(γ) $P(B \setminus A) = P(B) - P(B \cap A)$ $\forall A, B \subset \Omega$

<u>ΕΙΔΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ</u>

$P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$, αν $A \subset B \subset \Omega$

$P(\Omega \setminus A) = 1 - P(A)$, αν $A \subset \Omega$

(δ) $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

(ε) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq P(A) + P(B)$

-Αποδ-

(α) Η (iii) του ορισμού για $A_i = \emptyset$ $\forall i$ δίνει $P(\emptyset) = \sum_{i=1}^{\infty} P(\emptyset) \Rightarrow P(\emptyset) = 0$

(β) Θετουμε $A_j = \emptyset$ $\forall j \geq n+1$ και τοτε η (iii), δίνει $P(\bigcup_{j=1}^{n} A_j) = P(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} P(A_j) =$ (ξενα ανά δυο)

$= \sum_{j=1}^{n} P(A_j)$

(γ). $B = (B \cap A) \cup (B \cap A^c)$

$P(B) = P(B \cap A) + P(B \setminus A)$ (ε)

$P(B \setminus A) = P(B) - P(B \cap A)$

<u>Αν $A \subset B$</u>, τότε $B \cap A = A$

Άρα $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$.

<u>Αν $B = \Omega$</u>, τότε $P(B) = 1$.

(δ) $P(B) \overset{A \subset B}{=} P(A \cup (B \setminus A)) = P(A) + P(B \setminus A) \geq P(A)$

(ε). $A \cup B = \underbrace{(A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)}_{\text{ξένα ανά δύο}} \overset{(\beta)}{\Rightarrow}$

$\overset{(\beta)}{\Rightarrow} P(A \cup B) = P(A \setminus B) + P(B \setminus A) + P(A \cap B) \overset{(\gamma)}{=}$

$\overset{(\gamma)}{=} P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(B \cap A) + P(A \cap B)$

$= P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

ΠΡΟΤΑΣΗ (Συνέπειες Ω).

Ω, P όπως πριν. Τότε:

(α) $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ $\forall (A_i)$ τότε υποσύνολο του Ω

(β) Αν η $(A_i)_{i \geq 1}$ είναι αύξουσα ακολουθία υποσύνολο του Ω, τότε: $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i \to \infty} P(A_i)$

(γ). Αν η $(A_i)_{i \geq 1}$ είναι φθίνουσα ....

.. $(A_i \supset A_{i+1}\ \forall i \geq 1)$, τότε $P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i \to \infty} P(A_i)$

-Απόδειξη-

$\longrightarrow$

(α) Έστω $B_1 = A_1$, $B_2 = A_2 \setminus A_1$, ..., $B_n = A_n \setminus (A_1 \cup \ldots \cup A_{n-1})$

Το $(B_i)_{i \geq 1}$ είναι ξένα ανά δύο

[Για $i<j$, $B_i \subset A_i$, ενώ $B_j \cap A_i = \emptyset$]

και $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$

• Το $\subset$ είναι προφανές. Αν τώρα $x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, $\exists$ ελάχιστο $i_0 \geq i$, ώστε $x \in A_{i_0}$, τότε $x \in B_i \left(= A_{i_0} \setminus (A_1 \cup \ldots \cup A_{i_0-1}\right)$

Έτσι, $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) \underset{\substack{B_i \text{ ξένα} \\ \text{ανά δύο}}}{=} \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i) \underset{B_i \subset A_i}{\leq} \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

ΠΡΟΤΑΣΗ (Αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού)

Ω, P όπως πριν

Τότε, για κάθε $A_1, A_2, \ldots, A_n \subset \Omega$, ισχύει

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 \leq \ldots \leq i_k \leq n} P(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k})$$

§2.5 (Ross) Κλασικός ορισμός της πιθανότητας

Φυσιολογικός ορισμός για την P υπάρχει, όταν ο Ω περιέχει «ισοπίθανα» αποτελέσματα

Το «ισοπίθανα» προκύπτει από κάποια συμμετρία ή από άγνοια

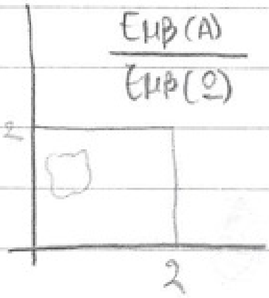
<u>Κύριο παράδειγμα</u>

· Όταν το Ω είναι πεπερασμένο με «ισοπίθανα» στοιχεία $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N$, τότε $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$ για $\forall A \subset \Omega$

(Αυτό, γιατί $P(\{\omega_i\}) = c$, $\forall i = 1, \ldots, N$

Επειδή $1 = P(\Omega) = P\left(\bigcup_{i=1}^{N} \{\omega_i\}\right) = Nc \Rightarrow c = \frac{1}{N}$

Άρα, $P(A) = P\left(\bigcup_{\omega \in A} \{\omega\}\right) = \sum_{\omega \in A} (P\{\omega\}) = \frac{1}{N} \cdot |A| = \frac{|A|}{|\Omega|}$)



Αλλο παράδειγμα

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ και «ισοπιθανα», είναι συνολα με ισο εμβαδον (με $\Omega = [0,2]^2$).

ΑΣΚΗΣΗ

Σε μια πολη $k+1$ ατομων, ενα ατομο επιλεγει στην τυχη καποιο αλλο και του λεει μια φημολογια. Το δεύτερο άτομο κανει το ιδιο και η διαδικασία συνεχιζεται ομοια.

Να βρεθούν οι πιθανοτητες:

i). Η φημολογια να ειπωθει r φορές, χωρίς να επιστρεψει σ'αυτόν που την ξεκινησε

ii). χωρις να ακουστη απο καποιον που την ξερει ηδη

-ΛΥΣΗ-

i) Εστω $1,2,\dots,n+1$. και a: αυτός που ξεκινάει τη διαδοση. Χωρίς πιθανοτητες $\Omega = \{(x_1,\dots,x_{n+1})\}$ με $x_i \in \{1,\dots,n+1\}$, $x_i \neq a$ $\forall i = 1,2,\dots,n+1$

x_i: ο αποδεκτης της $i-1$ διαδοσης.

$|\Omega| = n \cdot n \overset{?}{,} \quad n = n^r$

$A = \{x = (x_1,\dots,x_r) \in \Omega, \ x_i \neq a \ \forall i = 1,\dots,r+1\}$

$|A| = n \cdot (n-1) \quad , (n-1) = n(n-1)^{r-1}$

Άρα, $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{n(n-1)^{r-1}}{n^r} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{r-1}$

$B = \{x = (x_1,\dots,x_{r+1}\} \in \Omega$

$|B| = n(n-1)(n-2)\dots(n-(r-1)) = (n)_r$

Αρα $P(B) = \frac{(n)_r}{n^r}$

ΑΣΚΗΣΗ

Τάξη μαθητών $a_1, .., a_k$. Ποια η πιθανότητα $a_1, .., a_k$ να έχει ίδια μέρα γενέθλια με κάποιον από τους υπόλοιπους μαθητές.

-ΛΥΣΗ-

$\Omega = \{(x_1, .., x_k) : x_1, .., x_k \in \{1, 2, .., 365\}\}$

A: το ενδεχόμενο στο ερώτημα

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{|A^c|}{|\Omega|} = 1 - \frac{365\,(364)^{k-1}}{(365)^n} =$$

$$= 1 - \left(\frac{364}{365}\right)^{k-1}$$

11.10.2018 4º μάθημα

Πιθανότητες I

Άσκηση 1.13 (φυλλάδιο)

Κάλπη περιέχει 1000 σφαιρίδια, 25: μαύρα, 30: άσπρα, 945: κόκκινα. Επιλέγουμε 15 σφαιρίδια στην τύχη.
Ποια είναι η πιθανότητα να έχουμε επιλέξει:
(α) ακριβώς 3 κόκκινα σφαιρίδια;
(β) " 2 μαύρα κ' 3 άσπρα
(γ) " 4 κόκκινα και τουλάχιστον 2 μαύρα.

-ΛΥΣΗ-

Δειγματικός χώρος $\Omega = \{A \in \{1, \dots, 1000\} : |A| = 15\}$

$|\Omega| = \binom{1000}{15}$

(α) $= \dfrac{\binom{945}{3} \cdot \binom{55}{12}}{\binom{1000}{15}}$ ...

(β) $\dfrac{\binom{25}{2}\binom{30}{3}\binom{945}{10}}{\binom{1000}{15}}$ ...

(γ) # τρόπων επιλογής κοκκινων $= \binom{945}{4}$

τρόπων επιλογής των υπολοίπων, ωστε να έχουμε τουλάχιστον δυο μαύρα =

$\binom{55}{11}$ - # τρόπων με 0 μαύρα - # τρόπων με 1 μαύρο

(*) $= \binom{55}{11} - \binom{30}{11} - \binom{25}{1}\binom{30}{10}$

Το πρόβλημα των γενεθλίων (Ross σελ. 52)
Σ' ένα σύνολο $n \leq 365$ ατόμων ποια είναι η πιθανότητα τουλάχιστον δύο άτομα να έχουν την ίδια ημερομηνία γέννησης

-ΛΥΣΗ-

Έστω A το ενδεχόμενο στην εκφώνηση
(Δειγματικός χώρος: $\Omega = \{(x_1, .., x_n), x_i \in \{1, 2, .., 365\}\}$)

Ιδέα: Βρίσκω την πιθανότητα του συμπληρώματος του A

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot (365-(n-1))}{(365)^n} =$$

$$= 1 - \frac{(365)_n}{365^n}$$

Οι τιμές του P(A) είναι οι εξής

n	10	20	23	30	50	60
P(A)	0,117	0,411	0,507	0,568	0,97	0,99

Άσκηση 1.21 (φυλλάδιο)
Ρίχνουμε ένα ζάρι n φορές ($n \geq 2$). Να βρεθούν οι πιθανότητες
(α) Να εμφανιστεί τουλάχιστον 2 φορές το 6.
(β) " " " και καμία φορά το 1.

-ΛΥΣΗ-

(α) Έστω X: ο αριθμός εμφανίσεων του 6
$P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - P(X=0) - P(X=1) =$ $(\{X=0\} \cup \{X=1\})$
$1 - \frac{5^n}{6^n} - \frac{n \cdot 5^{n-1}}{6^n}$

(β) A = κανένα 1 στις ρίψεις $P(A \cap \{X \geq 2\}) =$
$= P(A) - P(A \setminus \{X \geq 2\}) = P(A) - P(A \cap \{X \leq 1\}) =$
$P(A) - (P(A \cap \{X=0\}) + P(A \cap \{X=1\}))$ →

$$= P(A) - \left(P(A \cap X=0) + P(A \cap \{X=1\}\right) =$$

$$= \frac{5^n}{6^n} - \frac{4^n}{6^n} - \frac{n \cdot 4^{n-1}}{6^n}$$

⊛ Στη λύση της 1.13 (γ), ο αριθμητής, είναι το γινόμενο : $\binom{945}{4}\left\{\binom{55}{11} - \binom{30}{11} - \binom{25}{1}\binom{30}{10}\right\}$

Άσκηση 1.30 / φυλλάδιο

n διαφορετικές επιστολές μοιράζονται σε n διαφορετικούς φακέλους. Σε κάθε επιστολή αντιστοιχεί συγκεκριμένος φάκελος. Ποια η πιθανότητα, όλες οι επιστολές να πάνε σε λάθος φάκελο;

-ΛΥΣΗ-

$A_i = \{$ η i επιστολή πάει στο σωστό φάκελο $\}$

$$P(A_1^c \cap A_2^c \cap \dots \cap A_n^c) = P((A_1 \cup \dots \cup A_n)^c) =$$
$$= 1 - P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n)$$

$$P(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 \le \dots \le i_k \le n} P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_n}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 \le \dots \le i_n \le n} \frac{(n-k)!}{n!} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} \frac{(n-k)!}{n!} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \cdot \frac{1}{k!}$$

Η αρχική πιθανότητα είναι $1 - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \cdot \frac{1}{k!} =$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} \cdot \frac{1}{k!} \; ☆$$

[Παρατήρηση: για $n \to \infty$, η ☆ $\to e^{-1}$]

5

[Εφαρμογή αρχής ΕΓΚΛΕΙΣΜΟΥ-ΑΠΟΚΛΕΙΣΜΟΥ]

Ασκηση 1.23 /φυλλάδιο

n λαχνοί: 1,2,…,n σε μια κληρωτίδα.
Βγάζουμε εναν λαχνό, γράφουμε το νούμερο του και τον επιστρέφουμε. Το κάνουμε k≥3 φορές.
Ποια η πιθανοτητα:
(α) Να επιλεγεί το 1 τουλάχιστον μιαφορά
(β) Να επιλεγούν οι 1,2,3 τουλάχιστον μια φορά ο καθένας

-ΛΥΣΗ-

(α) Το ενδεχόμενο στην ερωτηση $P(A) = 1 - P(A^c) =$
$= 1 - \frac{(n-1)^k}{n^k}$

(β) A_i = Επιλεγεται ο i τουλάχιστον μια φορά
$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 1 - (P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)^c) =$
$= 1 - P(A_1^c \cup A_2^c \cup A_3^c)$
$= 1 - (P(A_1^c) + P(A_2^c) + P(A_3^c) - P(A_1^c \cap A_2^c) - P(A_1^c \cap A_3^c) - P(A_2^c \cap A_3^c) +$
$+ P(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c)) =$
$= 1 - \left(\frac{(n-1)^k}{n^k} \cdot 3 - \frac{(n-2)^k}{n^k} \cdot 3 + \frac{(n-3)^k}{n^k}\right)$

$\boxed{P(A_1^c) = P(A_2^c) = P(A_3^c) = \frac{(n-1)^k}{n^k}}$

¥ § 2.5 Ross

§ 3.2 (Ross)

ΔΕΣΜΕΥΜΕΝΗ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ

Εστω Ω δειγματικός χώρος, P: συνάρτηση πιθανότητας στον Ω

Ορισμός

Για $A, B \subseteq \Omega$, με $P(B) > 0$, ορίζουμε:
$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ και το λεμε:

δεσμευμένη πιθανοτητα του A, δεδομένου του B.

Παράδειγμα: Έχουμε κάλπη με 5 άσπρες, 15 μαύρες, 10 κόκκινες σφαίρες. Εξάγουμε μία στην τύχη. Έστω $A=\{$η σφαίρα είναι άσπρη$\}$ και $B=\{$η σφαίρα <u>δεν</u> είναι κόκκινη$\}$

$$P(A)=\frac{5}{30}, \quad P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{5}{30}}{\frac{20}{30}}=\frac{5}{20}$$

→ Ερώτημα

Πως θα υπολογίζαμε την P(η σφαίρα : άσπρη αν ξέρουμε ότι δεν είναι κόκκινη), έστω $P(C)$

$$P(C)=\frac{5}{20}$$

<u>Σημασία του $P(A|B)$</u>

① <u>Υποκειμενική ερμηνεία</u>: Βαθμός πεποίθησης ότι συνέβη το A, αν ξέρουμε ότι συνέβη και το B

② <u>Συχνοτική ερμηνεία (αντικειμενική)</u>: Κάνουμε ένα πείραμα N φορές. Έστω $N_A(n)$ το πλήθος των φορών που συμβαίνει το γεγονός Γ.

$$P(A|B)=\lim_{n\to\infty}\frac{N_{A\cap B}(n)}{N_B(n)}$$

$$P(A)=\lim_{n\to\infty}\frac{N_A(n)}{n}$$

Η συχνότητα που συμβαίνει το A, ανάμεσα στις πραγματοποιήσεις του πειράματος που συμβαίνει το B.

Βλέπουμε ότι $\lim_{n\to\infty}\frac{N_{A\cap B}(n)}{N_B(n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{N_{A\cap B}(n)}{n}}{\frac{N_B(n)}{n}}=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$

Παρατήρηση

Η απεικόνιση $P_B: \mathcal{P}(\Omega)\to[0,\infty)$ με $P_B(A)=P(A|B)$ είναι συνάρτηση πιθανότητας, <u>γιατί</u>:

1). $0\le P(A|B)\le 1 \Leftrightarrow 0\le P(A\cap B)\le P(B)$, ισχύει <u>και</u>

2). $P_B(\Omega)=P(\Omega|B)=\frac{P(\Omega\cap B)}{P(B)}=\frac{P(B)}{P(B)}=1$ και

3) $(A_n)_{n\ge1}$: ξένα ανά δύο

$$P_B\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \frac{P\left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \cap B_n\right)}{P(B)} = \frac{P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n \cap B)\right)}{P(B)} =$$

$$= \frac{\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n \cap B)}{P(B)} = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n \mid B) = \sum_{n=1}^{\infty} P_B(A_n)$$

Συνεπώς, ισχυουν οι γνωστεί σχέσης, πχ:
$P(A \mid B) = 1 - P(A^c \mid B)$

→ Αρχη εγκλεισμου-αποκλεισμου κλπ.

$\boxed{\text{Υπολογισμός της } P(A \mid B)}$

1ος τροπος: Με τον ορισμο $\dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$

2ος τροπος: Αλλαζουμε χώρο πιθανότητας. Αν Ω ηταν ο αρχικός χώρος, ο νέος χωρος προκύπτει αν κρατήσουμε απ' τα στοιχεία του Ω, μονο αυτά που ειναι συμβατα με το Β.

$\boxed{\text{Ασκηση 2.1 / φυλλαδιο}}$

Ποια η πιθανοτητα, μια ρίψη δύο ζαριών να είναι 6, 6 αν ξέρουμε ότι περιεχει τουλάχιστον ενα 6.

-ΛΥΣΗ-

A_i: το ζάρι i φέρνει 6

$$P(A_1 \cap A_2 \mid A_1 \cup A_2) = \frac{P((A_1 \cap A_2) \cap (A_1 \cup A_2))}{P(A_1 \cup A_2)} =$$

$$= \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)} = \frac{\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}}{\frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{6 \cdot 6}} =$$

Χρήσιμος τύπος: $P(A \cap B) = P(B)\,P(A|B)$, αν $P(B)>0$
και $P(A\cap B) = P(A)\,P(B|A)$, αν $P(A)>0$

$\boxed{\text{Παράδειγμα}}$

Κάλπη περιέχει 6 μαύρα, 4 άσπρα σφαιρίδια. Εξάγουμε δύο διαδοχικά χωρίς επανατοποθέτηση. Ποια η πιθανότητα και τα δύο να είναι άσπρα;

-ΛΥΣΗ-

A_i: το i σφαιρίδιο είναι άσπρο

$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2|A_1) = \frac{4}{10}\frac{3}{9}$ → αλλάξαμε χώρο πιθανότητας!

Πολλαπλασιαστικός τύπος

$A_1, \dots, A_n \subseteq \Omega$, με $P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) > 0$. Τότε:

$P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1\cap A_2)\dots P(A_n|A_1\cap \dots \cap A_{n-1})$

-Αποδ-

Το δεξί μέλος ισούται με:

$$= P(A_1)\cdot\frac{P(A_1\cap A_2)}{P(A_1)}\cdot\frac{P(A_3\cap A_1\cap A_2)}{P(A_1\cap A_2)}\cdot(\dots)\cdot\frac{P(A_n\cap A_1\cap\dots\cap A_{n-1})}{P(A_1\cap\dots\cap A_{n-1})}$$

Άσκηση 2.6 (φυλλάδιο)

Βασιλόπιτα με n κομμάτια. Κάποιος τα δίνει το ένα μετά το άλλο σε μια ουρά n ατόμων. Νόμισμα υπάρχει σ'ένα κομμάτι ακριβώς. Για $k\in\{1,2,\dots,n\}$ να βρεθεί η πιθανότητα (α) το νόμισμα να βρεθεί στην r δοκιμή (β). Το νόμισμα να μην βρεθεί ως την r δοκιμή

-ΛΥΣΗ-

A_i: το νόμισμα βρίσκεται στην i-δοκιμή

(α) $P(A_r) = P(A_1^c \cap A_2^c \cap \dots \cap A_{r-1}^c \cap A_r^c) =$

$= P(A_1^c)P(A_2^c|A_1^c)P(A_3^c|A_1^c\cap A_2^c)\dots P(A_r|A_1^c\cap\dots\cap A_{r-1}^c) =$

(8)

$$= \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n-1} \cdot (\dots) \cdot \frac{n-(r-2)-1}{n-(r-2)} \cdot \frac{1}{n-(r-1)} = \frac{1}{n}$$

(β) $P(A_1^c \cap A_2^c \cap \dots \cap A_r^c) = \dots = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n-1} \cdot (\dots) \cdot \frac{n-r+1}{n-(r-2)} \cdot \frac{n-r}{n-r+1} =$

$= \frac{n-r}{n}$

16.10.2018 5º μάθημα

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ Ι - ΤΜΗΜΑ ΧΕΛΙΩΤΗ

[Διαμέριση: $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ για $i \neq j$]

§3.3 Θεώρημα ολικής πιθανότητας και τύπος Bayes

$A_1, A_2, \dots, A_n$ διαμέριση του Ω με $P(A_i) > 0$ $\forall i$

Θεώρημα ολικής πιθανότητας

Για κάθε $B \subset \Omega$, ισχύει $P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) P(B | A_i)$

Η πρώτη ισότητα της παραπάνω σχέσης, αποδεικνύεται απ' την ιδιότητα (iii) της P: $P(\cup \Gamma_i) = \sum P(\Gamma_i)$, Γ_i: ξένα ανά δύο

Άσκηση 2.11 - φυλλάδιο

Επιλέγουμε ένα λαχνό στην τύχη απ' τους $1, 2, \dots, n$. Αν η ένδειξη του είναι i, ρίχνουμε ένα ζάρι i φορές. Ποια η πιθανότητα εμφάνισης 3 και 5 τουλάχιστον μια φορά το καθένα.

-ΛΥΣΗ-

Έστω B_j, το j έρχεται τουλάχιστον μια φορά, $j = 1, \dots, 6$

Θέλουμε την $P(B_3 \cap B_5)$. Έστω και $A_i = \{$επιλ. λαχνό $i\}$, $i = 1, \dots, n$. Το A_i είναι διαμέριση του Ω

$P(B_3 \cap B_5) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) P(B_3 \cap B_5 | A_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} P(B_3 \cap B_5 | A_i)$

Θα χρησιμοποιήσουμε αρχή εγκλ.-αποκλεισμού

$P(B_3 \cap B_5 | A_i) = 1 - P(B_3^c \cup B_5^c | A_i)$

$= 1 - [P(B_3^c | A_i) + P(B_5^c | A_i) - P(B_3^c \cap B_5^c | A_i)]$

$= 1 - \left(\frac{5^i}{6^i} + \frac{5^i}{6^i} - \frac{4^i}{6^i} \right) = 1 - 2 \cdot \frac{5^i}{6^i} + \frac{4^i}{6^i}$

Ασκηση 2.9 - Φυλλάδιο

Εχουμε δυο κάλπες K_1, K_2 με σφαιρίδια όπως στην εικόνα

K_1 $\quad$ K_2

$|5A\,|\,7M|$ $\quad$ $|3A\,|\,5M|$

Μεταφερουμε ενα σφαιρίδιο απ'την K_1 στην K_2 και μετά ένα απ'την K_2 στην K_1. Ποια η πιθανότητα το 2^o σφαιρίδιο να είναι άσπρο;

-ΛΥΣΗ-

$A_1 = \{$το πρωτο σφαιριδιο ειναι ασπρο$\}$

$A_2 = A_1^c$

$B = \{$το δευτερο σφαιριδιο ειναι άσπρο$\}$

$$P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2)$$

$$= \frac{5}{12}\cdot\frac{4}{9} + \frac{7}{12}\cdot\frac{3}{9}$$

Σχόλιο: Εφαρμόζουμε το θεώρημα ολικής πιθανότητας, όταν εχουμε πείραμα σε δυο στάδια, το πρώτο στάδιο επηρεάζει το δεύτερο, και μας ενδιαφέρει η πιθανότητα ενδεχομένου που αφορά το δευτερο στάδιο.
Για διαμέριση $A_1, A_2, \ldots, A_n$ παιρνουμε τα πιθανά αποτελέσματα του πρώτου σταδίου.

Τύπος του Bayes

Αν $A_1, \ldots, A_n \subset \Omega$ διαμέριση με $P(A_i) > 0\ \forall i = 1, \ldots, n$ και $B \subset \Omega$ με $P(B) > 0$. Τότε:

$$P(A_k|B) = \frac{P(A_k)P(B|A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)} \quad \forall k = 1, \ldots, n$$

- Απόδειξη -

$$P(A_k|B) = \frac{P(A_k \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_k)P(B|A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i)} = \frac{P(A_k)P(B|A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)}$$

• Το $P(A_k|B)$ εκφράζει το βαθμό κατά το οποίο το ενδεχόμενο A_k ευθύνεται για την πραγματοποίηση του B.

Ασκηση 2.16 - φυλλάδιο

Έχουμε δύο κάλπες με σύνθεση

X: 3 μαύρα, 5 άσπρα σφαιρίδια

Y: 1 μαύρο, 9 άσπρα "

Επιλέγουμε μια κάλπη στην τύχη και απ' αυτήν επιλέξαμε διαδοχικά με επανάθεση 4 σφαιρίδια. Αν και τα 4 είναι άσπρα ποια η πιθανότητα να έχουμε επιλέξει στην αρχή την X.

-ΛΥΣΗ-

Έστω A_1: {επιλέγεται η X}

A_2: {επιλέγεται η Y}

B = τα 4 σφαιρίδια είναι άσπρα.

$$P(A_1|B) = \frac{P(B \cap A_1)}{P(B)} = \frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{5^4}{10^4}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{5^4}{10^4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{9^4}{10^4}} =$$

$$= \frac{5^4}{5^4 + 9^4} \simeq 0,08$$

Παραδ. 3γ. σελ.82 - Ross

Τεστ πολλαπλής επιλογής. Κάθε ερώτηση έχει M επιλογές. Ο εξεταζόμενος ξέρει την απάντηση με πιθανότητα p. Όταν δεν την ξέρει, επιλέγει στην τύχη μία απ' τις M. Ποια η πιθανότητα ο εξεταζόμενος να γνώριζε την απάντηση σε μια ερώτηση δεδομένου ότι την απαντά σωστά;

-ΛΥΣΗ-

A_1 = {ο εξεταζόμενος ξέρει την ερώτηση}

$A_2 = A_1^c$ $\quad$ B = {απαντάει σωστά}

$$P(A_1|B) = \frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)} =$$

$$= \frac{p \cdot 1}{p \cdot 1 + (1-p)\frac{1}{M}} \quad , \quad 1 > p \Rightarrow p + (1-p)\cdot\frac{1}{M} < 1$$

$$p\left(1-\frac{1}{M}\right) < 1 - \frac{1}{M}$$

Άσκηση 2.17 - Φυλλάδιο

Σ' έναν πληθυσμό το 0,1% πάσχει από μία ασθένεια X. Ένα τεστ κάνει λάθος στο 1% των υγιών.* Επιλέγουμε ένα τυχαίο άτομο και το τεστ λέει ότι είναι ασθενής. Ποια η πιθανότητα το άτομο να είναι ασθενής

* και κάνει λάθος στο 5% των ασθενών.

-ΛΥΣΗ-

A_1 = {το άτομο είναι ασθενής}

$A_2 = A_1^c$

$P(A_1) = 0,001$ $\quad$ B = {το τεστ δηλώνει ότι το άτομο είναι ασθενής}

$P(B^c|A_1) = 0,05$ $\quad$ $P(B|A_1^c) = 0,01$

$P(B|A_1) = 0,95$ $\quad$ $P(B^c|A_1^c) = 0,99$

$$P(A_1|B) = \frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)} = \frac{\frac{1}{10^3}\cdot\frac{95}{100}}{\frac{1}{10^3}\cdot\frac{95}{100} + \frac{999}{10^3}\cdot\frac{1}{100}} = \frac{95}{95+999}$$

$\simeq 0,086$

Σε πληθυσμό 100000

Ασθενής $\approx 100 \xrightarrow{\text{τεστ}} 95$ ασθενείς

Υγιείς $\approx 99900 \rightarrow 999$ ασθενείς

Στους 10^5 έχουμε $999 + 95$ με θετικό τεστ

$\boxed{\text{Άσκηση}}$ (το παράδοξο Monty Hall)

3 πόρτες Π_1, Π_2, Π_3 σε μια από αυτές, υπάρχει ένα αμάξι, οι άλλες άδειες.

Επιλέγουμε την Π_1, ο παρουσιαστής ανοίγει την Π_2 και είναι άδεια. Ποια η πιθανότητα να είναι το αμάξι στην Π_1; σε καθένα απ' τα εξής σενάρια:

(α) ο παρουσιαστής επιλέγει στην τύχη ποια πόρτα ανοίγει

(β) " " " " με τον περιορισμό να ανοίξει μια άδεια

-ΛΥΣΗ-

Έστω $A_1 = \{$η Π_1 έχει το αμάξι$\}$

$B = \{$ο παρουσιαστής ανοίγει την Π_2 και αυτή είναι άδεια$\}$

Μας ενδιαφέρει $\left[X = P(A_1 | B) = \dfrac{P(A_1) P(B|A_1)}{P(A_1)P(B|A_1) + P(B|A_1^c) P(A_1^c)} \right]$

$P(A_1) = 1/3$

Σενάριο (α) : $P(B|A_1) = 1/2$, $P(B|A_1^c) = 1/2 \cdot 1/2 = 1/4$

Άρα $X = \dfrac{1/3 \cdot 1/2}{1/3 \cdot 1/2 + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4}} = \dfrac{1/6}{1/6 + 1/6} = 1/2$

Σενάριο (β) : $P(B|A_1) = 1/2$, $P(B|A_1^c) = 1/2 \cdot 1$

Οπότε $X = \dfrac{1/3 \cdot 1/2}{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + 2/3 \cdot 1/2} = \dfrac{1}{3}$

ΑΝΕΞΑΡΤΗΣΙΑ

$A, B \subset \Omega$

Θέλουμε να τα πούμε ανεξάρτητα όταν

$P(A|B) = P(A)$ και $P(B|A) = P(B)$
$P(B) \neq 0$ $\quad P(A) \neq 0$

Δηλαδή, $P(A \cap B) = P(B)P(A)$ και $P(B \cap A) = P(A)P(B)$

Ορισμός

Τα $A, B \subset \Omega$ λέγονται ανεξάρτητα αν
$P(A \cap B) = P(A)P(B)$

πχ: 1). Ρίχνουμε ζάρι 2 φορές. Έστω A = πρώτη ένδειξη 3
B = η δεύτερη ένδειξη είναι 5

Τα A, B: ανεξάρτητα

$P(A) = \frac{1 \cdot 6}{6 \cdot 6} = \frac{1}{6}$ $\quad P(B) = \frac{6 \cdot 1}{6 \cdot 6} = \frac{1}{6}$

$P(A \cap B) = \frac{1 \cdot 1}{6 \cdot 6} = P(A)P(B)$

πχ: 2). Ross σελ. 96 /4γ.

A = {το άθροισμα των ζαριών είναι 6}
B = { το πρώτο ζάρι φέρνει 4 }
$\tilde{A}$ = {το άθροισμα είναι 7}

Τα A, B: δεν είναι ανεξάρτητα, ενώ τα $\tilde{A}, B$ είναι.

$\rightarrow P(A \cap B) = P(\text{το πρώτο } 4, \text{ το δεύτερο } 2) = \frac{1 \cdot 1}{6 \cdot 6} = \frac{1}{36}$

$P(A) = P(\{(1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)\}) = 5/36$

$P(B) = 1/6$ $\quad P(A)P(B) = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{36} \neq P(A \cap B)$

Άρα, όχι ανεξάρτητα

$P(B|A) = \frac{1/36}{5/36} = \frac{1}{5}$

$P(\tilde{A} \cap B) = P($το πρώτο 4, το δεύτερο 3$) = \frac{1}{36}$

$P(\tilde{A}) = P(\{(1,6), \ldots, (6,1)\}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

$P(\tilde{A} \cap B) = P(\tilde{A})P(B)$ ανεξάρτητα

$P(B | \tilde{A}) = \ldots$

Ασκηση 2.26 - φυλλάδιο

Αν A, B ανεξάρτητα, τότε:

i). A, B^c : ανεξάρτητα

ii). A^c, B "

iii). A^c, B^c "

- ΛΥΣΗ -

i). $P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B)$
$= P(A) - P(A)P(B)$
$= P(A) \cdot (1 - P(B)) = P(A)P(B^c)$

ii). έπεται απ' το (i)

iii) ...

Ορισμός

Εστω $(A_i)_{i \in I}$ υποσύνολο του Ω. Λεμε ότι είναι ανεξάρτητα αν $\forall k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ και $i_1, i_2, \ldots, i_k \in I$ διαφορετικούς δείκτες, ισχύει $P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2}) \ldots P(A_{i_k})$ ⊛

→ Αν η ⊛ ισχύει για ένα συγκεκριμένο k και όλα τα $i_1, \ldots, i_k \in I$ διαφορετικά, λέμε ότι τα $(A_i)_{i \in I}$ είναι ανεξάρτητα ανά k.

$\boxed{\text{ΑΣΚΗΣΗ}}$ Αν A, A ανεξάρτητα, να βρεθεί η $\overline{P(A)}$

$P(A \cap A) = P(A)P(A) \Leftrightarrow P(A) = P^2(A)$

23.10.2018 6º μάθημα

Πιθανότητες Ι - τμήμα Χελιώτη

Παράδειγμα (ανά δύο αλλά όχι πλήρως ανεξάρτητα ενδεχόμενα)

Ρίχνουμε ένα ζάρι δύο φορές. Έστω τα ενδεχόμενα

$A = \{$η πρώτη ένδειξη είναι άρτιος$\}$

$B = \{$η δεύτερη ένδειξη είναι άρτιος$\}$

$\Gamma = \{$το άθροισμα των ενδείξεων είναι άρτιος$\}$

Τα A, B, Γ είναι ανά δύο ανεξάρτητα

$$P(A) = P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$P(\Gamma) = P($άρτιος, άρτιος$) + P($περιττός, περιττός$) =$

$$= \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} + \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

Έπειτα: $A \cap B - A \cap \Gamma = B \cap \Gamma$

$$P(A \cap B) = \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{4} = P(A) \cdot P(B) = P(A) \cdot P(\Gamma) = P(B) \cdot P(\Gamma)$$

Τα A, B, Γ ΔΕΝ είναι πλήρως ανεξάρτητα

$$P(A \cap B \cap \Gamma) = P(A \cap B) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8} = P(A) \cdot P(B) \cdot P(\Gamma)$$

Όμως, ΠΩΣ παράγουμε ανεξάρτητα ενδεχόμενα;

→ Συνήθως, έχουμε ένα πείραμα με μέρη x_1, x_2, x_3 τα οποία είναι "ανεξάρτητα" με την κοινή έννοια του όρου (δηλαδή, δεν επηρεάζει το ένα το άλλο). Αν καθένα απ' τα ενδεχόμενα A_1, A_2 εξαρτώνται από διαφορετικά μέρη του πειράματος, συμπεραίνουμε ότι είναι ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΑ με την μαθηματική έννοια του όρου.

Παραδειγμα: Θεωρούμε ακολουθια ριψεων ενός ζαριού. Θετουμε: $A_i = \{$τα αποτελέσματα των $2^{i+1}, 2^{i+1}$, αθροιζουν σε μονό αριθμό$\}$ $\forall i \in \mathbb{N}$ τα A_0, A_1, A_2 είναι ανεξάρτητα.
Αν ορίσουμε $B_i = \{$υπάρχει αποτελεσμα 2 στις ριψεις i ως $2i\}$ τα B_1, B_2, B_3 δεν μπορούμε να πούμε ότι είναι ανεξαρτητα

Ασκηση 2.31 (φυλλάδιο)

Ενα πειραμα εχει πιθανοτα επιτυχιας $p \in (0,1)$. Εκτελούμε ακολουθια ανεξαρτητων δοκιμών του.

(α) ΝΔΟ η πιθανότητα να εχουμε k επιτυχιες στις πρωτες n δοκιμές $(k \in \{0,1,2,\dots,n\})$ ειναι $\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

Εστω $X_i = \begin{cases} E, \text{ αν η } i\text{-δοκιμή ειναι επιτυχια} \\ A, \text{ αν η } i\text{-δοκιμη ειναι αποτυχια} \end{cases}$ $i \in \mathbb{N}^+$

Εστω επίσης B: το ενδεχόμενο στην εκφώνηση και $\Gamma = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \{E, A\}^n : k$ από τα a_i είναι ισα με $E\}$

Ζητάμε την πιθανότητα $P(B) = P\{(X_1, X_2, \dots, X_n) \in \Gamma\} =$
$= \sum_{(a_1,\dots,a_n)\in\Gamma} P(X_1 = a_1, X_2 = a_2, \dots, X_n = a_n)$

Για καθε $a = (a_1, \dots, a_n) \in \Gamma$, η $P(X_1 = a_1, X_2 = a_2, \dots, X_n = a_n) =$
$= P(X_1 = a_1) \dots P(X_n = a_n)$, γιατί τα $(\{X_i = a_i\})_{i=1,\dots,n}$ είναι ανεξάρτητα

$P(X_i = E) = p$
$P(X_i = A) = 1-p$

Το τελευταίο γινόμενο $p^k (1-p)^{n-k}$

Επειδή $(\Gamma) = \binom{n}{k}$
$P(B) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

(β) ΝΔΟ η πιθανότητα να εχουμε επιτυχια σε όλες τις δοκιμές (άπειρο πλήθος) ειναι 0.

$P(X_i = E \ \ \forall i \geq 1) \leq P(X_i = E, \ i = 1,2,\dots,n) \ \ \forall n \geq 1$.
$= P(X_1 = E, X_2 = E, \dots, X_n = E) = P(X_1 = E) \cdot P(X_2 = E) \cdots P(X_n = E) =$
$= p^n \xrightarrow{n\to\infty} 0$, γιατί $p < 1$.

(γ) ποια η πιθανότητα η πρώτη επιτυχία να εμφανιστεί στη δοκιμή $k (\geq 1)$

Ζητάμε την πιθανότητα $P((X_1, X_2, \ldots, X_k) = (A, A, \ldots, A, E)) =$
$= P(X_1 = A, \ldots, X_{k-1} = A, X_k = E) = P(X_1 = A) \ldots P(X_{k-1} = A) P(X_k = E) =$
$= (1-p)^{k-1} p$

(δ) Ποια η πιθανότητα να χρειαστούν τουλάχιστον k δοκιμές ως την πρώτη επιτυχία.

P(οι δοκιμές $1, 2, \ldots, k-1$ είναι αποτυχίες) $= (1-p)^{k-1}$

ΑΣΚΗΣΗ 2.23 (φυλλάδιο)

Ω: δειγματικός χώρος, P: συνάρτηση πιθανότητας στον Ω $(P: \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1])$

Για $\Gamma \subseteq \Omega$, με $P(\Gamma) > 0$, η συνάρτηση $P_\Gamma: \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$, με $P_\Gamma(A) = P(A \mid \Gamma)$ είναι συνάρτηση πιθανότητας, και αν $P_\Gamma(B) > 0$, τότε ορίζεται η $P_\Gamma(A \mid B)$ για $A \subseteq \Omega$

ΝΔΟ $P_\Gamma(A \mid B) = P(A \mid B \cap \Gamma)$

$$P_\Gamma(A \mid B) = \frac{P_\Gamma(A \cap B)}{P_\Gamma(B)} = \frac{P(A \cap B \mid \Gamma)}{P(B \mid \Gamma)} = \frac{\frac{P(A \cap B \cap \Gamma)}{\cancel{P(\Gamma)}}}{\frac{P(B \cap \Gamma)}{\cancel{P(\Gamma)}}} =$$

$$= \frac{P(A \cap B \cap \Gamma)}{P(B \cap \Gamma)} = P(A \mid B \cap \Gamma)$$

Παράδειγμα (ο κανόνας διαδοχής Laplace)

$k+1$ νομίσματα $N_1, N_2, N_3, \ldots, N_{k+1}$. Το N_i έχει έχει πιθανότητα $p_i = \frac{i}{k}$ να φέρει "Κ" με $i = 0, 1, \ldots, k$

Επιλέγουμε ένα στην τύχη και εκτελούμε ακολουθία ρίψεων του. Αν στις πρώτες n ρίψεις ήρθε μόνο "Κ", ποια η πιθανότητα να έρθει "Κ" στην $n+1$ ρίψη.

→

Έστω $C_i = \{$ Επιλέγουμε το $N_i \}$, $i = 0,1,2,\dots,k$

E_j = η j ρίψη έφερε "K"

$F_n = E_1 \cap \dots \cap E_n$

Ζητάμε την $P(E_{n+1} | F_n) = \dfrac{P(F_{n+1})}{P(F_n)}$

Ασκ 2.24 $\boxed{P(A|\Gamma) = Pr(A) = \sum Pr(C_i) Pr(A|C_i) = \sum P(C_i|\Gamma) P(A|\Gamma \cap C_i)}$

$$P(E_{n+1}|F_n) = \sum_{i=0}^{k} P(C_i|F_n) P(E_{n+1}|C_i \cap F_n)$$

Υπολογίζουμε: $P(C_i|F_n) = \dfrac{P(C_i \cap F_n)}{P(F_n)} = \dfrac{P(C_i)P(F_n|C_i)}{\sum_{j=0}^{n} P(C_j)P(F_n|C_j)} =$

$$= \frac{\frac{1}{k+1} \cdot \left(\frac{i}{k}\right)^n}{\sum_{j=0}^{k} \frac{1}{k+1} \left(\frac{j}{k}\right)^n}$$

$$P(E_{n+1}|C_i \cap F_n) = \frac{P(C_i \cap F_n \cap E_{n+1})}{P(C_i \cap F_n)} = \frac{P(F_{n+1}|C_i) P(C_i)}{P(C_i) P(F_n|C_i)} =$$

$$= \frac{\left(\frac{i}{k}\right)^{n+1}}{\left(\frac{i}{k}\right)^n}$$

Άρα, $P(E_{n+1}|F_n) = \dfrac{\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{k+1}\left(\frac{i}{k}\right)^n}{\sum_{j=0}^{n} \frac{1}{k+1} \cdot \left(\frac{j}{k}\right)^n} \cdot \dfrac{\left(\frac{i}{k}\right)^{n+1}}{\left(\frac{i}{k}\right)^n} =$

$$= \frac{1}{\sum_{j=0}^{k} \left(\frac{j}{k}\right)^n} \cdot \sum_{i=0}^{k} \left(\frac{i}{k}\right)^{n+1} = \frac{\frac{1}{k} \cdot \sum_{i=0}^{k} \left(\frac{i}{k}\right)^{n+1}}{\frac{1}{k} \cdot \sum_{i=0}^{k} \left(\frac{i}{k}\right)^n} = \frac{a_k(n+1)}{a_k(n)} \xrightarrow{k \to \infty}$$

Να δω 389 Ross

$$\frac{\frac{1}{n+2}}{\frac{1}{n+1}} = \frac{n+1}{n+2}$$

Κεφάλαιο 4: τυχαίες μεταβλητές

Ω: δειγματικός χώρος

ΤΥΧΑΙΑ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ: λέμε κάθε συνάρτηση $X: \Omega \to \mathbb{R}$

πχ: σε 10 ρίψεις ενός ζαριού $\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}^{10}$

$X: \Omega \to \mathbb{R}$ με $X_1(\{w_1, w_2, \dots, w_{10}\}) = w_2 + w_4 + w_6 + w_8 + w_{10}$

$X_2(w) = w_3$

$X_4(w) = |w_1 - w_2|$

Συμβολισμός: Για $A \subset \mathbb{R}$ και $X: \Omega \to \mathbb{R}$ τυχαία μεταβλητή

Το ενδεχόμενο $\{w \in \Omega : X(w) \in A\}$, δηλ. το $X^{-1}(A)$, το συμβολίζουμε: $\{X \in A\}$

Με το ίδιο σκεπτικό, το $\{w \in \Omega : X^2(w) + 1 : \text{πρώτος}\}$

Το γράφουμε ως: $\{X^2 + 1 : \text{πρώτος}\}$

[ΠΡΟΒΛΗΜΑ]

Για μια τυχαία μεταβλητή $X: \Omega \to \mathbb{R}$, θέλουμε να ξέρουμε όλες τις πιθανότητες

$P(X \in A)$: δηλαδή $P(\{w \in \Omega : X(a) \in A\})$ $\forall A \subset \mathbb{R}$

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ ΤΗΣ ΤΥΧΑΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

$X: \Omega \to \mathbb{R}$, λέμε την $F_X: \mathbb{R} \to [0, 1]$ με $\boxed{F_X(t) = P(X \leq t) \quad \forall t \in \mathbb{R} = P(w \in \Omega : X(w) \leq t)}$

Σύμβαση: Συμβολίζουμε τις τυχαίες μεταβλητές με κεφαλαία γράμματα, συνήθως τα τελευταία της αλφαβήτου X, Y, Z, W, R, S, T

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: X αποτέλεσμα ρίψης ενός ζαριού $F_X = ;$

$\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}$

$P(A) = \frac{|A|}{6}$ $P(i) = \frac{1}{6}$

Για $t \in \mathbb{R}$: $F_X(t) = P(X \leq t) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq t\})$

- Αν $t \leq 1$, τότε $\{X \leq t\} = \emptyset$ $F_X(t) = 0$
- Αν $t \in [1, 2)$, τότε $\{X \leq t\} = 1$, $F_X(t) = p(\{1\}) = \frac{1}{6}$
- Αν $t \in [2, 3)$, τότε $\{X \leq t\} = \{1, 2\}$ $F_X(t) = P(\{1, 2\}) = 2\frac{1}{6} = \frac{1}{3}$

⋮

- Αν $t \in [6, \infty)$, τότε $\{X \leq t\} = \Omega$ $F_X(t) = P(\Omega) = 1$

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & , t < 1 \\ \frac{[t]}{6} & , t \in [1, 6) \\ 1 & , t \geq 6 \end{cases}$$

ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΑ ΜΕ ΓΕΝΙΚΟ ΣΥΝΟΛΟ ΔΕΙΚΤΩΝ

Θα ορίσουμε το $\sum_{i \in I} x_i$, όπου I: οποιοδήποτε σύνολο δεικτών και $x_i \in \mathbb{R}$, $\forall i \in I$

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ I: $x_i \geq 0$ $\forall i \in I$ Θέτουμε

$$\sum_{i \in I} x_i = \sup \{ \sum_{i \in J} x_i : J \in I, J: \text{πεπερασμένο} \}$$

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ II: (ενδέχεται να είναι άπειρο)

$x_i \in \mathbb{R}$: Θέτουμε $\sum_{i \in I} = \sum_{i \in I} x_i 1_{x_i > 0} - \sum_{i \in I} |x_i| 1_{x_i < 0}$?

αν η διαφορά δεν είναι $\infty - \infty$

Ενδέχεται το άθροισμα να βγει ∞, $-\infty$, ή να μην ορίζεται

ΑΣΚΗΣΗ: Έστω $x_i \geq 0$ $\forall i \in I$ και ότι $\sum_{i \in I} x_i = M < \infty$

ΝΔΟ το $A = \{i \in I, x_i \neq 0\}$ είναι αριθμήσιμο.

Έστω $I_n = \{i \in I, x_i \geq \frac{1}{n}\}$, τότε $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ (1)

Αν $k \in \mathbb{N}$, $k \leq |I_n|$, έστω $y_1, \dots, y_n \in |I_n|$

Τότε, $M \geq y_1 + \dots + y_k \geq \frac{k}{n} \Rightarrow k \leq Mn \Rightarrow |I_n| \leq Mn$

Άρα, A (1): αριθμήσιμη ένωση αριθμήσιμων.

25.10.2018 7º μάθημα

ΠιΘ.Ι - τμ.Χελιώτη. ΔΙΑΚΡΙΤΕΣ ΤΥΧΑΙΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ (§4.2)

ΟΡΙΣΜΟΣ: Μια τυχαία μεταβλητή $X:\Omega\to\mathbb{R}$ λέγεται διακριτή, αν το $X(\Omega)$ είναι αριθμήσιμο (πεπερασμένο ή ισοπληθικό με το $\mathbb{N}$)

"Πώς κωδικοποιούμε μια διακριτή τυχαία μεταβλητή?"

ΟΡΙΣΜΟΣ: $X:\Omega\to\mathbb{R}$ διακριτή τυχαία μεταβλητή. Συνάρτηση πιθανότητας της X, λέμε τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to[0,\infty)$ με $f(a):=P(X=a)=P(\{\omega\in\Omega : X(\omega)=a\})$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: X = αποτέλεσμα ρίψης ενός αμερόληπτου ζαριού.

$\Omega=\{1,2,\dots,6\}$, $X(\omega)=\omega$, $P(\{i\})=\frac{1}{6}$, $i=1,\dots,6$

$\boxed{\text{Για } a\in\mathbb{R}}$

$$f(a)=P(X=a)=\begin{cases} 1/6, & \text{αν } a\in\{1,2,\dots,6\} \\ 0, & \text{αν } a\in\mathbb{R}\setminus\{1,2,\dots,6\}\end{cases}$$

πχ: $f(2)=P(\{\omega\in\Omega : X(\omega)=2\})=P(\{2\})=\frac{1}{6}$

ΠΡΟΤΑΣΗ: Έστω X: διακριτή τυχαία μεταβλητή, τότε η f_X ικανοποιεί τα εξής:

(α) $f_X(x)\geq 0 \ \forall x\in\mathbb{R}$

(β) $\sum_{x\in\mathbb{R}} f_X(x)=1$.

-Αποδ-

(α) ισχύει, αφού $f_X(x)=P(X=x)\geq 0$

(β) Το $X(\Omega)$ είναι αριθμήσιμο και $f_X(x)=0$, για $x\in\mathbb{R}\setminus X(\Omega)$

αριθμήσιμη προσθετικότητα

$$\sum_{x\in\mathbb{R}} f_X(x)=\sum_{x\in X(\Omega)} f_X(x)=\sum_{x\in X(\Omega)} P(\underbrace{X=x}_{A_x})=P\Big(\bigcup_{x\in X(\Omega)}\{X=x\}\Big)=P(\Omega)=1.$$

Αποδεικνύεται και το αντίστροφο. Δηλαδή, αν μια $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ικανοποιεί τα (α), (β), τότε $\exists$ τυχαία μεταβλ. X, ώστε $f=f_X$

→ Η f_X έχει την εξής ιδιότητα: $P(X\in A) = \sum_{a\in A} f_X(a) \ \forall A \subset \mathbb{R}$
και με αυτή την έννοια κωδικοποιεί την X.
Αυτό το δείχνουμε ως εξής:
$$P(X\in A) = P(X\in A\cap X(\Omega)) = P\Big(\bigcup_{a\in A\cap X(\Omega)} (X=a)\Big) = \sum_{a\in A\cap X(\Omega)} f_X(a) = \sum_{a\in A} f_X(a)$$

ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ ΔΙΑΚΡΙΤΗΣ ΤΥΧΑΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ (§4.3)

Παίζουμε παιχνίδι στο οποίο κερδίζουμε 12€ με πιθ $\frac{1}{3}$ και 3€ με πιθ. $\frac{2}{3}$.
Δηλαδή, έχουμε τυχαία μεταβλητή $X: \Omega \to \mathbb{R}$ με $X(\Omega) = \{3, 12\}$
και $P(X=3) = \frac{2}{3}$, $P(X=12) = \frac{1}{3}$
Παίζουμε το παιχνίδι **n** φορές (n: μεγάλο). Ποιο είναι το μέσο κέρδος μας;
Έστω A_n, το πλήθος φορών που κερδίζαμε 3€ και
έστω B_n, " " " 12€
Το $\boxed{\text{μέσο κέρδος}}$ είναι: $\dfrac{3A_n + 12B_n}{n} = 3\cdot\dfrac{A_n}{4} + 12\cdot\dfrac{B_n}{4} = 2+4 = 6$

$$\xrightarrow{n\to\infty} 3\cdot\frac{2}{3} + 12\cdot\frac{1}{3} = 3P(X=3) + 12P(X=12), \quad X:\Omega\to\mathbb{R}$$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω X: διακριτή τυχαία μεταβλητή. Ορίζουμε ως μέση τιμή της X, το άθροισμα:
$$E(X) = \sum_{a\in\mathbb{R}} a f_X(a)$$, όποτε αυτό έχει νόημα.

Το άθροισμα είναι πάνω στο αριθμήσιμο σύνολο $X(\Omega)$: αφού $f_X(a)=0$ για $a\in\mathbb{R}\setminus X(\Omega)$) και ισούται με $\sum_{a>0} a f_X(a) - \sum_{a<0} |a| f_X(a)$, οπότε δεν έχουμε μορφή $\infty - \infty$

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ</u>: X = αποτέλεσμα ρίψης ενός ζαριού
$f_X(a) = \frac{1}{6}$, $1a \in \{1, 2, .., 6\}$

$$EX = \sum_{a\in\mathbb{R}} a f_X(a) = \sum_{k=1}^{6} k\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{6}\cdot\frac{6\cdot 7}{2} = \mathbf{3{,}5}$$

Πρακτική σημασία της Ex

Θεωρούμε ένα παιχνίδι, που σε μια πραγματοποίησή του, δίνει (τυχαίο) κέρδος X. Παίζουμε το παιχνίδι n φορές κι έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$: τα κέρδη απ'αυτές. Τότε,

$$E_X \approx \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} = \text{μέσο κέρδος (για } n \text{ μεγάλο)}$$

Παραδείγματα υπολογισμού της Ex

1). X: τυχαία μεταβλητή με $f(k) = \begin{cases} 1/2^k & : k \in \mathbb{N}^+ \\ 0 & : k \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}^+ \end{cases}$

$$E_X = \sum_{x \in \mathbb{R}} x f_X(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{1}{2^k}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot x^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot x^k = \frac{x}{(1-x)^2}$$

2). X: τυχαία μεταβλητή με $f_X(k) = \begin{cases} \frac{c}{k^2}, & k \in \mathbb{N}^+ \\ 0, & k \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}^+ \end{cases}$

$c = ;$ $EX = ;$

$$1 = \sum_{k=1}^{\infty} f_X(k) = c \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = c \cdot \frac{\pi^2}{6} \Rightarrow c = \frac{6}{\pi^2}$$

$$EX = \sum_{a \in \mathbb{R}} a f_X(a) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{c}{k^2} = c \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$$

3). X: τυχαία μεταβλητή με $f_X(k) = \begin{cases} \frac{3}{\pi^2} \frac{1}{k^2}, & k \in \mathbb{Z} - \{0\} \\ 0, & k \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}) \cup \{0\} \end{cases}$

Υπολογίσαμε ότι $\sum_{x>0} x f_X(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{3}{\pi^2} \cdot \frac{1}{k^2} = \infty$

$$\sum_{x<0} |x| f_X(x) = \sum_{k=-1}^{-\infty} |k| \cdot \frac{3}{\pi^2} \cdot \frac{1}{k^2} \overset{\boxed{r=-k}}{=} \frac{3}{\pi^2} \cdot \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} = \infty$$

Άρα, στον ορισμό της EX, έχουμε $\infty - \infty$ που δεν ορίζεται

4). $f_X(k) = \begin{cases} \frac{3}{\pi^2} \cdot \frac{1}{k^2} &, k \in \mathbb{N}^+ \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^{|k|}} &, -k \in \mathbb{N}^+ \\ 0 &, k \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}) \cup \{0\} \end{cases}$

$EX = \sum_{a \geq 0} a f_X(a) - \sum_{a<0} |a| f_X(a)$

$\sum_{a \geq 0} a f_X(a) = \frac{3}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{1}{k^2} = \infty$

$\sum_{a<0} |a| f_X(a) = \sum_{k=-1}^{-\infty} |k| \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^{|k|}} \overset{j=-k}{=\!=} \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} j \cdot \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$

Αρα $EX = \infty - 1 = \infty$

5). Ριχνουμε δυο ζαρια και εστω Z_1, Z_2 οι ενδειξεις που φερνουν. Θετουμε $X = |Z_1 - Z_2|$. $EX = ?$

πινακας της $(x_1, x_2) \to |x_1 - x_2|$

$Z_1 \backslash Z_2$	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

$P(X=i) = \begin{cases} \frac{6}{36} & i=0 \\ \frac{10}{36} & i=1 \\ \frac{8}{36} & i=2 \\ \frac{6}{36} & i=3 \\ \frac{4}{36} & i=4 \\ \frac{2}{36} & i=5 \end{cases}$

$EX = 0 \cdot \frac{6}{36} + \sum_{i=1}^{5} i \frac{12-2i}{36} = \frac{70}{36} = \frac{35}{18}$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ

ΠΡΟΤΑΣΗ I (ΓΡΑΜΜΙΚΟΤΗΤΑ)

Εστω $\boxed{X,Y}$ ΔΙΑΚΡΙΤΕΣ τμ στον ίδιο χώρο πιθανότητας και $c \in \mathbb{R}$. Τότε:

(i) $E(X+Y) = EX + EY$

Με την προϋπόθεση ότι οι EX, EY ορίζονται καθώς και το άθροισμα τους. (Δηλαδή δεν έχουμε $\infty + (-\infty)$)

(ii) $E(cX) = c \cdot EX$, αν η EX ορίζεται

ΠΡΟΤΑΣΗ II

Εστω X: διακριτή τυχαία μεταβλητή

(i) Αν $P(X=c)=1$, τότε $EX=c$

(ii) Αν $X \geq 0$, δηλ. $X(\omega) \geq 0 \ \forall \omega \in \Omega$, τότε $EX \geq 0$ και $EX=0$, μόνο αν $P(X=0)=1$.

(iii) Αν $X \geq Y$, τότε $EX \geq EY$, οπότε EX, EY ορίζονται

(iv) Αν EX ορίζεται, τότε $|EX| \leq E|X|$

-Αποδ-

(i) $f_X(x) = P(X=x) = \begin{cases} 1, & \text{για } x=c \\ 0, & \text{για } x \in \mathbb{R} \setminus \{c\} \end{cases}$

$EX = \sum_{a \in \mathbb{R}} a f_X(a) = c \cdot 1 = c$

(ii) Εχουμε $f_X(a) = P(X=a) \ \forall a<0$

Άρα, $EX = \sum_{a \in \mathbb{R}} a f_X(a) = \sum_{a \geq 0} a f_X(a) \geq 0$

Αν $EX=0$, τότε $a f_X(a) = 0 \ \forall a \geq 0 \Rightarrow f_X(a) = 0 \ \forall a \geq 0$

Από την $1 = \sum_{a \in \mathbb{R}} f_X(a)$, έπεται $f_X(0)=1$.

(iii) Αν $EX = EY = \infty$ ή $EX = EY = -\infty$, ισχύει

ένα απ'τα EX, EY, είναι πεπερασμένο

Αλλιώς η $Z = X - Y \geq 0 \overset{(ii)}{\Rightarrow} EZ \geq 0 \Rightarrow EX - EY \geq 0 \Rightarrow EX \geq EY$

(iv) $-|X| \leq X \leq |X| \overset{(iii)}{\Rightarrow} -E|X| \leq EX \leq E|X| \Rightarrow |EX| \leq E|X|$

Παραδειγμα (3β σελ. 144)

$A \subset \Omega$, $I_A : \Omega \to \mathbb{R}$ η δεικτρια του A. Δηλαδη

$$I_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \text{αν } \omega \in \Omega \setminus A \end{cases}$$

Τοτε $E(I_A) = P(A)$

-Αποδ-

Η συνάρτηση πιθανοτητας της I_A είναι

$f(x) = P(I_A = x)$

Ομως $\{I_A = x\} = \{\omega \in \Omega : I_A(\omega) = x\} = \begin{cases} A, & \text{αν } x = 1 \\ \Omega \setminus A, & \text{αν } x = 0 \\ \varnothing, & \text{αν } x \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\} \end{cases}$

Αρα, $f(x) = \begin{cases} P(A), & \text{αν } x = 1 \\ P(\Omega \setminus A), & \text{αν } x = 0 \\ 0, & \text{αν } x \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\} \end{cases}$ ✱✱✱

Άρα $E(I_A) = 1 \cdot P(A) + 0 \cdot P(\Omega \setminus A) = P(A)$

ΔΙΚΑΙΗ ΤΙΜΗ ΠΑΙΧΝΙΔΙΟΥ

Εστω οτι ένα παιχνιδι μας δίνει τυχαιο κερδος $X \in \mathbb{R}$ καθε φορά που παίζουμε. Τι τιμή πρέπει να πληρώσουμε για να παίξουμε μια φορα το παιχνιδι;

-Απαντηση-

EX, γιατι πληρώνοντας σε καθε παιχνιδι ποσό $c = EX$, το κερδος μας θα ειναι $X - c$.

Το μεσο κερδος $E(X-c) = EX - Ec = EX - c = 0$

↳ Εξαιτίας γραμμικοτητας

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ : Ρίχνουμε αμερόληπτο ζαρι. Κερδιζουμε i ευρώ, αν έρθει i. Ποια είναι η σωστή τιμή του παιχνιδιού;

-ΛΥΣΗ-

Εστω X = το αποτελεσμα μιας ριψης

$EX = \sum_{i=1}^{6} P(X=i) = \dots = 3{,}5$ → η σωστη τιμη

30/10/2018 — 8º μαθημα

Πιθανότητες Ι - τμ. Χελιώτη

Ασκηση 3.6 (φυλλαδιο)

(Το παραδοξο Αγ. Πετρούπολης)

Αμερόληπτο νόμισμα ρίχνεται διαδοχικά και αν η ένδειξη κορώνα εμφανίζεται για πρώτη φορά στην k-ρίψη, τότε κερδίζουμε 2^k ευρώ. Ποιο είναι το μέσο κέρδος του παιχνιδιού;

-ΛΥΣΗ-

Εστω X: τυχαίο κέρδος. Η X παίρνει τιμές στο $A = \{2^k : k \in \mathbb{N}^+\}$

Εχει συνάρτηση πιθανότητας $f_X(x) = P(X=x) = \begin{cases} \frac{1}{2^k}, & \text{αν } x = 2^k \\ 0, & \text{αν } x \in \mathbb{R} \setminus A \end{cases}$

Αρα $EX = \sum_{a \in \mathbb{R}} a f_X(a) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \cdot \frac{1}{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} 1 = \infty$

$P(A) = E(1_A)$

Ασκηση

Εστω Ω δειγματικός χώρος και P: πιθανότητα σε αυτον.

(i) Αν $A_1, \ldots, A_r \subset \Omega$, τότε $1_{A_1} \cdot 1_{A_2} \cdots 1_{A_r} = 1_{A_1 \cap \ldots \cap A_r}$

(ii) Αν $A \subset \Omega$, τοτε $1_{A^c} = 1 - 1_A$

(iii) Αν $A_1, \ldots, A_n \subset \Omega$, τοτε $1_{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = 1 - (1 - 1_{A_1}) \cdots (1 - 1_{A_n})$

(iv) Από το (iii) συμπεραίνετε ότι:

$$P(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 \le \ldots \le i_k \le n} P(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k})$$

-ΛΥΣΗ-

(ii) Τα δύο μελη παίρνουν μόνο τις τιμές 0 και 1

Το αριστερό είναι $1 \Leftrightarrow x \in \Omega \setminus A$

Το δεξί είναι $1 \Leftrightarrow 1_A(A) = 0 \Leftrightarrow x \in \Omega \setminus A$

(ii) Η $1_{A_1}(x) 1_{A_2}(x) \dots 1_{A_r}(x) = 1 \Leftrightarrow 1_{A_1}(x) = \dots = 1_{A_r}(x) = 1 \Leftrightarrow$
$x \in A_1 \cap \dots \cap A_r \Leftrightarrow 1_{A_1 \cap \dots \cap A_r}(x) = 1$

(iii) Το δεξί μελος ειναι 1 σε κάποιο x $\Leftrightarrow$
$(1 - 1_{A_1}(x)) \dots (1 - 1_{A_n}(x)) = 0 \Leftrightarrow$
$\exists i \in \{1, \dots, n\}$ τέτοιο ώστε $1 = 1_{A_i}(x) \Leftrightarrow$
$x \in \bigcup_{i=1}^{n} A_i$

για k=0, αυτό ισούται με 1

(iv) Η (iii) γράφεται $1_{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = 1 - \sum_{k=0}^{n} \sum_{1 \le i_1 \le \dots \le i_k \le n} (-1)^k 1_{A_{i_1}} \dots 1_{A_{i_k}}$

Λόγω της $P(A) = E(1_A)$ και της γραμμικότητας της Ε, παίρνουμε
$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = E(1_{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}) = 1 - E(\sum\sum) = 1 - \sum_{k=1}^{n} \sum_{1 \le i_1 \le \dots \le i_k \le n} (-1)^k P(1_{A_{i_1}} \dots 1_{A_{i_k}}) =$

$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{1 \le i_1 \le \dots \le i_k \le n} (-1)^{k-1} P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k})$

§4.4 Μέση τιμή συνάρτησης διακριτής τυχαίας μεταβλητής

Διακριτή: η εικόνα της είναι αριθμήσιμη

Έχουμε $X: \Omega \to \mathbb{R}$ διακριτή τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πιθανότητας f_X και $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Η $Y = g(X)$ είναι τ.μ. διακριτή, γιατί $Y(\Omega) = g(X/\Omega)$

$\mathbb{N} \xrightarrow{h} X(\Omega) \xrightarrow{g} Y(\Omega)$

Η $g(h(x))$ είναι επί
(αφού το $X(\Omega)$ είναι αριθμήσιμο)

ΘΕΩΡΗΜΑ

$EY = \sum_{a \in \mathbb{R}} a f_Y(a)$

$Eg(X) = \sum_{a \in \mathbb{R}} g(a) f_X(a)$, όποτε το δεξί μέλος ορίζεται

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ① Αν $g(x)$ έχουμε το γνωστό $EX = \sum_{a \in \mathbb{R}} a f_X(a)$
② Για $g(x) = |x|$, $E|X| = \sum_{x \in \mathbb{R}} |x| f_X(x)$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Επειδή $EX = \sum_{x\geq 0} x \cdot f_X(x) - \sum_{x<0} |x| f_X(x)$

Εχουμε ότι $EX \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \sum_{x \geq 0} x f_X(x) < \infty$

$\sum_{x<0} |x| f_X(x) < \infty \Leftrightarrow \sum_{x \in \mathbb{R}} |x| f_X(x) < \infty \Leftrightarrow E|X| < \infty$

Παραδ. 3: Εστω X διακριτή τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πιθανότητας $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x(x+1)}, & x \in \mathbb{N}^+ \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}^+ \end{cases}$

Για ποια $a \in \mathbb{R}$, ισχύει $E(|X|^a) < \infty$;

-ΛΥΣΗ-

[Η f είναι συν. πιθ. γιατί $f \geq 0$ και $\sum_{x \in \mathbb{R}} f_X(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} =$

$= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1$]

• $E(|X|^a) = \sum_{k=1}^{\infty} k^a f_X(k) = \sum_{k=1}^{\infty} k^a \frac{1}{k(k+1)}$

Αυτή έχει την ίδια συμπεριφορά σύγκλισης με την:

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^a}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2-a}}$

Αυτή συγκλίνει αν και μόνο αν $2-a > 1 \Leftrightarrow$ (κριτ. ολοκληρώμ.)

$\boxed{a < 1}$

§ 4.5 Διακύμανση (Διασπορά)

X: διακριτή τυχαία μεταβλητή, με $E|X| < \infty$, δηλαδή $EX \in \mathbb{R}$

Θέλουμε να ποσοτικοποιήσουμε την απόκλιση της X, απ'την μέση τιμή $\mu = EX$

Ένα ποσοτικό μέτρο, είναι $E|X-\mu|$

Για υπολογιστικούς λόγους, προτιμάμε την ποσότητα: $E((X-\mu)^2)$

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u>: Διακύμανση (διασπορά) της X, λέμε τον αριθμό $Var(X) := E((X-\mu)^2) \in [0,\infty)$

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u>: Τυπική απόκλιση της X, λέμε τον αριθμό $\delta_X = \sqrt{Var(X)}$

[Προτέρημα της δ_X: ίδιες μονάδες με την X]

[Προτέρημα της $Var(X)$: καλύτερες αλγεβρικές ιδιότητες]

<u>παράδειγμα</u>: X = το αποτέλεσμα ρίψης ενός ζαριού

$Var(X) = ?$

$Eg(X) = \sum g(a) f_X(a)$

-ΛΥΣΗ-

Ξέρουμε ότι $\mu = EX = 3,5$

$$Var(X) = E((X-\mu)^2) = \sum_{x=1}^{6} (x-\mu)^2 f_X(x) = \sum_{x=1}^{6} (x-3,5)^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{35}{12} \approx 3$$

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω X όπως πιο πάνω (δηλ. $E|X| < \infty$, X: διακριτή), τότε $Var(X) = E(X^2) - (EX)^2$

-Απόδ.-

$$Var(X) = E((X-\mu)^2) = E(X^2 - 2\mu X + \mu^2) =$$
$$= E(X^2) - 2\mu \cdot EX + E(\mu^2) =$$
$$= E(X^2) - 2(EX)^2 + (EX)^2 =$$
$$= E(X^2) - (EX)^2$$

ΑΣΚΗΣΗ

X = το αποτέλεσμα ρίψης τίμιου ζαριού. $Var(X) = ?$

-ΛΥΣΗ-

$$Var(X) = EX^2 - (EX)^2$$

Ξέρουμε ότι $EX = \frac{7}{2}$

$$EX^2 = \sum_{k \in \mathbb{R}} k^2 \cdot f_X(k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{6} k^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \cdot \frac{6 \cdot 7 \cdot 13}{6} = \frac{91}{6}$$

$\boxed{\text{ΠΡΟΤΑΣΗ}}$

X: διακριτή τυχαία μεταβλητή με $E|X| < \infty$ και $a, \beta \in \mathbb{R}$

Τότε (i) $Var(aX) = a^2 \cdot Var(X)$

(ii) $Var(X+a) = Var(X)$

$\Big\}$ $Var(aX+\beta) = a^2 Var(X)$

(iii) $Var(X) = 0 \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R}$ με $P(X=c) = 1$.

-Αποδ-

(i) $Var(aX) = E\left((aX - E(aX))^2\right) =$

$= E\left(a^2 (X-EX)^2\right) = a^2 E\left((X-EX)^2\right) = a^2 Var(X)$

(ii) $Var(X+a) = E\left((X+a - \underbrace{E(X+a)}_{\substack{EX+Ea \\ EX+a}})^2\right) = E\left((X+a-EX-a)^2\right) =$

$= E\left((X-EX)^2\right) = Var(X)$

(iii) "$\Rightarrow$" Έχουμε $E\left((X-\mu)^2\right) = 0 \Rightarrow$

ΙΔΙΟΤΗΤΑ ΜΕΣΗΣ Τ.
$X \geq 0 \Rightarrow EX \geq 0$ και $EX = 0$ ανν $P(X=0) = 1$

$P\left((X-\mu)^2 = 0\right) = 1 \Rightarrow P(X=\mu) = 1.$

"$\Leftarrow$" Η X έχει συνάρτηση πιθανότητας

$$f_X(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x = c \\ 0, & \text{αν } x \in \mathbb{R} \setminus \{c\} \end{cases}$$

Άρα, $\mu = EX = \sum_{a \in \mathbb{R}} a f_X(a) = c$.

$Var(X) = E\left((X-c)^2\right) = \sum_{a \in \mathbb{R}} (a-c)^2 f_X(a) = 0^2 \cdot 1 = 0$

Τυχαία μεταβλητή Bernoulli

Έστω $p \in [0,1]$. Τυχαία μεταβλητή Bernoulli με παράμετρο p, λέμε κάθε τυχαία μεταβλητή X με συνάρτηση πιθανότητας

$$f_X(t) = \begin{cases} 1-p, & \text{αν } t=0 \\ p, & \text{αν } t=1 \\ 0, & \text{αν } t \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\} \end{cases}$$

Λέμε επίσης, ότι η X ακολουθεί την κατανομή Bernoulli με παράμετρο p και γράφουμε $X \sim \text{Bernoulli}(p)$

"Πώς εμφανίζεται μια τυχαία μεταβλητή Bernoulli?"

→ Έχουμε πείραμα που ένα αποτέλεσμα το λέμε επιτυχία, ενώ οτιδήποτε άλλο, το λέμε αποτυχία.
Έστω p: η πιθανότητα επιτυχίας.

Ορίζουμε $X = \begin{cases} 1, & \text{αν το πείραμα δίνει επιτυχία} \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$

Τότε $X \sim \text{Bernoulli}$

Παράδειγμα: Ρίχνουμε αμερόληπτο ζάρι και θέτουμε

$$X = \begin{cases} 1, & \text{αν έρθει } 1 \text{ ή } 2 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Τότε: $X \sim \text{Bernoulli}(p)$, $p = P(\text{έρχεται } 1 \text{ ή } 2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

ΠΡΟΤΑΣΗ.

Έστω $p \in [0,1]$ και $X \sim \text{Bernoulli}$. Τότε:

(i) $EX = p$

(ii) $Var(X) = p(1-p)$

-Απόδ-

(i) $EX = \sum_{a \in \mathbb{R}} a f_X(a) = 1 \cdot f_X(1) + 0 \cdot f_X(0) = 1 \cdot p + 0 \cdot (1-p) = p$

(ii) $E(X^2) = \sum_{x \in \mathbb{R}} x^2 f_X(x) = 1^2 \cdot p + 0^2 \cdot (1-p) = p$

$Var(X) = E(X^2) - (EX)^2 = p - p^2 = p(1-p)$

ΔΙΩΝΥΜΙΚΗ ΤΥΧΑΙΑ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ

Εστω $n \in \mathbb{N}^+$, $p \in [0,1]$

Μια τυχαία μεταβλητή X τη λέμε διωνυμική με παραμέτρους n,p αν η X έχει συνάρτηση πιθανότητας

$$f_X(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} & , x \in \{0,1,\dots,n\} \\ 0 & , x \in \mathbb{R} \setminus \{0,1,2,\dots,n\} \end{cases}$$

Γράφουμε τότε, $\underline{X \sim Bin(n,p)}$

Η fx είναι συνάρτηση πιθανότητας γιατί $f_X \geq 0$ και

$\sum_{t \in \mathbb{R}} f_X(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k \cdot (1-p)^{n-k} = (p + (1-p))^n = 1.$

Η X παίρνει τιμές στο $[0,1,2,\dots,n]$

"Πώς προκύπτει μια $X \sim Bin(n,p)$;"

→ Εχουμε πείραμα με πιθανότητα επιτυχίας p.

Εκτελούμε n ανεξάρτητες πραγματοποιήσεις του

Θέτουμε X = πλήθος επιτυχιών στις n δοκιμές (πραγματοποιήσεις)

Προφανώς $X \in \{0,1,2,\dots,n\}$

ΠΡΟΤΑΣΗ.

Η $X \sim Bin(n,p)$

-Αποδ-

Φυλλ. άσκ. 2.31. (πρώτο ερώτημα)

1.11.2018 — 9ο μάθημα

Μ.Θ.Ι. - Χελιώτης

$Bin(n,p)$ $n \in \mathbb{N}^+, p \in [0,1]$

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

$$f_X(k) = \binom{n}{k} p^k \cdot (1-p)^{n-k} \, 1_{k \in \{0,1,\dots,n\}}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ (Αναπαράσταση μιας διωνυμικής τυχ. μετ)

Εκτελούμε n ανεξάρτητες φορές ένα πείραμα που έχει πιθανότητα επιτυχίας p.

Θέτουμε $X :=$ αριθμός επιτυχιών στις n δοκιμές ($\sim Bin(n,p)$)

και για $i = 1, \dots, n$, $X_i := \begin{cases} 1, & \text{αν } i \text{ δοκιμή είναι επιτυχία} \\ 0, & \text{αν } i \text{ δοκιμή ΔΕΝ είναι επιτυχία} \end{cases}$

Τότε, $X_i \sim Bernoulli(p)$ $\forall i = 1, \dots, n$ και $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$

ΑΣΚΗΣΗ 44 (φυλλάδιο)

5% των επιβατών δεν εμφανίζεται για την πτήση. Στη σημερινή πτήση, το αεροπλάνο έχει 200 θέσεις και η εταιρεία έχει πουλήσει 203 εισιτήρια. Ποια η πιθανότητα να μην μπορέσει να ταξιδέψει πελάτης με εισιτήριο

-ΛΥΣΗ-

Έστω S το πλήθος που εμφανίζονται.

Τότε $S \sim Bin(203, 0.95)$ $\boxed{p = 0,95}$

Ζητάμε την $P(S > 200) = P((S=201) + (S=202) + (S=203))$

$$\sum_{k=201}^{203} \binom{203}{k} p^k (1-p)^{203-k}$$

Έστω W το πλήθος που <u>δεν</u> εμφανίζονται

$W \sim Bin(203, 0.05)$

$P(W < 3)$

ΑΣΚΗΣΗ

Σκοπευτής ρίχνει 10 βολές σ'έναν στόχο. Η πιθανότητα να το πετύχει 4 φορές είναι τριπλάσια της πιθανότητας να τον πετύχει 3 φορές. Ποια η ευστοχία του σκοπευτή; Έπειτα να βρεθεί η πιθανότητα σε 5 βολές να πετύχει τον στόχο: (α) Δύο τουλάχιστον φορές, (β) Ή όλες ή καμία φορά (γ) Το πολύ 4 αν είναι γνωστό ότι πέτυχε τουλάχιστον 2.

-ΛΥΣΗ-

Έστω X: το πλήθος των επιτυχιών στις 10 βολές

Ξέρουμε ότι $P(X=4)=3P(X=3)$

Αν p είναι η ευστοχία του, τότε $X \sim Bin(10,p)$

$$\binom{10}{4}p^4(1-p)^6 = 3\binom{10}{3}p^3\cdot(1-p)^7 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\cancel{10!}}{4!\,6!}p = 3\cdot\frac{\cancel{10!}}{3!\,7!}(1-p) \Leftrightarrow$$

$$\frac{7}{12} = \frac{1}{p} - 1 \Leftrightarrow \boxed{p = \frac{12}{19}}$$

Έστω Y= αριθμός επιτυχιών σε 5 βολές $\sim Bin(5,p)$

(α) $P(Y\geq 2) = 1 - P(Y<2) =$

$= 1-(P(Y=0)+P(Y=1)) =$

$= 1-(p^0\cdot(1-p)^5 + \binom{5}{1}p(1-p)^4)$

(β) $P(Y=5)+P(Y=0) = p^5 + (1-p)^5$

(γ) $P(Y\leq 4 \mid Y\geq 2) = \dfrac{P(Y\leq 4, Y\geq 2)}{P(Y\geq 2)} =$

$$= \frac{\sum_{k=2}^{4} P(Y=k)}{P(Y\geq 2)}$$

ΑΣΚΗΣΗ 4.8

$X \sim Bin(n,p)$ $\quad p \in (0,1)$, $q := 1-p$

ΝΔΟ

$$x, f(x)$$
$$Eg(x) = \sum_{t\in\mathbb{R}} g(t) f_X(t)$$

(α) $E(t^X) = (pt+q)^n$, $t \in \mathbb{R}$

(β) $E\left(\frac{1}{X+1}\right) = \frac{1-(1-p)^{n+1}}{(n+1)\cdot p}$

-ΛΥΣΗ-

(α) $E(t^X) = \sum_{k\in\mathbb{R}} t^k f_X(k) = \sum_{k=0}^{n} t^k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} =$

$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (pt)^k \cdot (1-p)^{n-k} = (pt + \underbrace{1-p}_{q})^n = (pt+q)^n$

(β) $E\left(\frac{1}{X+1}\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

Εχουμε $\frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{1}{k+1} \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{1}{k+1} \cdot \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n+1-(k+1))!} =$

$= \frac{1}{n+1} \cdot \binom{n+1}{k+1}$

Αρα $E\left(\frac{1}{X+1}\right) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} p^k \cdot (1-p)^{n-k} \underset{j=k+1}{=}$

$= \frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n+1}{j} p^{j-1} (1-p)^{n-(j-1)} =$

$= \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{p} \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n+1}{j} p^j \cdot (1-p)^{n+1-j} =$

$= \frac{1}{(n+1)\cdot p} \left(\sum_{j=0}^{n+1} \text{ " } - \binom{n+1}{0} p^0 \cdot (1-p)^{n+1} \right) =$

$= \frac{1}{(n+1)\cdot p} \left((p+1-p)^{n+1} - (1-p)^{n+1} \right) = \frac{1-(1-p)^{n+1}}{(n+1)\cdot p}$

ΠΡΟΤΑΣΗ

Αν $X \sim Bin(n,p)$, $n \in \mathbb{N}^+$, $p \in [0,1]$. Τότε:

(α) $EX = np$

(β) $Var(X) = np(1-p)$

-Αποδ-

(α). 1ος τρόπος: $X = X_1 + \dots + X_n$ με $X_i \sim Bernoulli(p)$

$EX = EX_1 + EX_2 + \dots + EX_n = np$

2ος τρόπος: $EX = \sum_{a \in \mathbb{R}} a f_X(a) = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} =$

$= \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} = n \cdot \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^k \cdot (1-p)^{n-k} \overset{j=k-1}{=} n \cdot \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} p^{j+1} \cdot (1-p)^{n-(j+1)} =$

$= np \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} = n \cdot p (p+1-p)^{n-1} = n \cdot p$

(β) Η $E(t^X) = (pt+q)^n$ γράφεται ως εξής:

$$\sum_{k=0}^{n} f_X(k) \cdot t^k = g(t) \overset{\frac{d}{dt}}{\Longrightarrow}$$

$$\sum_{k=0}^{n} k f_X(k) t^{k-1} = g'(t) \overset{\frac{d}{dt}}{\Longrightarrow}$$

$$\sum_{k=0}^{n} k(k-1) f_X(k) t^{k-2} = g''(t)$$

Για $t=1$, παίρνουμε $E(X(X-1)) = g''(1)$

$g'(t) = n(pt+q)^{n-1} p$, $g''(t) = n(n-1)(pt+q)^{n-2} p^2 =$

$g''(1) = n(n-1)p^2$

$E(X^2) = E(X(X-1) + X) = n(n-1)p^2 + np$

Άρα, $Var(X) = E(X^2) - (EX)^2 = n^2p^2 - np^2 + np - (np)^2$

$= np(1-p)$

§4.7 Η τυχαία μεταβλητή Poisson

Έστω $\lambda > 0$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Λέμε ότι η τυχαία μεταβλητή X είναι Poisson με παράμετρο λ αν έχει συνάρτηση πιθανότητας:

$$f_X(k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\mathbb{1}_{k\in\mathbb{N}}$$

Γράφουμε $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$

Η f_X είναι πράγματι συνάρτηση πιθανότητας, γιατί $f_X \geq 0$ και $\sum_{a\in\mathbb{R}} f_X(a) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} =$

$$= e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda} = 1.$$

ΠΡΟΤΑΣΗ

Αν $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$, τότε:

(α) $EX = \lambda$

(β) $Var(X) = \lambda$

-Αποδ-

(α) $EX = \sum_{k=0}^{\infty} k f_X(k) = \sum_{k=0}^{\infty} k\cdot e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^k}{k!} =$

$$= e^{-\lambda}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^k}{(k-1)!} \overset{j=k-1}{=\!=\!=} e^{-\lambda}\cdot\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\lambda^{j+1}}{j!} =$$

$$= \lambda e^{-\lambda}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\lambda^j}{j!} = \lambda\cdot e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda} = \lambda$$

(β) $Var(x) = E(x^2) - (EX)^2 = E(X(X-1)) + EX - (EX)^2$

$$E(X(X-1)) = \sum_{t\in\mathbb{R}} t\cdot(t-1)\cdot f_X(t) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} k\cdot(k-1)\cdot e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\cdot\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\lambda^k}{(k-2)!} \overset{j=k-2}{=\!=\!=}$$

$$= e^{-\lambda}\cdot\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\lambda^{j+2}}{j!} = \lambda^2$$

Άρα $Var(x) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$

ΦΑΙΝΟΜΕΝΑ ΠΟΥ ΑΚΟΛΟΥΘΟΥΝ ΤΗΝ ΚΑΤΑΝΟΜΗ POISSON

X με τιμές $\{1,2,3\}$
με πιθανότητες : $\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{2}$

I. Αριθμός ατόμων σε μια πόλη με ηλικία ≥ 100 χρόνια
II. Αριθμος ατομων που πηγαίνουν σινεμά στο Άστυ μια Πέμπτη
III. Αριθμός λάθος τηλεφωνημάτων που γίνονται από 12-1 μία μέρα

"Ποια η αιτία της εμφάνισης της Poisson;"
→ Έχουμε μεγάλο αριθμό ανεξάρτητων μονάδων που η καθεμία κάνει μια συγκεκριμένη ενέργεια Ε με πολύ μικρή πιθανότητα. Το πλήθος αυτό που κάνει την Α είναι σχεδόν Poisson(λ) η τυχαία μεταβλητή για κάποιο λ.
Για την ακρίβεια, είναι $Bin(n,p)$
Αλλά $Bin(n,p) \simeq Poisson(np)$

ΠΡΟΤΑΣΗ
Έστω $\lambda > 0$ και $X_n \sim Bin(n,p_n)$ με $np_n = \lambda$ $\forall n \geq 1$ και $Y \sim Poisson(\lambda)$. Τότε $\forall k \in \mathbb{N}$ ισχυει:

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n=k) = P(Y=k)$$

-Αποδ-

$$P(X_n=k) = \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} =$$

$$= \frac{n\cdot(n-1)\cdot(\ldots)\cdot(n-k+1)}{k!}\cdot\frac{\lambda^k}{n^k}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} =$$

$$= \frac{\lambda^n}{k!}\cdot\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{n^k}\cdot\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\cdot\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{\lambda^k}{k!}\cdot 1\cdot e^{-\lambda}\cdot 1$$

ΑΣΚΗΣΗ 4.11 (φυλλάδιο)

Ασφαλιστής ασφαλίζει 100 οδηγούς για μια χρονιά. Κάθε οδηγός προκαλεί ατύχημα τη δεδομένη χρονιά, με πιθανότητα $p = \frac{1}{1000}$. Έστω X = αριθμός οδηγών που προκαλούν ατύχημα. Να υπολογιστούν οι $P(X \leq 1)$, $P(X=3)$, $P(X=10)$ (α) ακριβώς και (β) με προσέγγιση από Poisson.

-ΛΥΣΗ-

(α) $P(X \leq 1) = P(X=0) + P(X=1) =$

$= (1-p)^{100} + 100p(1-p)^{99} \simeq 0{,}995362$

$P(X=3) = \binom{100}{3} p^3 \cdot (1-p)^{97} \simeq 1467 \cdot 10^{-7}$

$P(X=10) = \binom{100}{10} p^{10} \cdot (1-p)^{90} \simeq 1581 \cdot 10^{-20}$

(β) Με προσέγγιση Poisson

Η X προσεγγίζεται από την $Y \sim Poisson(\underbrace{np}_{100 \cdot \frac{1}{1000} = \frac{1}{10}})$

$P(Y \leq 1) = e^{-\lambda} + e^{-\lambda} \cdot \lambda$

$P(Y=3) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^3}{3!} \approx 1508 \cdot 10^{-7}$

$P(Y=10) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^{10}}{10!} \approx 2493 \cdot 10^{-20}$

6/11/2018 10º μάθημα

Πιθανότητες Ι.

Άσκηση 4.10 (φυλλάδιο) (Θέμα εξετάσεων)

$X = \#$ πελατών που εισέρχεται μια μέρα σ'ένα κατάστημα. Ξέρουμε ότι $X \sim Poisson(120)$. Κάθε πελάτης, ανεξάρτητα απ'τους υπόλοιπους, πληρώνει με κάρτα, με πιθανότητα $p=\frac{1}{4}$ ή με μετρητά με πιθ. $1-p=\frac{3}{4}$

Έστω $Y = \#$ πελατών που πληρώνουν με κάρτα.

ΝΔΟ $Y \sim Poisson(\underset{30}{\lambda p})$

$P(X=k)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$

-ΛΥΣΗ-

Για $k\in\mathbb{N}$, $P(Y=k)=\sum_{j=0}^{\infty}P(Y=k, X=j) = \sum_{j=k}^{\infty}P(Y=k|X=j)P(X=j)=$

$=\sum_{j=k}^{\infty}e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^j}{j!}\binom{j}{k}p^k\cdot(1-p)^{j-k}=$

$\stackrel{\boxed{r=j-k}}{=} e^{-\lambda}\cdot p^k\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\lambda^{r+k}}{(r+k)!}\cdot\frac{(r+k)!}{k!\,r!}(1-p)^r$

$=e^{-\lambda}\cdot p^k\cdot\lambda^k\cdot\frac{1}{k!}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(\lambda(1-p))^r}{r!}=e^{-\lambda}\cdot\frac{(\lambda p)^k}{k!}e^{\lambda-\lambda p}=$

$=e^{-\lambda p}\cdot\frac{(\lambda p)^k}{k!}$, Άρα $Y\sim Poisson(\lambda p)$

Άσκηση 4.12 (φυλλάδιο)

(a) $X\sim Poisson(\lambda)$. Για κάθε $h:\mathbb{R}\to[0,\infty)$, ισχύει $E(Xh(X))=\lambda E(h(X+1))$

-ΛΥΣΗ-

$E(Xh(X))=\sum_{x\in\mathbb{R}}xh(x)f_X(x)=\sum_{k=0}^{\infty}k\cdot h(k)\cdot e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}=$

$=\sum_{k=0}^{\infty}e^{-\lambda}h(k)\frac{\lambda^k}{(k-1)!}\stackrel{n=k-1}{=}\sum_{k=0}^{\infty}e^{-\lambda}\cdot h(n+1)\frac{\lambda^{n+1}}{n!}=$

$=\lambda\sum_{n=0}^{\infty}h(n+1)\cdot e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^n}{n!}=\lambda\cdot Eh(X+1)$

Η γεωμετρική τυχαία μεταβλητή

Έστω $p \in [0,1]$. Θεωρούμε ένα πείραμα που έχει πιθανότητα επιτυχίας p.
Εκτελούμε ακολουθία ανεξάρτητων δοκιμών του πειράματος. Έστω X=αριθμός δοκιμών ως την πρώτη επιτυχία $\in \mathbb{N}^+ \cup \{\infty\}$.
Αν $p=0$, τότε $X(\omega)=\infty \ \forall \omega \in \Omega$.
Αν $p>0$, τότε $P(X<\infty)=1$ (Άσκηση 2.31 (β))
Στο εξής, θα θεωρούμε ότι $p>0$. $[P(X=\omega) \leq (1-p)^n]$
Η X, ονομάζεται γεωμετρική τυχαία μεταβλητή, με παράμετρο p. Λέμε επίσης, ότι η X ακολουθεί τη γεωμετρική κατανομή, με παράμετρο p.
Γράφουμε, $X \sim$ Γεωμετρική (p).

ΠΡΟΤΑΣΗ

Η συνάρτηση πιθανότητας της X, είναι:

$$f_X(k)=P(X=k)=\begin{cases}(1-p)^{k-1}\cdot p & , k\in\mathbb{N}^+\\ 0 & , k\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}^+\end{cases}$$

Συνήθως, θέτουμε $q=1-p$

<u>Παρατήρηση</u>

1). Όπως τα περιμένουμε $\sum_{k=1}^{\infty} f_X(k)=p\sum_{k=1}^{\infty}(1-p)^{k-1}=$

$$=p\cdot\frac{1}{1-(1-p)}=\frac{p}{p}=1.$$

2) $P(X\geq k)=P($οι πρώτες $k-1$ είναι αποτυχίες$)=(1-p)^{k-1}$, $k\in\mathbb{N}$
$P(X>k)=(1-p)^k$, $k\in\mathbb{N}$

Ασκηση: Ριχνουμε ενα αμερόληπτο ζαρι, μεχρι να εμφανιστεί το 1. Ποιο ειναι η πιθανότητα αυτο να συμβει:
(α) στη $10^η$ δοκιμή
(β) πριν τη $10^η$ "
(γ) μετα τη $10^η$ "

-ΛΥΣΗ-

Εστω X: ο αριθμος της δοκιμης που ερχεται 1 για πρώτη φορά.

$X \sim$ Γεωμετρική(p), $p=\frac{1}{6}$

(α) $P(X=10)=(1-p)^9 \cdot p = \frac{5^9}{6^{10}}$

(β) $P(X<10) = 1-P(X \geq 10) = 1-(1-p)^9$

(γ) $P(X>10)=(1-p)^{10}$

ΠΡΟΤΑΣΗ

Αν $X \sim$ Γεωμετρική(p), $p \in [0,1]$, τοτε
(α) $EX=\frac{1}{p}$ (β) $Var(X)=\frac{q}{p^2}$

-Αποδ-

(α) $EX=\sum_{x \in \mathbb{R}} x f_X(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1}p = p \cdot \frac{1}{1-(1-p)^2} = \frac{1}{p}$

$\left[\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot x^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \right]$

(ΧΡΗΣΙΜΟΣ ΤΥΠΟΣ ΓΙΑ ΔΙΑΣΠΟΡΑ τμ ΜΕ ΤΙΜΕΣ ΣΤΟ $\mathbb{N}$
$Var(X) = E(X(X-1)) + EX - (EX)^2$)

$E(X(X-1)) = \sum_{k=1}^{\infty} k\cdot(k-1)\cdot(1-p)^{k-1}p = p(1-p)\sum_{k=2} k(k-1)(1-p)^{k-2}$

όμως για $|x|<1$, ισχυει $\sum_{k=0}^{\infty} k(k-2)x^{k-2} =$

$= (-2)(x-1)^{-3} = \frac{2}{(1-x)^3}$

Αρα, το πιο πανω άθροισμα ισουται με:
$= p(1-p)\frac{2}{p^3} = \frac{2(1-p)}{p^2}$

Αρα, $Var(X) = \frac{2(1-p)}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{2-2p+p-1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2} = \frac{q}{p^2}$

[Παραδειγμα]
Στην προηγουμενη άσκηση X= # δοκιμων ως την εμφάνιση του 1.
$EX = \frac{1}{p^2} = 6$

ΑΣΚΗΣΗ 4.14 (φυλλάδιο)
Εκτελουμε ακολουθια ριψεων αμεροληπτου ζαριου
Εστω X: ο αριθμος δοκιμων που απαιτούνται μέχρι να δουμε και τα δυο αποτελεσματα 3, 4
πχ: στην πραγματοποιηση $\underbrace{5,1,3}, \underbrace{2,6,1,3,4}$, X=8.
EX =?
-ΛΥΣΗ-

$X_1 = \#$ δοκιμων ως την εμφανιση ενος απ' τα 3,4
$X_2 = \#$ επιπλεον δοκιμων ως την εμφανιση του αλλου απ' τα 3,4.
Προφανώς $X = X_1 + X_2$, επειτα
$X_1 \sim$ Γεωμετρική (p_1), $p_1 = P$(ερχεται 3 ή 4) $= \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$X_2 \sim$ Γεωμετρική (p_2), $p_2 = P$(ερχεται το άλλο) $= \frac{1}{6}$

$EX = E(X_1 + X_2) = EX_1 + EX_2 = 3 + 6 = 9$

Άσκηση 4.16 (φυλλάδιο) [Στο προβλημα του συλλ. κουπονιων]
Υπαρχουν n είδη κουπονιων. Καθε φορά που καποιος αγοράζει ενα κουπονι αυτό ειναι ισοπιθανα ενα από τα $1,2,\ldots,n$. Εστω X: ο αριθμος κουπονιών που πρεπει να αγοράσει κάποιος ωστε να βρει και τα n διαφορετικά είδη. Να βρεθει η $\mu_n = EX$. Ποια ειναι η ασυμπτωτική της συμπεριφορά.

-ΛΥΣΗ-

$X_1 = 1$
$X_i = \#$ δοκιμων μετά την εμφανιση του $(i-1)$ στου διαφορετικου κουπονιου ως και " " i-στου " κουπονιού

$X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$
$X_i \sim$ Γεωμετρική (p_i), $p_i = \frac{n-(i-1)}{n}$ $i = 1,2,\ldots,n$

$$EX = \sum_{i=1}^{n} EX_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{n-(i-1)} = n \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n-i+1} \overset{j=n-i+1}{=}$$

$$n \cdot \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} = \mu_n$$

Εχουμε $\frac{\mu_n}{n \cdot \log n} \xrightarrow{n \to \infty} 1$.

διατι $a_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \sim \log n$.

$a_n \geq \int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx = \log(n+1$

$a_n - 1 = \sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j} \leq \int_1^n \frac{1}{x} dx = \log n$.

$\log(nb) \leq a_n \leq 1 + \log n$

$a_n - \log n \to c$
Σταθερά

Ασκηση 4.4 (σ. 199) Ross
X: τμ με τιμες στο $\mathbb{N}$. ΝΔΟ: $EX = \sum_{k=1}^{\infty} P(X \geq k)$

-ΛΥΣΗ-

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(X \geq k) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=k}^{\infty} f_X(j) \quad (1)$$

$f_X : P(X \in A) = \sum_{k \in A} f_X(k)$, $A = [k, \infty) \cap \mathbb{N}$

$$(1) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} 1_{j \geq k} f_X(j) = \sum_{j=1}^{\infty} f_X(j) \sum_{k=1}^{j} 1 = \sum_{j=1}^{\infty} j f_X(j) = EX$$

Ασκηση 4.35 (σελ. 202 - Ross)

Κουτί περιέχει μια μπλε και μια κοκκινη μπαλα. Επιλεγουμε μια στην τύχη και την επανατοποθετούμε μαζί με μια του ιδιου χρώματος. Το κανουμε αυτό συνεχεια. Εστω X = αριθμος δοκιμών ωσπου να δούμε μπλε μπαλα

(α) Να βρεθεί η $P(X>i)$, $i \geq 1$.

(β) $P(X<\infty)=1$.

(γ) $EX = ;$

-ΛΥΣΗ-

$P(X>i) = P$(οι i πρώτες εξαγωγές εδωσαν κοκκινη μπάλα)

(Εστω A_i = η i εξαγωγή βγάζει κοκκινη

$= P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_i) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \ldots$

$P(A_i | A_1 \cap \ldots \cap A_{i-1}) = \frac{1}{\cancel{2}} \frac{\cancel{2}}{\cancel{3}} \frac{3}{4} (\ldots) \frac{i}{i+1} = \frac{1}{i+1}$

(β) $P(X=\infty) \leq P(X>i) = \frac{1}{i+1} \to 0 \quad P(X<\infty)=1)$

(γ) Βρισκουμε $f_X(i) = \frac{1}{i(1+i)}$, $i \geq 1$

Αρα $EX = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i(1+i)} = \infty$

Αλλιώς $EX = \sum_{k=1}^{\infty} P(X \geq k) = \sum_{k=1}^{\infty} P(X > k-1) =$

$= 1 + \sum_{k=2}^{\infty} P(X>k-1) = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$

8/11/2018 [11º μάθημα]

Πιθανότητες Ι - Χελιώτης

§ 4.10 Ιδιότητες της συνάρτησης κατανομής (Ross)

Έχουμε $X: \Omega \to \mathbb{R}$ τυχαία μεταβλητή

$F: \mathbb{R} \to [0,1]$ με $F(x) = P(X \leq x)$ είναι η συνάρτηση κατανομής της X

Ισχύει $\boxed{P(a < X \leq \beta) = F(\beta) - F(a)}$, γιατί

$P(a < X \leq \beta) = P(\{X \leq \beta\} \setminus \{X \leq a\})$

ΠΡΟΤΑΣΗ

F: συνάρτηση κατανομής τυχαίας μεταβλητής X. Ισχύουν τα εξής:

(a) $F \nearrow$ αύξουσα.

(β) $\lim\limits_{t \to -\infty} F(t) = 0$, $\lim\limits_{t \to \infty} F(t) = 1$.

(γ) Η F είναι δεξιά συνεχής

-Αποδ-

(a). Αν $a < \beta$, $F(\beta) - F(a) = P((a < X \leq \beta) \geq 0)$

$\{X \leq a\} \subset \{X \leq \beta\} \xRightarrow{P:\text{ μονοτ.}} P(X \leq a) \leq P(X \leq \beta)$

(β). $\lim\limits_{t \to -\infty} F(t) = \lim\limits_{n \to \infty} F(-n) =$, το όριο υπάρχει γιατί $F \nearrow$

$= \lim\limits_{n \to \infty} P(\{\underbrace{X \leq -n}_{A_n}\}) = P(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n) = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n =$

$= \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq -n\} = \varnothing$.

$\lim\limits_{t \to \infty} F(t) \underset{\text{όπως πριν}}{=\!=} \lim\limits_{n \to \infty} F(n) = \lim\limits_{n \to \infty} P(\{\underbrace{X \leq n}_{B_n}\}) =$

$= P(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \{\omega \in \Omega, X(\omega) \leq n\} = \Omega$

(*) ισούται με $l = \inf\{F(t) : t \in (t_0, \infty)\}$

(γ). Για $t_0 \in \mathbb{R}$: $\lim\limits_{t \to t_0^+} F(t) \overset{(*)}{=} \lim\limits_{n \to \infty} F(t_0 + \frac{1}{n}) =$

$= \lim\limits_{n \to \infty} P(\underbrace{\{X \leq t_0 + \frac{1}{n}\}}_{\Gamma_n}) = P(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \Gamma_n) = P(X \leq t_0) = F(t_0)$

Ισχύει και το αντίστροφο. Δηλαδή αν μια $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ικανοποιεί τα (α), (β), (γ) της πρότασης, τότε $\exists X$ τυχαία μεταβλητή, ώστε η F να είναι η συνάρτηση κατανομής F.

<u>Συμβολισμός</u>: $F(a-) = \lim\limits_{x \to a^-} F(x)$

<u>ΠΡΟΤΑΣΗ</u>

X: τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση κατανομής F, τότε $\forall a \in \mathbb{R}$: ισχύει $P(X = a) = F(a) - F(a-)$

$P(X=a) = P(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \{a - \frac{1}{n} < X \leq a\}) = \lim\limits_{n \to \infty} P(a - \frac{1}{n} < X \leq a) =$

$= \lim\limits_{n \to \infty} (F(a) - F(a - \frac{1}{n}))$

[ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ]: Έστω X = ένδειξη ζαριού, που ρίχνεται τυχαία. $F_X = ;$

$$F_X(t) = P(X \leq t) = \begin{cases} 0 & , t \in (-\infty, 1) \\ \frac{1}{6} & , t \in [1, 2) \\ \frac{2}{6} & , t \in [2, 3) \\ \vdots & \\ \frac{5}{6} & , t \in [5, 6) \\ 1 & , t \geq 6 \end{cases}$$

→ Η αρνητική διωνυμική τυχαία μεταβλητή

Εχουμε πείραμα με πιθανότητα επιτυχίας $p \in (0,1]$. Εκτελούμε ακολουθία πραγματοποιήσεων του.

Εστω $r \in \mathbb{N}^+$.

Θέτουμε X = πλήθος δοκιμών της r επιτυχίας.

Αυτή την τυχαία μεταβλητή τη λέμε αρνητική διωνυμική με παραμέτρους (r, p)

<u>ΠΡΟΤΑΣΗ</u>: Η X έχει συνάρτηση πιθανότητας

$$f_X(k) = P(X=k) = \binom{k-1}{r-1} p^r \cdot (1-p)^{k-r}, \quad k \in \{r, r+1, \dots\}$$

αλλιώς $f_X(k) = 0$, αν $k \notin \{r, r+1, \dots\}$

ΤΟ ΜΕΤΡΟ LEBESGUE

Υπάρχει $A \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$, που περιέχει όλα τα σύνολα που θα χρειαστούμε και μια συνάρτηση $\lambda: A \to [0, \infty)$ που χοντρικά, είναι η $\lambda(A)$ = μήκος (A).

Η λ, ικανοποιεί τις:

(i) $\lambda\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(A_i)$ $\quad \forall (A_i)_{i \geq 1}$ στοιχεία της A ξένα ανά δύο.

(ii) $\lambda(I)$ = μήκος(I) $\forall I \subset \mathbb{R}$ διάστημα.

ΣΥΝΕΧΕΙΣ ΤΥΧΑΙΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ: Η τυχαία μεταβλητή $X: \Omega \to \mathbb{R}$ λέγεται συνεχής, αν υπάρχει $f: \mathbb{R} \to [0, \infty)$ ώστε

$$P(X \in A) = \int_A f(t)\,dt \quad \forall A \subset \mathbb{R}$$

Μια τέτοια f λέγεται πυκνότητα της X. Τα συμβολίζουμε συχνά με f_X. Η f κωδικοποιεί την X.

[Παράδειγμα] : Εστω X: αριθμος που επιλέγω με ομοιόμορφα στο $(0,1)$

Τοτε, $\forall A \subset (0,1)$: $P(X \in A) =$ μήκος (A)

Μια πυκνότητα για την X ειναι η:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , \text{αν } x \in (0,1) \\ 0 & , \text{αν } x \in \mathbb{R} \setminus (0,1) \end{cases}$$

Πράγματι $\forall A \subset \mathbb{R}$, $P(X \in A) = P(X \in A \cap (0,1)) =$
$=$ μήκος $(A \cap (0,1)) = \int_A f(t)dt$

<u>ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ</u> : Για δεδομένη συνεχή τυχαία μεταβλητή X, η f ΔΕΝ είναι μοναδική.

• Αν εχουμε μια πυκνότητα f και αλλάζοντάς την σε αριθμήσιμο πλήθος σημειων, παίρνουμε μια $\tilde{f}$, τοτε και η $\tilde{f}$ είναι πυκνότητα για την X.

• Αν $f, \tilde{f}$ ειναι δυο πυκνοτητες για την X, Τοτε $\lambda(\{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq \tilde{f}(x)\}) = 0$

Στις διακριτές τυχαίες μεταβλητές $f_X(x) = P(X=x)$

Τώρα;

<u>ΠΡΟΤΑΣΗ</u> : X: συνεχής τυχαία μεταβλητή με πυκνότητα f και συνάρτηση κατανομής F. Τότε:

(α) $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1$

(β). $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$

(γ) $f(x) = F'(x)$ $\forall x$ που η f ειναι συνεχής

(δ) Η F ειναι συνεχής

ε) $P(X=t)=0 \quad \forall t\in\mathbb{R}$

ϛ). $P(\alpha\le X\le \beta)=P(\alpha<X<\beta)=F(\beta)-F(\alpha)$

- Αποδ -

(α). $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt=\int_{\mathbb{R}} f(t)\,dt=P(X\in\mathbb{R})=1$

(β). $F(x)=P(X\le x)=P(X\in(-\infty,x])=\int_{(-\infty,x]} f(t)\,dt=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$

(γ) Θεώρημα από Απειροστικό

(δ) Για $x\in\mathbb{R}$: $F(x+)-F(x)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0+}\left(F(x+\varepsilon)-F(x)\right)=$

$=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_{x}^{x+\varepsilon} f(t)\,dt=0$

όμοια $F(x-)=F(x)$

(ε) $P(X=t)=P(X\in\{t\})=\int_{\{t\}} f(x)\,dx=0$

(ϛ) $P(\alpha\le X\le \beta)=P(X=\alpha)+P(\alpha<X\le\beta)=0+F(\beta)-F(\alpha)$

$P(\alpha<X<\beta)=P((\alpha<X\le\beta)\setminus\{X=\beta\})=$

$=P(\alpha<X\le\beta)-P(X=\beta)=F(\beta)-F(\alpha)-0=F(\beta)-F(\alpha)$

<u>ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ</u>

Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι η πυκνότητα μιας συνεχούς τυχαίας μεταβλητής X, αν και μόνο αν:

(i) $f(x)\ge 0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

(ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt=1$

13.11.2018 12º μάθημα

Πιθ. Ι - Χελιώτης

$f = f_X : \mathbb{R} \to [0, \infty)$

$P(X \in A) = \int_A f_X(x)dx \quad \forall A \subset \mathbb{R}$

Παρατήρηση

Οι τιμές της $f(x)$ ΔΕΝ είναι πιθανότητες.

πχ.: είναι δυνατόν $f(x) > 1$ για πολλά x (πχ. προηγούμενο παράδειγμα)

Πιθανότητες είναι τα ολοκληρώματα $\int_A f dx$ της f.

→ Υποθέτουμε ότι η f : συνεχής στο x. Τότε:

$\forall \varepsilon > 0$ μικρό $P(x-\varepsilon < X < x+\varepsilon) = \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} f(t)\,dt \simeq 2\varepsilon f(x)$

$\boxed{\text{ΓΕΝΙΚΑ}}$ αν $I \subset \mathbb{R}$ είναι μικρό διάστημα γύρω απ'το x, τότε $P(X \in I) \simeq f(x)$ μήκος (I)

Άσκηση 5.4 (Ross) σ. 243

Ο χρόνος ζωής (σε ώρες) μιας συσκευής είναι τ.μ. με πυκνότητα $f(x) = \begin{cases} \frac{10}{x^2}, & x > 10 \\ 0, & x \leq 10 \end{cases}$

(α) Να βρεθεί η $P(X > 20)$

(β) Να βρεθεί η F_X (συνάρτηση κατανομής της X)

(γ) Αν έχουμε 6 συσκευές, ποια η πιθανότητα να λειτουργούν τουλάχιστον 3 από αυτές, για τουλάχιστον 15 ώρες;

-ΛΥΣΗ-

(α) $P(X > 20) = \int_{20}^{\infty} f(x)dx = \int_{20}^{\infty} 10 \cdot x^{-2} dx = -10 \cdot x^{-1} \Big|_{20}^{\infty} =$

$= \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$.

(β) Για $x \in \mathbb{R}$: $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \begin{cases} 0 & , x \leq 10 \\ \int_{10}^{x} f(t)\,dt & , x > 10 \end{cases} =$

$= 1_{x>10} \int_{10}^{x} 10 \cdot t^{-2}\,dt = 1_{x>10} \left[-10 \cdot t^{-1}\right]_{10}^{x} = 1_{x>10}\left(1 - \frac{10}{x}\right) =$

$= \begin{cases} 0, & x \leq 10 \\ 1 - \frac{10}{x}, & x > 10 \end{cases}$

(γ) $p = P$(μια συσκευή δουλεύει τουλάχιστον 15 ώρες) $=$
$= P(X>15) = 1 - F_X(15) = 1 - \left(1 - \frac{10}{15}\right) = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$

Έστω N = πλήθος συσκευών από τις $P(X>15)$ 6 που λειτουργούν τουλάχιστον 15 ώρες
$N \sim Bin(6, p)$
Θέλουμε την $P(N \geq 3) = 1 - P(N \leq 2) = 1 - (P(N(0)) + P(N(1)) + P(N(2$

$$P(N=k) = \binom{6}{k} p^k \cdot (1-p)^{6-k}$$

Κοιτάξτε την 5.1 από το φυλλάδιο.

ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ ΚΑΙ ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗ ΣΥΝΕΧΩΝ ΤΥΧΑΙΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

X: συνεχής τυχαία μεταβλητή με πυκνότητα f. Χοντρικά, η μέση τιμή της X ορίζεται ως $EX = \int_{\mathbb{R}} x f(x)\,dx$
Πιο προσεκτικά:

ΟΡΙΣΜΟΣ Η μέση τιμή της X ορίζεται ως,
$EX = \int_{0}^{\infty} x f(x)\,dx - \int_{-\infty}^{0} |x| \cdot f(x)\,dx$, αν η διαφορά ορίζεται
(δηλ. δεν έχουμε μορφή $\infty - \infty$)

Αλλιώς, η EX ΔΕΝ ορίζεται.
Η EX όταν ορίζεται είναι στοιχείο του $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$, έχει τις ίδιες ιδιότητες, όπως και στις διακριτές τυχαίες μεταβλητές

πχ.: $E(X+Y) = EX + EY$

$X \geq 0 \Rightarrow EX \geq 0$

Αν $X \geq 0$, τότε η EX ορίζεται (ίσως όμως να $= \infty$)

[ΑΣΚΗΣΗ 1]

Έστω ότι η X έχει πυκνότητα $f(x) = \begin{cases} 2x, & x \in (0,1) \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$

$EX = ;$

-ΛΥΣΗ-

$$EX = \int_{\mathbb{R}} x f(x)\,dx = \int_0^1 x \cdot 2x\,dx = 2 \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}$$

[ΑΣΚΗΣΗ 2]

X: συνεχής τυχαία μεταβλητή με πυκνότητα

$f(x) = \frac{c}{1+x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

(α) $c = ?$

(β) $EX = ?$

-ΛΥΣΗ-

(α) πρέπει $f \geq 0$ και $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = 1$

Έχουμε $1 = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x}\,dx = c \cdot \lim_{M,N \to \infty} \int_{-M}^{N} \frac{1}{1+x^2}\,dx =$

$= \lim_{M,N \to \infty} \tan^{-1}(x)\Big|_{-M}^{N} = c \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = c \cdot \pi$

Άρα, $c = \frac{1}{\pi}$

(β) Θα έχουμε $EX = \int_0^{\infty} x \cdot f(x)dx - \int_{-\infty}^{0} |x| \cdot f(x)dx$

ανά διαφορά ορίζεται: $\int_0^{\infty} x \cdot f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{x}{1+x^2}dx =$

$= \frac{1}{2\pi}\log(x^2+1)\Big|_0^{\infty} = \infty$

$\int_{\infty}^{0} |x| \cdot f(x)dx = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\infty}^{0} \frac{|x|}{1+x^2}dx \overset{y=x}{=} \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{\infty} \frac{y}{1+y^2}dy = \infty$

Επειδή και τα δύο $= \infty$, η EX ΔΕΝ ορίζεται.

ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΤΥΧΑΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

$X: \Omega \to \mathbb{R}$ συνεχής τυχαία μεταβλητή με πυκνότητα f_X.

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ θέτουμε $Y = g(X)$ τυχαία μεταβλητή

$$\underbrace{\Omega \xrightarrow{X} \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}}_{Y}$$

ΠΡΟΤΑΣΗ

Η $Y = g(X)$ έχει μέση τιμή $E(g(X))$.

$E(g(X)) = \int_{\mathbb{R}} g(x) f_X(x)dx$ αν το ολοκλήρωμα στο δεξί μέλος ορίζεται.

- Για $g(x) = x$ παίρνουμε τον ορισμό της EX
- Για $g(x) = |x|$ παίρνουμε ότι $E|X| = \int |t| f_X(t)dt =$

$= \int_0^{\infty} t \cdot f_X(t)dt + \int_{-\infty}^{0} |t| \cdot f_X(t)dt$

Άρα $EX \in \mathbb{R} \Leftrightarrow E|X| < \infty \Leftrightarrow$

$\int_0^{\infty} t \cdot f_X(t)dt, \int_{-\infty}^{0} |t| \cdot f_X(t)dt < \infty$

ΑΣΚΗΣΗ X: συνεχής τυχαία μεταβλητή με πυκνότητα $f(x) = \frac{1}{x^2} 1_{x \geq 1}$:

$E(\log X) = ;$

-ΛΥΣΗ-

$$E(\log X) = \int_{\mathbb{R}} \log x \, f(x)\,dx = \int_1^{\infty} \log x \cdot \frac{1}{x^2}\,dx =$$

$$= \int_1^{\infty} \log\left(-\frac{1}{x}\right)' dx = -\frac{\log x}{x}\Big|_1^{\infty} + \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx =$$

$$= \left[-\frac{1}{x}\right]_1^{\infty} = 1.$$

ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗ ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΤΥΧΑΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

ορισμός: X: συνεχής τυχαία μεταβλητή με $\mu = EX \in \mathbb{R}$. Διακύμανση (διασπορά) της X, λέμε τον αριθμό $Var(x) = E((X-\mu)^2) \in [0, \infty)$.

Όπως και για τις διακριτές τυχαίες μεταβλητές, ισχύει:

- $Var(x) = E(X^2) - (EX)^2$
- $Var(ax + b) = a^2 \cdot Var(x)$

<u>Παράδειγμα</u>: X τυχαία μεταβλητή με πυκνότητα:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & , x \in (0,1) \\ 0 & , x \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\} \end{cases} \qquad Var(x) = ;$$

-ΛΥΣΗ-

Βρήκαμε πριν, ότι : $EX = \frac{2}{3}$

$$E(X^2) = \int_{\mathbb{R}} x^2 \cdot f(x)\,dx = \int_0^1 x^2 \cdot 2x\,dx = 2\int_0^1 x^2\,dx = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Άρα $Var(x) = E(X^2) - (EX)^2 =$

$$= \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{1}{18} \quad (>0)$$

Η ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗ ΤΥΧΑΙΑ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ (§5.3 Ross)

Έστω $a, \beta \in \mathbb{R}$, $a < \beta$ και X: συνεχής τυχαία μεταβλητή με πυκνότητα

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta - a} & , x \in (a, \beta) \\ 0 & , x \in \mathbb{R} \setminus \{a, \beta\}. \end{cases}$$

Λέμε ότι X είναι ομοιόμορφη τυχαία μεταβλητή στο (a,β). Επίσης, η X ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο (a,β).
Γράφουμε $X \sim U(a,\beta)$
Το ότι η f είναι σταθερή, σημαίνει ότι κάθε σημείο του (a,β) είναι ισοπίθανο με το υπόλοιπο.
Η f είναι πράγματι πυκνότητα, γιατί $f \geq 0$ και
$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1$, $a=0, \beta=1$.

ΠΡΟΤΑΣΗ: Έστω ότι $X \sim U(a,\beta)$. Τότε

(i) $EX = \frac{a+\beta}{2}$

(ii) $Var(X) = \frac{|\beta - a|^2}{12}$

- Απόδ. -

(i) $EX = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = \int_a^\beta x \cdot \frac{1}{\beta - a} dx =$

$= \frac{1}{\beta - a}\left(\frac{\beta^2}{2} - \frac{a^2}{2}\right) = \frac{a+\beta}{2}$

(ii) $E(X^2) = \int_{\mathbb{R}} x^2 f_X(x) dx = \int_a^\beta x^2 \cdot \frac{1}{\beta - a} dx =$

$= \frac{1}{\beta - a} \frac{(\beta^3 - a^3)}{3} = \frac{1}{3} \cdot (a^2 + a\beta + \beta^2)$

$$Var(x) = E(x^2) - (EX)^2 = \frac{1}{3}(a^2+aB+B^2) - \frac{(a+B)^2}{4} =$$

$$= \frac{4a^2+4aB+4B^2-3a^2-6aB-3B^2}{12} = \frac{(B-a)^2}{12}$$

ΑΣΚΗΣΗ 5.13 (Ross σ.244)

Φτάνουμε στις 10 σε μία στάση λεωφορείου. Το λεωφορείο φτάνει κάποια στιγμή ομοιόμορφα κατανεμημένη μεταξύ 10 και 10:30.

(α) Ποια η πιθανότητα να περιμένουμε πάνω από 10 λεπτά;

(β). Αν το λεωφορείο δεν έχει έρθει στις 10:15 ποια η πιθανότητα να περιμένουμε τουλάχιστον 10 λεπτά ακόμη;

-ΛΥΣΗ-

(α) Έστω X = χρόνος που θα περιμένουμε ώσπου να έρθει το λεωφορείο (εκφρασμένο σε λεπτά)

$X \sim U(0,30)$, δηλαδή έχει πιθανότητα

$$f(x) = \frac{1}{30} 1_{x \in (0,30)}$$

(α) $P(X>10) = \int_{10}^{\infty} f(x)dx = \int_{10}^{30} \frac{1}{30}dx = \frac{2}{3}$

(β) $P(X>25 \mid X \geq 15) = \frac{P(X>25, X \geq 15)}{P(X \geq 15)} =$

$$= \frac{P(X>25)}{P(X \geq 15)} = \frac{\frac{5}{30}}{\frac{15}{30}} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

Παρατηρηση

Αν $X \sim U(a,\beta)$ και $I \subset (a,\beta)$, τοτε:

$$P(X \in I) = \int_I \frac{1}{\beta - a}\,dx = \frac{\text{μηκος}(I)}{\text{μηκος}(a,\beta)}$$

ΑΣΚΗΣΗ: Ενας αριθμος επιλεγεται ομοιόμορφα στο $(-7,8)$. Ποια είναι η πιθανοτητα η εξίσωση $3t^2 + Bt + 3 = 0$ να εχει τουλάχιστον μια πραγματική ρίζα;

-ΛΥΣΗ-

$$\Delta = B^2 - 36 = (B-6)(B+6)$$

Θελουμε: $\Delta \geq 0$, δηλ $|B| \geq 6$

$$P(\Delta \geq 0) = P(|B| \geq 6) = P(B \in (-7,-6]) + P(B \in [6,8)) =$$

$$= \frac{1}{15} + \frac{2}{15} = \frac{1}{5}$$

ΑΣΚΗΣΗ 5.2 (φυλλάδιο)

Η X έχει πυκνότητα $f(x) = c \cdot x^{-r} \mathbb{1}_{x \geq 1}$, όπου $c, r \geq 0$.

(a) ποιες είναι οι επιτρεπτές μορφές του r;

(β) $c = ;$ ως συνάρτηση του r

(γ). Για ποια r ισχύει $EX < \infty$

(δ) Για δοσμένο r, για ποια $a \in \mathbb{R}$, ισχύει: $E(X^a) < \infty$

-ΛΥΣΗ-

(a) πρεπει $1 = \int_{\mathbb{R}} f(x)dx = c \cdot \int_1^{\infty} x^{-r} dx = \begin{cases} \infty, & \text{αν } r \leq 1 \\ \frac{c}{r-1} \circledast, & \text{αν } r > 1 \end{cases}$

$$\circledast \quad \frac{x^{1-r}}{1-r}\Big|_1^{\infty} = 0 - \frac{1}{1-r} = \frac{1}{r-1}$$

(β) $\int_{\mathbb{R}} f dx = 1 \Rightarrow C = r-1$

(γ) $EX = \int_{\mathbb{R}} x f(x) dx = C \cdot \int_1^\infty \frac{x}{x^r} dx = C \cdot \int_1^\infty x^{1-r} dr < \infty$,

αν και μόνο αν $r-1>1 \Rightarrow r>2$

(δ) $E(X^a) = \int_{\mathbb{R}} x^a f(x) dx = C \int_1^\infty x^{a-r} dx < \infty$ αν και

μονο αν $r-a>1 \Rightarrow a<r-1$

Υπενθύμιση

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \quad (\text{Απειροστ. Λογ. III})$$

§ 5.4 Κανονικές τυχαίες μεταβλητές

ΟΡΙΣΜΟΣ

Εστω $\mu \in \mathbb{R}$ και $\sigma \in (0,\infty)$. Μια τυχαία μεταβλητή X με πυκνότητα $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}$ $\forall x \in \mathbb{R}$,

την ονομάζουμε κανονική με παραμέτρους μ, σ^2. Γράφουμε $X \sim N(\mu, \sigma^2)$
Θα δούμε πιο κάτω οτι $\mu = EX$, $\sigma^2 = Var(X)$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

1) Η f είναι πράγματι πυκνότητα, γιατί $f \geq 0$ και $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} - \frac{1}{2} \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = 1$

20/11/2018 Πιθ. Ι 13ο μάθημα ①

Η ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΤΥΧΑΙΑ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ

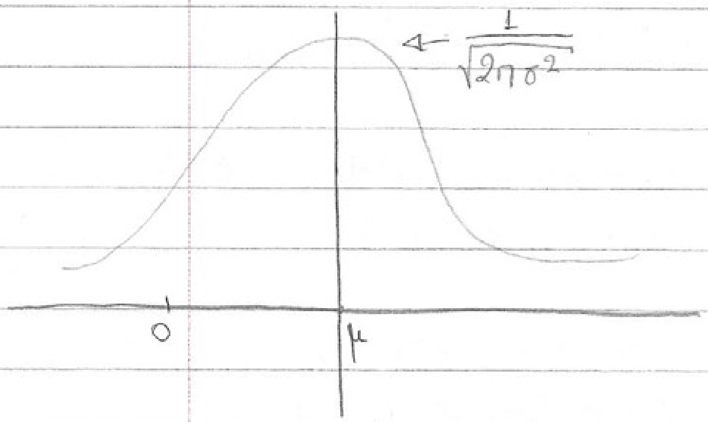
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

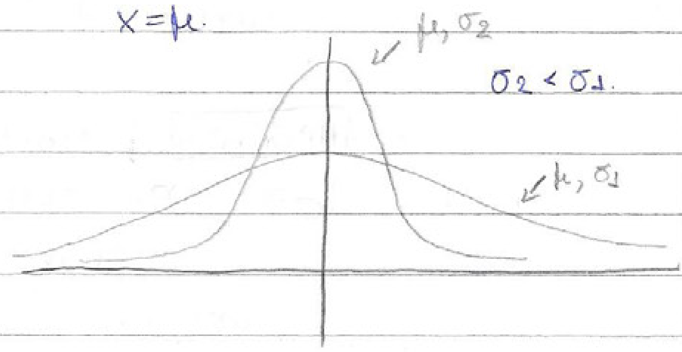
1). Η f είναι πυκνότητα

2). Το γράμμα της f έχει τα εξής χαρακτηριστικά:

- Μέγιστο στο $x=\mu$, με τιμή $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}$
- Συμμετρικό γύρω απ' το μ



- Όσο πιο μικρό το σ, τόσο πιο μυτερή η κορυφή στο $x=\mu$.



3). Όταν $\mu=0$, $\sigma^2=1$ λέμε την X τυπική κανονική τυχαία μεταβλητή ή ότι ακολουθεί την τυπική κανονική κατανομή $N(0,1)$

Αυτή έχει πυκνότητα $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$

ΜΕΓΕΘΗ ΠΟΥ ΑΚΟΛΟΥΘΟΥΝ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΑ ΤΗΝ ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ

→ Ύψος ενός τυχαίου κατοίκου της Αθήνας
→ Χρόνος αποφοίτησης απ'το μαθηματικό
→ Βαθμολογία ενός ατόμου στις πιθανότητες I.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Y: τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση κατανομής F, ώστε η F είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο $f := F'$. Τότε, η f είναι μια πυκνότητα για την Y.

-Αποδ-

Για $a<\beta$ ισχύει $P(a \leq Y \leq \beta) = F(\beta) - F(a) =$
$= \int_a^\beta F'(x)dx = \int_a^\beta f(x)dx$ επειδή η f' είναι συνεχής

Αυτό δίνει ότι $P(Y \in A) = \int_A f(x)dx \quad \forall A \subset \mathbb{R}$ και άρα η f είναι πυκνότητα της Y.

ΠΡΟΤΑΣΗ Έστω ότι $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $a \neq 0$, $\beta \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}, \sigma \in (0, \infty)$
Τότε, η $Y = aX + \beta \sim N(a\mu + \beta, a^2\sigma^2)$

-Αποδ-

Βρίσκουμε την F_Y
Υποθέτουμε ότι $a>0$
Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, έχουμε : $F_Y(x) = P(Y \leq x) = P(aX + \beta \leq x) \overset{a>0}{=}$
$P(X \leq \frac{x-\beta}{a}) = F_X(\frac{x-\beta}{a})$

Η $F_X(t) = \int_{-\infty}^t f_X(s)ds$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη,

με $F_X'(t) = f_X(t)$
Άρα, και η F_Y είναι C^1. Με βάση την προηγούμενη παρατήρηση, η Y έχει πυκνότητα:

$$f_Y(x) = F'_Y(x) = F'_X\left(\frac{x-b}{a}\right)\cdot\frac{1}{a} = f_X\left(\frac{x-b}{a}\right)\cdot\frac{1}{a} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2\cdot a^2}}\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sigma^2}\cdot\left(\frac{x-b}{a}-\mu\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\cdot(a\sigma)^2}}\cdot e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-a\mu-b)^2}{(a\sigma)^2}}$$ αυτή είναι η πυκνότητα της $N(a\mu+b, a^2\sigma^2)$

ΠΟΡΙΣΜΑ 1

(i) Αν $X \sim N(\mu,\sigma^2)$, τότε η $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

(ii) Αν $Z \sim N(0,1)$, τότε η $X = \mu + \sigma Z \sim N(\mu,\sigma^2)$

- Αποδ -

(i) Στην προηγούμενη πρόταση παίρνουμε $a = \frac{1}{\sigma}$, $b = -\frac{\mu}{\sigma}$

Τότε, πρέπει $Z \sim N(a\mu+b, a^2\sigma^2) =$
$= N\left(\frac{\mu}{\sigma}-\frac{\mu}{\sigma}, \frac{1}{\sigma^2}\cdot\sigma^2\right) = N(0,1)$

(ii) Τώρα έχουμε $\mu=0$, $\sigma=1$
Παίρνουμε $a=\sigma$, $b=\mu$ στην προηγούμενη πρόταση

$\boxed{\text{Θεώρημα}}$ Αν $X \sim N(0,1)$, τότε $EX=0$, $Var(X)=1$

-Αποδ-

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

f_X: περιττή

$$EX = \int_{\mathbb{R}} x\cdot f_X(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x\cdot\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dx = 0$$

f_X: άρτια: $\int_{-\infty}^{0} x f_X(x)dx + \int_{0}^{\infty} x f_X(x)dx = \int_{\infty}^{0} y f_X(y)dy +$

$+ \int_0^{\infty} x\cdot f_X(x)dx$

υπάρχουν και είναι πεπερασμένα

(ii) $Var(x) = E(x^2) - (EX)^2 = E(x^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dx =$

$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot (-e^{-\frac{x^2}{2}})' dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[-x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\right]_{-\infty}^{\infty} +$

$+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1$

ΠΟΡΙΣΜΑ 2

Αν $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ $\mu \in \mathbb{R}, \sigma \in (0,\infty)$, τότε

(i) $EX = \mu$ και

(ii) $Var(x) = \sigma^2$

-Απόδ-

Από το πόρισμα 1, η $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$, έχει κατανομή

$N(0,1)$.

$x = \sigma \cdot Z + \mu$

(i) $EX = \mu + \sigma \cdot EZ^{=0} = \mu$ → από το προηγούμενο θεώρημα.

(ii) $Var(x) = Var(\sigma \cdot Z + \mu) = Var(\sigma Z) = \sigma^2 \cdot Var(Z) =$
$= \sigma^2$

Από το πόρισμα 1, όλες οι τυχαίες μεταβλητές με κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$ μπορούν να παραχθούν από μια, με κατανομή $N(0,1)$.

Την συνάρτηση κατανομής μιας $Z \sim N(0,1)$, την συμβολίζουμε με Φ.

Δηλαδή, $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Η Φ, αρκεί για υπολογισμούς πιθανοτήτων, που αφορούν οποιαδήποτε $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Αν $X \sim N(-2,5)$ να βρεθεί με χρήση της Φ, η πιθανότητα $P(X \in (-10,1))$.

-ΛΥΣΗ-

Η $Z = \dfrac{X-(-2)}{\sqrt{5}} \sim N(0,1)$.

Τώρα $P(-10<X<1) = P(-8 < X+2 < 3) = P\left(-\dfrac{8}{\sqrt{5}} < \dfrac{X+2}{\sqrt{5}} < \dfrac{3}{\sqrt{5}}\right) =$

$= P\left(-\dfrac{8}{\sqrt{5}} < Z < \dfrac{3}{\sqrt{5}}\right) = \Phi\left(\dfrac{3}{\sqrt{5}}\right) - \Phi\left(-\dfrac{8}{\sqrt{5}}\right)$

ΟΡΟΛΟΓΙΑ: Αν η X είναι $EX = \mu$ και $Var(X) = \sigma^2$, $\sigma \in (0,\infty)$.

Τότε η $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ λέγεται κανονικοποίηση της X.

Η Z έχει $EZ = \dfrac{1}{\sigma} E(X-\mu) = \dfrac{1}{\sigma}(\mu-\mu) = 0$

$Var(Z) = \dfrac{1}{\sigma^2} Var(X-\mu) = \dfrac{1}{\sigma^2} \cdot \sigma^2 = 1$.

Αρκεί να έχουμε τις τιμές $\Phi(x)$ για $x \geq 0$ για τον εξής λόγο

ΠΡΟΤΑΣΗ: Για κάθε $x \geq 0$ ισχύει $\Phi(x) + \Phi(-x) = 1$.

-Απόδ-

Έστω $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$, η πυκνότητα μιας τυχαίας

μεταβλητής $X \sim N(0,1)$

1ος τρόπος: Έστω $H(x) = \Phi(x) + \Phi(-x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Η H είναι παραγωγίσιμη, με $H'(x) = \Phi'(x) - \Phi'(-x) = f(x) - f(-x) = 0$

Άρα, $\exists c \in \mathbb{R}$, ώστε $\Phi(x) + \Phi(-x) = c$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Για $x \to \infty$, είναι $c = \Phi(\infty) + \Phi(-\infty) = 1 + 0 = 1$.

<u>2ος τρόπος</u> : $\Phi(-x) = \int_{-\infty}^{-x} f(t)\,dt \overset{s=-t}{=\!=\!=}$

$= \int_{\infty}^{x} f(-s)\,ds = \int_{x}^{\infty} f(s)\,dx$

<u>Άρα</u> : $\Phi(x) + \Phi(-x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt + \int_{x}^{\infty} f(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1$

<u>Ειδικά</u>, για $x=0$ παίρνουμε $\Phi(0) = \frac{1}{2}$

[ΑΣΚΗΣΗ] Ross - προβλ. 5.15 σελ. 244
Έστω ότι $X \sim N(10, 36)$. Να υπολογιστούν με τη βοήθεια της $\Phi(x)$, $x \geq 0$ οι πιθανότητες

(α) $P(X>5)$
(β) $P(4<X<16)$
(γ) $P(X<8)$
δ) $P(X<20)$
ε) $P(X>16)$

-ΛΥΣΗ-

$\boxed{\Phi(x)+\Phi(-x)=1}$

$\boxed{X = 10+6Z}$

Η $Z = \frac{X-10}{6} \sim N(0,1)$

(α) $P(X>5) = P(10+6Z>5) = P(Z > -\frac{5}{6}) =$

$= 1 - P(Z \leq -\frac{5}{6}) = 1 - \Phi(-\frac{5}{6}) = \Phi(\frac{5}{6})$

(β) $P(4<X<16) = P(4<10+6Z<16) = P(-1<Z<1) =$
$= \Phi(1) - \Phi(-1) = \Phi(1) - (1-\Phi(1)) = 2\Phi(1) - 1.$

(γ) $P(X<8) = P(10+6Z<8) = P(Z<-\frac{1}{3}) =$
$= \Phi(-\frac{1}{3}) = 1 - \Phi(\frac{1}{3})$

(δ) $P(X<20) = P(10+6Z<20) = P(Z<\frac{5}{3}) =$
$= \Phi(\frac{5}{3})$.

(ε) $P(X>16) = P(10+6Z>16) = P(Z>1) =$
$= 1-P(Z\le 1) = 1-\Phi(1)$

ΑΣΚΗΣΗ 5.7 (φυλλάδιο)

X: σ/χής τυχαία μεταβλητή. Ο $a\in\mathbb{R}$ λέγεται διάμεσος της X, αν $P(X\ge a) = P(X\le a)$

(α) ΝΔΟ κάθε X συνεχής τυχαία μεταβλητή έχει τουλάχιστον μια διάμεσο. Μπορεί να έχει παραπάνω από έναν;

(β). Βρείτε έναν διάμεσο για μια $X\sim N(\mu,\sigma^2)$. Είναι μοναδικός;

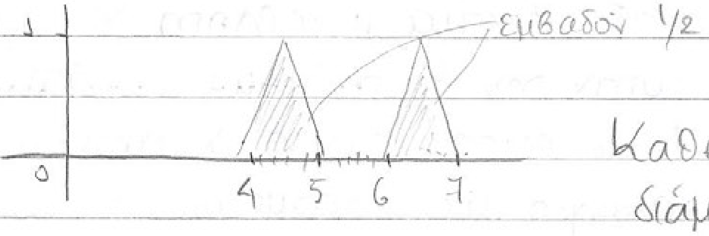
-ΛΥΣΗ-

a: διάμεσος $\Leftrightarrow P(X\le a) = P(X\ge a) = 1-P(X<a) =$
$= 1-P(X\le a) \Leftrightarrow P(X\le a)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow F(a)=\frac{1}{2}$.

α) Η F_X είναι συνεχής, $F(-\infty)=0$, $F(\infty)=1$,
$F(\kappa)<\frac{1}{10}$ $F(M)>\frac{2}{3}$

$\exists\, a\in\mathbb{R}$ τω $F(a)=\frac{1}{2}$

Μη μοναδικότητα: Αν πάρουμε πυκνότητα, όπως στο σχήμα



Κάθε $a\in[5,6]$ είναι διάμεσος.

(β). Αν $X\sim N(\mu,\sigma^2)$, τότε $F_X(x) = P(X\le x) =$
$= P\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\le\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$

a: διάμεσος $\Leftrightarrow F_X(a)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\frac{a-\mu}{\sigma}=0 \Leftrightarrow \boxed{a=\mu}$

ΑΣΚΗΣΗ 5.9 - φυλλάδιο

$Z \sim N(0,1)$, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με συνεχή παράγωγο και
$I = \{x \in \mathbb{R},\ g(x) \neq 0\}$ φραγμένο.
ΝΔΟ $E(g'(x)) = E(Xg(x))$

-ΛΥΣΗ-

Εστω $a < \beta$, ώστε $I \subset (a, \beta)$, τότε

$$E g'(X) = \int_{\mathbb{R}} g'(x) f_X(x)\,dx = \int_a^{\beta} g'(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx =$$

$$= g(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \Big|_a^{\beta} - \int_a^{\beta} g(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} (-x)\,dx =$$

$$= 0 - 0 \int_a^{\beta} x g(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$$

Η ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΤΥΧΑΙΑ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ

Εστω $\lambda > 0$ και

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x}, & \text{αν } x > 0 \\ 0, & \text{αν } x \leq 0 \end{cases}$$

Κάθε τυχαία μεταβλητή X, που έχει πυκνότητα αυτήν την f, τη λέμε εκθετική με παράμετρο λ.
Λέμε επίσης ότι η X ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο λ.
Γράφουμε $X \sim Exp(\lambda)$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: 1) Η f είναι πράγματι πυκνότητα, γιατί $f(x) \geq 0$ και $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = \int_0^{\infty} \lambda \cdot e^{-\lambda x}\,dx =$

$$= -e^{-\lambda x} \Big|_0^{\infty} = 1.$$

2). Μια $X \sim exp(\lambda)$ παίρνει μόνο θετικές τιμές, αφού $f_X(x) = 0 \quad \forall x \leq 0$

3). Για $x>0$, έχουμε $P(X>x)=\int_x^{\infty} f(t)dt=$

$$=\int_x^{\infty}\lambda\cdot e^{-\lambda t}dt = e^{-\lambda t}\Big|_x^{\infty}=e^{-\lambda x}$$

Άρα $F_X(x)=P(X\leq x)=1-P(X>x)=\begin{cases}0, & \text{αν } x\leq 0\\ 1-e^{-\lambda x}, & \text{αν } x>0\end{cases}$

ΜΕΓΕΘΗ ΠΟΥ ΑΚΟΛΟΥΘΟΥΝ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΑ ΤΗΝ ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ

- χρόνος μεταξύ δύο διαδοχικών αφίξεων ατόμων σ'ένα ταχυδρομείο.
- χρονος ζωής μιας λάμπας
- χρονος για τη διασπαση ενός ατόμου ραδιενεργου υλικού (αλλαγή ατομικού αριθμού)

ΠΡΟΤΑΣΗ

Αν $X\sim exp(\lambda)$, τότε:

i). $EX=\frac{1}{\lambda}$

ii) $Var(X)=\frac{1}{\lambda^2}$

-Απόδ-

i). $EX=\int_{\mathbb{R}} x\cdot f(x)dx=\int_0^{\infty}x\cdot\lambda e^{-\lambda x}dx=\int_0^{\infty}x\cdot(-e^{-\lambda x})'dx=$

$$=-x\cdot e^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty}+\int_0^{\infty}1\cdot e^{-\lambda x}dx=\int_0^{\infty}e^{-\lambda x}dx=-\frac{1}{\lambda}\cdot e^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty}=\frac{1}{\lambda}$$

ii) $E(X^2) = \int_{\mathbb{R}} x^2 \cdot f(x)dx = \int_0^{\infty} x^2 \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda x} dx =$

$= \int_0^{\infty} x^2 \cdot (-e^{-\lambda x})' dx = -x^2 \cdot e^{-\lambda x} \Big|_0^{\infty} + 2\int_0^{\infty} x \cdot e^{-\lambda x} dx =$

$= \frac{2}{\lambda} \cdot \int_0^{\infty} x \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx \overset{(i)}{=} \frac{2}{\lambda^2}$

Άρα, $Var(X) = E(X^2) - (EX)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}$

14ο μάθημα

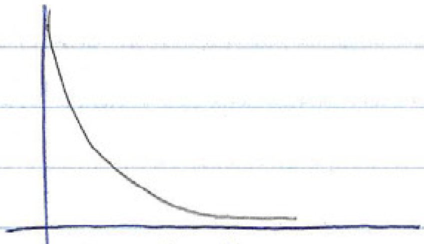
(1)

22/11/2018

Πιθανότητες Ι.

$X \sim \exp(\lambda)$

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x} & , x > 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$



$P(X \in A) = \int_A f(t)\,dt$

ΑΣΚΗΣΗ

Έστω ότι $X \sim \exp(\lambda)$. Να βρεθεί το λ σε καθεμία απ'τις παρακάτω περιπτώσεις.

(α) $EX = 5$

(β) $P(X \le 1) = P(X > 1)$

(γ) $P(X \le 2) = 2P(X > 2)$

(δ) $Var(X) = EX$

-ΛΥΣΗ-

(α) $EX = \frac{1}{\lambda}$, άρα $\lambda = \frac{1}{5}$

(β) $1 - e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \Leftrightarrow e^{-\lambda} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \lambda = \log 2$

(γ) $1 - e^{-2\lambda} = 2 \cdot e^{-2\lambda} \Leftrightarrow e^{-2\lambda} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2} \cdot \log 3$

(δ) $Var(x) = EX \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda} \Leftrightarrow \lambda = 1$

ΑΣΚΗΣΗ

Αν $X \sim \exp(\lambda)$, νδο $E(X^k) = \frac{k!}{\lambda^k}$

-ΛΥΣΗ-

Για $k \in \mathbb{N}^+$: $E(X^k) = \int_{\mathbb{R}} x^k \cdot f_X(x)\,dx = \int_0^\infty x^k \cdot \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \int_0^\infty x^k \cdot (-e^{-\lambda x})\,dx =$

$$= -x^k \cdot e^{-\lambda x}\Big|_0^\infty + k \cdot \int_0^\infty x^{k-1} \cdot e^{-\lambda x}\,dx = \frac{k}{\lambda} \cdot \underbrace{\int_0^\infty x^{k-1} \cdot \lambda e^{-\lambda x}\,dx}_{E(X^{k-1})}$$

Άρα, $E(X^k) = \frac{k}{\lambda} \cdot E(X^{k-1}) \quad \forall k \in \mathbb{N}^+$

Επίσης, $E(X^0) = 1$

Η ζητούμενη έπεται με επαγωγή

$$E(X^k) = \frac{k}{\lambda} \cdot \frac{k-1}{\lambda} \cdot \frac{k-2}{\lambda} \cdots \frac{1}{\lambda} \cdot E(X^0) = \frac{k}{\lambda^k}$$

ΟΡΟΛΟΓΙΑ

Αν X: τυχαία μεταβλητή, τον αριθμό $E(X^k)$, $k \in \mathbb{N}$ (αν ορίζεται) τον λέμε ροπή k-τάξης της X

ΕΛΛΕΙΨΗ ΜΝΗΜΗΣ ΤΗΣ ΕΚΘΕΤΙΚΗΣ

Αν $X \sim exp(\lambda)$ και $s, t \geq 0$, τότε:

$$P(X > s+t \mid X > s) = P(X > t)$$

-Αποδ-

Το αριστερό μέλος είναι:

$$\frac{P(X>s+t,\, X>s)}{P(X>s)} = \frac{P(X>s+t)}{P(X>s)} = \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda s}} = e^{-\lambda t} =$$

$= P(X > t)$

Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΓΑΜΜΑ

Αυτή είναι $\Gamma: (0,\infty) \to \mathbb{R}$ με

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x}\, dx$$

ΠΡΟΤΑΣΗ

1) $\Gamma(a) < \infty \quad \forall a>0$

2). $\Gamma(1)=1$

3). $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$

4). $\Gamma(a+1) = a\cdot\Gamma(a) \quad \forall a>0$

5). $\Gamma(n) = (n-1)! \quad \forall n\in\mathbb{N}^+$

- Απόδ -

1). $\int_0^\infty x^{a-1}\cdot e^{-x}dx = \int_0^1 x^{a-1}\cdot e^{-x}dx + \int_1^\infty x^{a-1}\cdot e^{-x}dx$

Το πρώτο ολοκλήρωμα συγκλίνει, διότι
$x^{a-1}\cdot e^{-x} < x^{a-1}$ και $\int_0^1 x^{a-1}dx = x^a\Big|_0^1 = \frac{1}{a} < \infty$

Υπάρχει $M>0$, ώστε: $x^{a-1}\cdot e^{-x} < e^{-x/2}$, διότι
$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^{a-1}\cdot e^{-x}}{e^{-x/2}} = 0$

Άρα $\int_1^\infty x^{a-1}\cdot e^{-x}dx \leq \int_1^M dx + \underbrace{\int_M^\infty e^{-x/2}dx}_{= 2\cdot e^{-M/2}} < \infty$

$$\left[\begin{aligned} &\Gamma(0) = \int_0^\infty \frac{1}{x}\cdot e^{-x}dx \\ &e^{-1}\cdot\int_0^1 \frac{1}{x}dx = \log x\Big|_0^1 = 0-(-\infty) = \infty \end{aligned}\right]$$

2). $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}dx = -e^{-x}\Big|_0^\infty = -e^{-\infty} - (-e^0) = 1$

3) $\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^\infty x^{-1/2}\cdot e^{-x}dx \overset{x=y^2}{=\!=} \int_0^\infty y^{-1}\cdot e^{-y^2}2ydy =$

$2\cdot\int_0^\infty e^{-y^2}dy = \int_{-\infty}^\infty e^{-y^2}dy = \sqrt{\pi}$

4) $\Gamma(a+1) = \int_0^\infty x^a \cdot e^{-x} dx = \int_0^\infty x^a \cdot (-e^{-x})' dx =$

$= -x^a \cdot e^{-x} \Big|_0^\infty + a \cdot \int_0^\infty x^{a-1} \cdot e^{-x} dx = a \cdot \Gamma(a)$

5). Επαγωγικα

· $n=1$ ισχύει αφού $\Gamma(1)=1$

Αν ισχύει για n, τοτε $\Gamma(n+1) \overset{4)}{=\!=} n \cdot \Gamma(n) = n \cdot ((n-1)!) = n!$

Η ΤΥΧΑΙΑ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ ΓΑΜΜΑ

Εστω $a, \lambda > 0$ την συνεχη τυχαια μεταβλητη με πυκνότητα:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \cdot x^{a-1} \cdot e^{-\lambda x} & , x > 0 \\ 0 & , x \leq 0 \end{cases}$$

Τη λέμε γάμμα με παραμέτρους a, λ.

Γράφουμε $X \sim \Gamma(a, \lambda)$

<u>ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ</u>

1). Η f ειναι πραγματι πυκνότητα, γιατι $f \geq 0$ και $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = \int_0^\infty f(x) dx = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \int_0^\infty x^{a-1} \cdot e^{-\lambda x} dx \overset{y=\lambda x}{=\!=}$

$= \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \int_0^\infty \frac{y^{a-1}}{\lambda^{a-1}} \cdot e^{-y} \cdot \frac{1}{\lambda} dy = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty y^{a-1} \cdot e^{-y} dy = 1$

2). Όταν $a=1$, τότε η $\Gamma(1, \lambda)$ έχει πυκνότητα $\lambda \cdot e^{-\lambda x} 1_{x>0}$, που είναι η πυκνότητα της εκθετικής ($\exp(\lambda)$) με παράμετρο λ. Αρα, $\Gamma(1, \lambda)$ είναι η $\exp(\lambda)$

ΑΣΚΗΣΗ

Έστω $X \sim \Gamma(a,\lambda)$. ΝΔΟ $E(X^r) = \dfrac{\Gamma(a+r)}{\lambda^r \cdot \Gamma(a)}$ $\forall r \geq 0$

$\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} dx$

-ΛΥΣΗ-

$$E(X^r) = \int_{\mathbb{R}} x^r \cdot f(x) dx = \int_0^\infty x^r \cdot \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \cdot x^{a-1} \cdot e^{-\lambda x} dx =$$

$$= \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \cdot \int_0^\infty x^{a+r-1} \cdot e^{-\lambda x} dx = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \int_0^\infty \underbrace{\frac{\lambda^{a+r}}{\Gamma(a+r)} x^{a+r-1} \cdot e^{-\lambda x}}_{\text{πυκνότητα της } \Gamma(a+r,\lambda)} dx \, \frac{\Gamma(a+r)}{\lambda^{a+r}} =$$

$$= \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \Big| \frac{\Gamma(a+r)}{\lambda^{a+r}} = \frac{\Gamma(a+r)}{\lambda^r \cdot \Gamma(a)}$$

$\boxed{\text{ΠΡΟΤΑΣΗ}}$

Αν $X \sim \Gamma(a,\lambda)$, τότε (i) $EX = \dfrac{a}{\lambda}$

(ii) $Var(X) = \dfrac{a}{\lambda^2}$

-Αποδ-

(i) $EX = \dfrac{\Gamma(a+1)}{\lambda \cdot \Gamma(a)} = \dfrac{a \cdot \cancel{\Gamma(a)}}{\lambda \cdot \cancel{\Gamma(a)}} = \dfrac{a}{\lambda}$

(ii) $E(X^2) = \dfrac{\Gamma(a+2)}{\lambda^2 \cdot \Gamma(a)} = \dfrac{(a+1) \cdot \Gamma(a+1)}{\lambda^2 \cdot \Gamma(a)} = \dfrac{(a+1) \cdot a \Gamma(a)}{\lambda^2 \cdot \Gamma(a)} = \dfrac{(a+1) \cdot a}{\lambda^2}$

Άρα, $Var(X) = E(X^2) - (EX)^2 = \dfrac{(a+1) \cdot a}{\lambda^2} - \dfrac{a^2}{\lambda^2} = \dfrac{a}{\lambda^2}$

§ 5.7 (Ross) ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΤΥΧΑΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

Εστω X: συνεχής τυχαία μεταβλητη με πυκνότητα f_X και $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Ερώτημα: ποια η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής $Y = g(X)$;

Δηλαδή, ποια είναι η f_Y → συναρτηση πιθαν. αν Y: διακριτή
→ πυκνότητα αν η Y είναι συνεχής

$$\Omega \xrightarrow{X} \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$
$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{Y}$$

$f_Y(t) = P(Y=k)$

$Eg(X) = \int g(x) f_X(x)\,dx$

Περίπτωση 1: Y: διακριτή

Τότε υπολογίζουμε απευθείας την $f_Y(t) = P(Y=t) = P(g(X)=t)$

ΑΣΚΗΣΗ·

Εστω $\lambda>0$ και $X \sim \exp(\lambda)$.

Ποια η κατανομή της $Y = [X]$;

-ΛΥΣΗ-

Η Y παίρνει τιμές στο $\mathbb{Z}$, άρα είναι διακριτή

Για $k \in \mathbb{R}$, $f_Y(k) = P(Y=k) = P([X]=k)$

Αν $k \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$, η τελευταία πιθανότητα $= 0$.

Αν $k \in \mathbb{N}$ " " $= P(k \le X \le k+1) =$

$= \int_k^{k+1} f_X(t)\,dt = \int_k^{k+1} \lambda e^{-\lambda t}\,dt = -e^{-\lambda t}\Big|_k^{k+1} = e^{-\lambda k} - e^{-\lambda(k+1)} =$

$= e^{-\lambda k} \cdot (1-e^{-\lambda}) = (1-p)^k p$ με $p = 1-e^{-\lambda}$ τροποποιημένη γεωμετρική

ΑΣΚΗΣΗ (Ross 55 / σελ 249)

Έστω $n \in \mathbb{N}^+$. Διακριτή ομοιόμορφη τυχαία μεταβλητή στο $\{1,2,\dots,n\}$ λέμε κάθε W, με $P(W=k)=\frac{1}{n}$ για $k=1,2,\dots,n$

Αν $X \sim U(0,1)$ νδό η:

$Y=[nX]+1$, είναι διακριτή ομοιόμορφη στο $\{1,2,\dots,n\}$

-ΛΥΣΗ-

Επειδή η X παίρνει τιμές στο $(0,1)$

η nX " " στο $(0,n)$

η $[nX]$ " " στο $0,1,\dots,n-1$

η Y " " στο $1,2,\dots,n$

Άρα, αν $a \in \mathbb{R} \setminus \{1,2,\dots,n\}$, τότε $f_Y(a)=P(Y=a)=0$

αν $a \in \{1,2,\dots,n\}$, τότε $f_Y(a)=P(Y=a)=P([nX]=a-1)=$

$=P(a-1 \leq nX \leq a)=P\left(\frac{a-1}{n} \leq X \leq \frac{a}{n}\right)=$

$$=\int_{\frac{a-1}{n}}^{\frac{a}{n}} f_X(t)dt=\frac{a}{n}-\left(\frac{a-1}{n}\right)=\frac{1}{n}$$

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 2η

Η Y είναι σ/χης. Θα χρησιμοποιήσουμε την εξής πρόταση.

ΠΡΟΤΑΣΗ

Έστω συνάρτηση κατανομής F, η οποία:

(α) είναι σ/χης και

(β) Υπάρχει $J \subset \mathbb{R}$ πεπερασμένο και συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to [0,\infty)$, ώστε:

- $F'(t)=f(t) \quad \forall t \in \mathbb{R} \setminus J$
- η f: σ/χης στο $\mathbb{R} \setminus J$,

τότε η f είναι μια πυκνότητα για την F

[Πρακτικά: Η F' να υπάρχει στο $\mathbb{R} \setminus J$ και να είναι σ/χης εκεί]

Όταν λοιπόν $Y=g(X)$ και η Y είναι συν(χής) τυχαία μεταβλητή, για την εύρεση της F_Y κάνουμε το εξής:

i) Βρίσκουμε την $F_Y(t) = P(g(X) \leq t)$ συναρτήσει της F_X

ii) Βρίσκουμε την $F_Y'(t)$ συναρτήσει της f_X και χρησιμοποιούμε την προηγούμενη πρόταση για να δικαιολογήσουμε το ότι η πυκνότητα της Y είναι η $f_Y(t) = F'_Y(t)$

ΑΣΚΗΣΗ Αν $X \sim \exp(2)$ ποια η κατανομή της $Y = \log X$;

-ΛΥΣΗ-

Για $t \in \mathbb{R}$, $F_Y(t) = P(Y \leq t) = P(\log X \leq t) = P(X \leq e^t) = F_X(e^t)$

F_X: παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, επειδή $e^t \neq 0$, η F_Y είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο

$$F'_Y(t) = F'_X(e^t)e^t = f_X(e^t)e^t = 2e^{-2e^t}e^t$$

Εφαρμόζεται η πρόταση με $J = \emptyset$ και δίνει ότι Y έχει πυκνότητα $F'_Y(t) = 2e^{-2e^t}e^t$ $\forall t \in \mathbb{R}$

ΑΣΚΗΣΗ 5.14 (φυλλάδιο)

Η X έχει πυκνότητα $f(x) = \frac{1}{2x^2} 1_{|x| \geq 1}$

Ποια η πυκνότητα της $Y = X^2$;

-ΛΥΣΗ-

Για $t \in \mathbb{R}$, $F_Y(t) = P(X^2 \leq t)$ Αν $t < 1$ αυτό $= 0$

Αν $t < 0$ $P(X^2 \leq t) = 0$

Αν $t \in [0,1]$ $P(X^2 \leq t) = P(-\sqrt{t} < X < \sqrt{t}) = \int_{-\sqrt{t}}^{\sqrt{t}} f_X(s)ds = 0$

Αν $t > 1$ $F_Y(t) = P(-\sqrt{t} \leq X \leq \sqrt{t}) = F_X(\sqrt{t}) - F_X(-\sqrt{t})$.

Η F_Y: σ/χης → για $t \neq 1$: προφανώς
→ για $t=1$: $F_Y(1-)=0$
$F_Y(1+) = F_X(1) - F_X(-1) =$
$= \int_{-1}^{1} f_X(t)\,dt = 0$

Η F_Y: διαφορίσιμη στο $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ με παράγωγο

$$F_Y'(t) = \begin{cases} 0, & t<1 \\ F_X(\sqrt{t})\frac{1}{2\sqrt{t}} + \frac{1}{2\sqrt{t}}F_X(-\sqrt{t}) = & \text{αν } t>1 \end{cases}$$

$= \frac{1}{\sqrt{t}} F_X(\sqrt{t}) = \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot \frac{1}{2t} = \frac{1}{2t^{3/2}}\, 1_{t>1}$ η οποία είναι σ/χης στο $\mathbb{R}\setminus\{1\}$

Με βάση την πρόταση η $f(t) = \frac{1}{2t^{3/2}}\, 1_{t>1}$ $\forall t \in \mathbb{R}$,

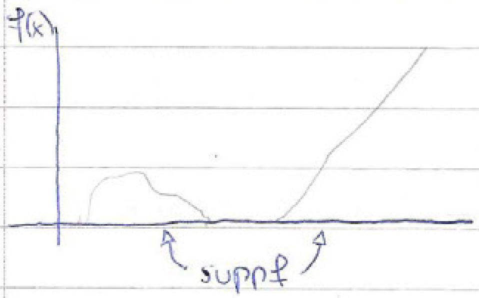
είναι μια πυκνότητα για την Y.

1

27/11/2018 15ο μαθημα

Πιθανότητες Ι. - Χελιώτης

ΟΡΟΛΟΓΙΑ: Αν $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συναρτηση, στήριγμα (φορέα) της f, λεμε το σύνολο $\{x\in\mathbb{R} : f(x)\neq 0\}$. Το συμβολιζουμε με $supp f$ (↳ support.)



πχ.: αν $f(x)=(x^2-1)\,1_{|x|\geq 1}$

$\{x\in\mathbb{R} : f(x)\neq 0\} = (-\infty,-1]\cup[1,\infty)$

$supp f = (-\infty,-1]\cup[1,\infty)$

↳ X τιμές στο $(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$, $Y=X^2$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1). Είναι χρήσιμο να προσδιορίζουμε απ'την αρχή, το $supp f_Y$. Αυτό είναι το σύνολο που παίρνει τιμές η Y. Μπορούμε να το βρούμε χωρίς να ξέρουμε την f_Y.

πχ.: στην προηγούμενη άσκηση η Y παίρνει τιμές στο $(1,\infty)$. Περιμένουμε δηλαδή οτι $supp f_Y=(1,\infty)$ και αυτό μας καθοδηγεί στο τι περιπτώσεις θα διακρίνουμε στον υπολογισμο της F_Y.

2). Αν η F_Y δεν είναι παραγωγίσιμη σε πεπερασμένα το πλήθος σημεία, ορίζουμε σε αυτά της F_Y αυθαίρετα πχ.: $f_Y(x)=0$

ΑΣΚΗΣΗ 3

Εστω ότι $X\sim exp(1)$ $\left(\begin{array}{l}\text{Δηλαδή, } f_X(x)=e^{-x}1_{x>0}\\ supp f_X=\{x\in\mathbb{R} : f_X(x)\neq 0\}=(0,\infty)\end{array}\right)$

Να βρεθεί η πυκνοτητα της

$$Y=\begin{cases} X, & \text{αν } X\leq 1 \\ \frac{1}{X}, & \text{αν } X>1 \end{cases}$$

-ΛΥΣΗ-

Η X παίρνει τιμές στο $(0,\infty)$ ⇒ Η Y παίρνει τιμές στο $(0,1]$.

Περιμένουμε ότι $supp f_Y=[0,1]$.

Υπολογίζουμε την $F_Y(t)$ $\forall t \in \mathbb{R}$, $F_Y(t) = P(Y \le t)$

- Αν $t \le 0$, αυτή η πιθανότητα είναι μηδέν, αφού $Y \in [0,1]$
- Αν $t \geq 1$, $P(Y \le t) = 1$, γιατί η Y από τον ορισμό της, παίρνει τιμές στο $[0,1]$.
- Αν $t \in (0,1)$: $P(Y \le t) = P(Y \le t, X \le 1) + P(Y \le t, X > 1) =$

$$= P(X \le t, X \le 1) + P\left(\frac{1}{X} \le t, X > 1\right) =$$

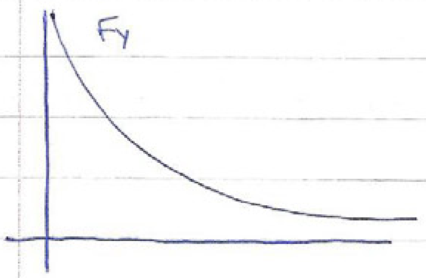
$$= P(X \le t) + P\left(X \geq \frac{1}{t}, X > 1\right) \overset{\frac{1}{t} > 1}{=} P(X \le t) + P\left(X \geq \frac{1}{t}\right) =$$

$$= F_X(t) + 1 - F_X\left(\frac{1}{t}\right)$$

Άρα, $F_Y(t) = \begin{cases} 0 & , t \le 0 \\ F_X(t) + 1 - F_X\left(\frac{1}{t}\right) & , t \in (0,1) \\ 1 & , t \geq 1. \end{cases}$

Η F_Y είναι συνεχής

$$\left[\begin{array}{l} \text{Προφανώς στο } \mathbb{R} \setminus \{0,1\}, \text{ αφού η } F_X \text{ συνεχής} \\ F_Y(0+) = F_X(0) + 1 - F_X(\infty) = 0 + 1 - 1 = 0 = F_Y(0-) \\ F_Y(1-) = F_X(1) + 1 - F_X(1) = 1 = F_Y(1+) \end{array}\right]$$



διαφορίσιμη ακριβώς στο $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(s)\,ds$$

Η F_Y είναι διαφορίσιμη στο $\mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ με παράγωγο $F'_Y(t) = 0$, αν $t \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$ και για $t \in (0,1)$,

$$F'_Y(t) = F'_X(t) + \frac{1}{t^2} F'_X\left(\frac{1}{t}\right) =$$

$$= f_X(t) + \frac{1}{t^2} f_X\left(\frac{1}{t}\right) = e^{-t} + \frac{1}{t^2} e^{-\frac{1}{t}}$$

Η F'_Y είναι συνεχής στο $\mathbb{R} \setminus \{0,1\}$

ΑΣΚ. 5.16

Από γνωστή πρόταση η Y έχει πυκνότητα :
$= F_X(t) + 1 - F_X(\frac{1}{t})$

Άρα, $F_Y(t) = \begin{cases} 0 & , t \leq 0 \\ F_X(t) + 1 - F_X(\frac{1}{t}) & , t \in (0,1) \\ 1 & , t \geq 1 \end{cases}$

και $f_Y(t) = \begin{cases} 0 & , \text{αν } t \in (-\infty, 0] \cup [1, \infty) \\ e^{-t} + \frac{1}{t^2} e^{-1/t} & , t \in (0,1) \end{cases}$

ΑΣΚΗΣΗ 4

Έστω ότι $X \sim N(0,1)$

Θέτουμε $Y = \begin{cases} -1 & , X < -3 \\ 0 & , |X| \leq 3 \\ 1 & , X > 3 \end{cases} = g(x)$

i). Ποια η κατανομή της Y

ii). $E(Y^2) = ;$

-ΛΥΣΗ-

i). Η Y είναι διακριτή και παίρνει τιμές στο $\{-1, 0, 1\}$

Βρίσκουμε τη συνάρτηση πιθανότητας της

$f_Y(t) = P(Y = t)$

Αυτό ισούται με μηδέν, αν $t \in \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$.

$\boxed{f_Y(-1)} = P(Y = -1) = P(X < -3) = \Phi(-3)$

$\boxed{f_Y(0)} = P(Y = 0) = P(-3 \leq X \leq 3) = \Phi(3) - \Phi(-3) =$
$= \Phi(3) - (1 - \Phi(3)) = 2\Phi(3) - 1$

$\boxed{f_Y(1)} = P(Y = 1) = P(X > 3) = 1 - \Phi(3)$

ii). <u>1ος τρόπος</u> : $EY^2 = \sum_{t \in \mathbb{R}} t^2 f_Y(t) = (-1)^2 f_Y(-1) + 0^2 f_Y(0) + 1^2 f_Y(1) =$
$= 2 f_Y(1)$

<u>2ος τρόπος</u> : $EY^2 = \int_{\mathbb{R}} (g(x))^2 f(x) dx = \int_{-\infty}^{-3} + \int_{-3}^{3} + \int_{3}^{\infty}$

<u>Υπενθύμιση</u> : $X \sim \Gamma(a,\lambda)$ έχει πυκνότητα:

$$f_X(x) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \cdot x^{a-1} \cdot e^{-\lambda x} 1_{x>0}$$

ΑΣΚΗΣΗ 5.20 (φυλλάδιο)

Αν $X \sim N(0,1)$ νδο $X^2 \sim \Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

-ΛΥΣΗ-

Η $Y := X^2$ παίρνει τιμές στο $[0,\infty)$

Για $t \in \mathbb{R}$ $F_Y(t) = P(Y \leq t) = P(X^2 \leq t)$

Αυτό ισούται με 0, για $t \leq 0$.

Για $t > 0$ ισούται με $P(-\sqrt{t} \leq X \leq \sqrt{t}) = \Phi(\sqrt{t}) - \Phi(-\sqrt{t})$.

Άρα, $F_Y(t) = \begin{cases} 0 & , t < 0 \\ \Phi(\sqrt{t}) - \Phi(-\sqrt{t}) & , t \geq 0 \end{cases}$

Η F_Y είναι συνεχής (στο $\mathbb{R}$)

(Για το $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ προφανές, για το $t=0$, $F_Y(0+) = \Phi(0) - \Phi(0) = 0 = F_Y(0-)$)

Η F_Y είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ με παράγωγο

$F'_Y(t) = 0$, αν $t < 0$,

ενώ για $t > 0$, $F'_Y(t) = \Phi'(\sqrt{t}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}} + \Phi'(-\sqrt{t}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}} =$

$$= \frac{1}{2\sqrt{t}} f_X(\sqrt{t}) + \frac{1}{2\sqrt{t}} f_X(-\sqrt{t}) \underset{f_X:\text{άρτια}}{=} \frac{1}{\sqrt{t}} f_X(\sqrt{t}) = \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t/2}$$

Δηλαδή, $F'_Y(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \cdot e^{-t/2}$, $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, η οποία είναι συνεχής στο $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

Κατά τα γνωστά, η Y έχει πυκνότητα την

$$f_Y(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \cdot e^{-t/2} 1_{t>0} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{1/2}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \cdot t^{1/2 - 1} e^{-t} 1_{t>0},$$

που είναι η πυκνότητα της $\Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

ΑΣΚΗΣΗ 5.22 (φυλλάδιο)

Αν $a,\lambda,r>0$ και $X\sim\Gamma(a,\lambda)$, τότε η $Y=rX\sim\Gamma(a,\frac{\lambda}{r})$

- ΛΥΣΗ -

Για $t\in\mathbb{R}$, $F_Y(t)=P(Y\le t)=P(rX\le t)=P(X\le \frac{t}{r})=F_X(\frac{t}{r})\Rightarrow$

$\Rightarrow F_X$: συνεχής.

Επίσης παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ με παράγωγο:

$F'_Y(t)=F'_X(\frac{t}{r})\frac{1}{r}=f_X(\frac{t}{r})\frac{1}{r}$, η οποία είναι σ(κης στο $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

Αρα, μια πυκνοτητα για την Y ειναι η $f_Y(t)=f_X(\frac{t}{r})\frac{1}{r}, \forall t\in\mathbb{R}$

Υπολογιζουμε $f_Y(t)=\frac{1}{r}\frac{\lambda^a}{\Gamma(a)}\left(\frac{t}{r}\right)^{a-1}e^{-\lambda\cdot\frac{t}{r}}1_{\frac{t}{r}>0}=$

$=\frac{(\frac{\lambda}{r})^a}{\Gamma(a)}t^{a-1}e^{-\frac{\lambda}{r}t}1_{t>0}\rightarrow$ η πυκνοτητα της $\Gamma(a,\frac{\lambda}{r})$

ΑΣΚΗΣΗ: Εστω X: συνεχης τμ με πυκνότητα f. Θετουμε $A=\{x\in\mathbb{R}: f(x)=0\}$. ΝΔΟ $P(X\in A)=0$.

- ΛΥΣΗ -

$P(X\in A)=\int_A f(t)dt=0$

ΑΣΚΗΣΗ 5.20 (Ross σελ. 250)

Για $x\in\mathbb{R}$, $x^+=\begin{cases}x & \text{, αν } x\geq 0\\ 0 & \text{, αν } x<0\end{cases}$

(a) Αν $Z\sim N(0,1)$ και $c\in\mathbb{R}$, νδο

$E((Z-c)^+)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-c^2/2}-c(1-\Phi(c))$.

$=\int_{-\infty}^{c}(t-c)^+f_Z(t)dt+\int_c^\infty(t-c)^+f_Z(t)dt=\int_c^\infty(t-c)f_Z(t)dt=$

$=\int_c^\infty t\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt-c\int_c^\infty f_Z(t)dt=\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(-e^{-t^2/2})\right]_c^\infty-$

$-cP(Z\geq c)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{c^2}{2}}-c\cdot(1-\underbrace{P(Z\le c)}_{\Phi(c)})$

Η Y δεν είναι συνεχης γιατί $P(Y=0)=P(Z<c)=\Phi(c)>0$.

ΔΙΠΛΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

Α) Ολοκλήρωμα σε ορθογώνιο

Εστω $f:[a,b]\times[\gamma,\delta]\to\mathbb{R}$ φραγμένη

Οποιεσδήποτε δυο διαμερίσεις:

$P_1=\{a=x_0<x_1< \dots <x_m=b\}$

$P_2=\{\gamma=y_0<y_1< \dots <y_m=\delta\}$

των $[a,b],[\gamma,\delta]$ παράγουν μια διαμέριση P του $[a,b]\times[\gamma,\delta]$, την $\{R_{i,j}: 1\le i\le m,\ 1\le j\le n\}$ με

$$R_{i,j}=[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j]$$

Θέτουμε $M_{i,j}=\sup\limits_{(x,y)\in R_{i,j}} f(x,y)$

$m_{i,j}=\inf\limits_{(x,y)\in R_{i,j}} (f(x,y))$

$L(f,P)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} m_{i,j}$ εμβαδον $R_{i,j}$

$U(f,P)=$ " $M_{i,j}$ "

Τα κάτω και άνω αντίστοιχα αθροίσματα Riemann της f ως προς P

ΟΡΙΣΜΟΣ.

Λέμε ότι η f είναι Riemann-ολοκληρώσιμη στο $R=[a,b]\times[\gamma,\delta]$ αν $\int f(x,y)\,dxdy := \sup\{L(f,P): P_1,P_2$ διαμερίσεις των $[a,b],[\gamma,\delta]$ αντίστοιχα.

$:=\inf\{U(f,P):$ "

"

$:=\int f(x,y)\,dxdy$

Την κοινή αυτή τιμή τη λέμε ολοκλήρωμα της f και τη συμβολίζουμε με $\iint_R f(x,y)\,dxdy$

Θεώρημα 1

Αν η $f:[a,b]\times[\gamma,\delta]\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής, τότε είναι Riemann ολοκληρώσιμη

Θεώρημα 2 (Fubini)

Έστω $f:[a,b]\times[\gamma,\delta]\to\mathbb{R}$ συνεχής. Τότε $\iint_R f(x,y)\,dx\,dy =$

$$= \int_a^b \Big(\underbrace{\int_\gamma^\delta f(x,y)\,dy}_{\text{συνάρτηση του } x}\Big)dx =$$

$$= \int_\gamma^\delta \Big(\underbrace{\int_a^b f(x,y)\,dx}_{\text{συνάρτηση του } y}\Big)dy$$

Παράδειγμα

$$\iint_{[0,1]\times[0,2]} x\cdot \sin(xy)\,dx\,dy = \int_0^1\int_0^2 x\sin(xy)\,dy\,dx = \int_0^1 x\int_0^2 \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{1}{x}\cos(xy)\right)dy\,dx$$

$$= \int_0^1 x\left[-\frac{1}{x}\cos(xy)\right]_{y=0}^{y=2}dx = -\int_0^1 (1-\cos(2x))\,dx =$$

$$= 1-\left[\frac{\sin(2x)}{2}\right]_0^1 = 1-\frac{1}{2}(\sin 2-0) = 1-\frac{1}{2}\sin 2.$$

Παράδειγμα

$$\iint_{[-1,2]\times[0,1]} \frac{x}{1+y}\,dx\,dy = \int_{-1}^2\int_0^1 \frac{x}{1+y}\,dy\,dx =$$

$$= \int_{-1}^2 x\int_0^1 \frac{1}{1+y}\,dy\,dx = \int_{-1}^2 x\left[\log(1+y)\right]_0^1 dx = \log 2\int_{-1}^2 x\,dx =$$

$$= \log 2\left(\frac{1}{2}(4-1)\right)$$

Ολοκλήρωμα σε γενικό χωρίο $\subset \mathbb{R}^2$

Έστω $A \subset \mathbb{R}^2$ φραγμένο και $f: A \to \mathbb{R}$ φραγμένη.
Βρίσκουμε ορθογώνιο $R \supset A$ και θέτουμε

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) &, x \in A \\ 0 &, x \in R - \{A\} \end{cases}$$

Ορίζουμε $\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \iint_R \tilde{f}(x,y)\,dx\,dy$,

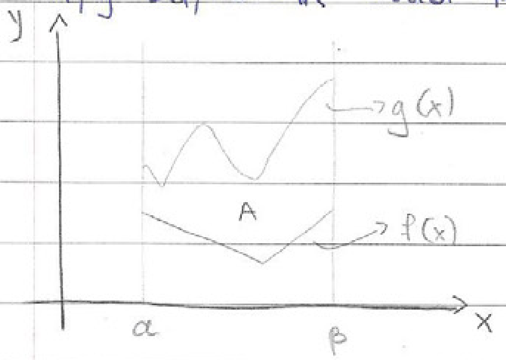
αν το δεξί ολοκλήρωμα στο δεξί μέλος ορίζεται

29/11/2018 16º μαθημα.

Πιθ. Ι - Χελιώτης

ΣΥΝΗΘΙΣΜΕΝΑ ΧΩΡΙΑ.

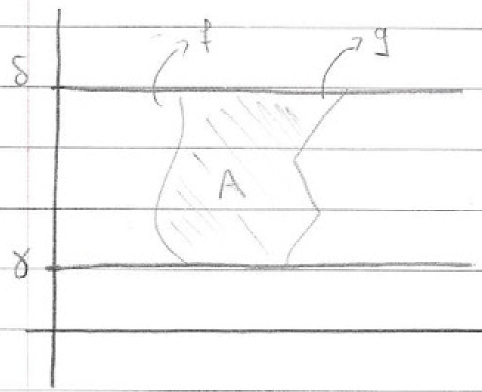
i). Το $A \subset \mathbb{R}^2$ λέγεται x-απλό χωρίο αν γράφεται ως
$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x \in [a,b], f(x) \leq y \leq g(x)\}$, για κάποιες $f,g: [a,b] \to \mathbb{R}$ κατά τμήματα συνεχείς με $f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in [a,b]$



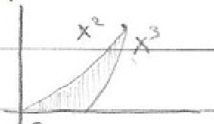
Τότε, $\int_A \int h(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \int_{f(x)}^{g(x)} h(x,y)\,dy\,dx$

$\forall h: A \to \mathbb{R}$ Riemann ολοκληρώσιμη.

ii). Το $A \subset \mathbb{R}^2$ λέγεται y-απλό χωρίο, αν γράφεται ως:
$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y \in [\gamma,\delta], f(y) \leq x \leq g(y)\}$ για κάποιες συναρτήσεις $f,g: [\gamma,\delta] \to \mathbb{R}$ κατά τμήματα συνεχείς με $f(y) \leq g(y)$ $\forall y \in [\gamma,\delta]$.
Τότε $\int_A \int h(x,y)\,dx\,dy = \int_\gamma^\delta \int_{f(y)}^{g(y)} h(x,y)\,dx\,dy$



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Να υπολογιστεί το $\int_A \int xy^2 dx$, όπου A: το χωρίο μεταξύ της x^2 και της x^3 για $x \in [0,1]$.



-ΛΥΣΗ-

$A = \{(x,y): x \in [0,1], x^3 \leq y \leq x^2\}$ άρα x-απλό
(είναι και y-απλό αφού $A = \{(x,y): y \in [0,1], y^{1/2} \leq x \leq y^{1/3}\}$)

$\int_A \int xy^2 dx dy = \int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} xy^2 \, dy dx = \int_0^1 x \int_{x^3}^{x^2} y^2 dy dx = \int_0^1 x \left[\frac{y^3}{3}\right]_{x^3}^{x^2} dx = \frac{1}{3}\int_0^1 (x^7 - x^{10})\, dx =$
$= \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{11}\right) = \frac{1}{88}$

§6.1 Διδιάστατες τυχαίες μεταβλητές

Έστω Ω δειγματικός χώρος.

ΟΡΙΣΜΟΣ: Διδιάστατη τυχαία μεταβλητή στον Ω, λέμε κάθε συνάρτηση $Z: \Omega \to \mathbb{R}^2$

Οι συντεταγμένες X, Y της Z (δηλ. $Z(\omega) = (X(\omega), Y(\omega))$, είναι τυχαίες μεταβλητές $X, Y: \Omega \to \mathbb{R}$.

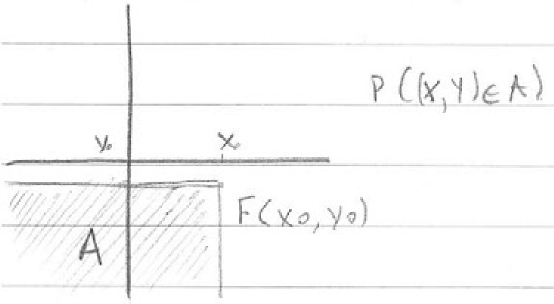
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Ρίχνουμε 4 ζάρια. $\Omega = \{(a_1, a_2, a_3, a_4): a \in \{1, 2, \ldots, 6\}\}$

Έστω $Z =$ (η μικρότερη από τις 4 ενδείξεις, η μεγαλύτερη απ'τις 4 ενδείξεις) $= (X, Y)$.

Ορισμός: Αν οι $X, Y: \Omega \to \mathbb{R}$ τμ (σε κοινό χώρο πιθανότητας του Ω) από κοινού συνάρτηση κατανομής του X, Y, λέμε την $F: \mathbb{R}^2 \to [0,1]$ με

$F(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y) = P(\{\omega \in \Omega, X(\omega) \leq x, Y(\omega) \leq y\})$

Αυτή λέγεται και συνάρτηση κατανομής της διδιάστατης τμ $Z = (X, Y)$.



Περίπτωση I: X, Y διακριτές

Ορίζουμε τότε τη συνάρτηση πιθανότητας του ζευγαριού X, Y ως εξής:

$f_{X,Y}(x,y) = P((X,Y) = (x,y)) = P(X = x, Y = y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

$\boxed{\text{ΑΣΚΗΣΗ}}$ Ρίχνουμε ένα νόμισμα 3 φορές. Έστω

$X =$ αριθμός κεφαλών στις πρώτες 2 δοκιμές

$Y =$ αριθμός κεφαλών στις τελευταίες 2 δοκιμές

Ποια η $f_{X,Y}$;

ΛΥΣΗ →

-ΛΥΣΗ-

$f_{X,Y}(x,y) = P(X=x, Y=y)$

- Αυτό ισούται με μηδέν αν $x,y \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0,1,2\}^2$
- Για $(x,y) \in \{0,1,2\}^2$, οι τιμές $F_{X,Y}(x,y)$ φαίνονται στον πίνακα.

y \ x	0	1	2
0	1/8	1/8	0
1	1/8	2/8	1/8
2	0	1/8	1/8

ΓΓΚ
$\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}$.

Προφανώς η $f_{X,Y}$ έχει τις εξής ιδιότητες:

i). $f_{X,Y}(x,y) \geq 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

ii). $\sum_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f_{X,Y}(x,y) = 1$.

Αντίστροφα κάθε συνάρτηση $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ που ικανοποιεί τα i), ii) είναι συνάρτηση πιθανότητας μιας διδιάστατης τυχαίας μεταβλητής (X,Y)
Από την $f_{X,Y}$ μπορούμε να υπολογίσουμε τις $F_{X,Y}, f_X, f_Y$
Η $f_{X,Y}$ ικανοποιεί την $P((X,Y)\in A) = \sum_{(x,y)\in A} f_{X,Y}(x,y) \quad \forall A \subseteq \mathbb{R}^2$.

- $F_{X,Y}(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \sum_{\substack{s \leq x \\ t \leq y}} f_{X,Y}(s,t)$

- $f_X(x) = P(X=x) = P(X=x, Y\in\mathbb{R}) = \sum_{y\in\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)$

- $f_Y(y) = P(Y=y) = \sum_{x\in\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)$

Οι f_X, f_Y λέγονται περιθώριες συναρτήσεις πιθανότητας του ζευγαριού (X,Y).

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ II : X,Y από κοινού συνεχείς

ΟΡΙΣΜΟΣ: Λέμε ότι οι $X,Y:\Omega \to \mathbb{R}$ είναι από κοινού συνεχείς, αν υπάρχει $f:\mathbb{R}^2 \to [0,\infty)$ ώστε

$$P((X,Y)\in A) = \int_A\int f(x,y)\,dx\,dy \quad \forall A\subset \mathbb{R}^2$$

Η f ονομάζεται από κοινού πυκνότητα της X,Y. Τη συμβολίζουμε και με $f_{X,Y}$

$\boxed{\text{ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ}}$: Επιλέγουμε στην τύχη ένα σημείο στο $S=(0,1)\times(0,1)$

Πώς γίνεται αυτό;

Επιλέγουμε με ανεξάρτητο τρόπο δύο τυχαίες μεταβλητές $X,Y:\Omega\to\mathbb{R}$ με $X\sim U(0,1)$, $Y\sim U(0,1)$

Το (X,Y) είναι το σημείο που ζητάμε

Μια από κοινού πυκνότητα των X,Y είναι η:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & , \text{αν } (x,y)\in S \\ 0 & , \text{αν } (x,y)\in \mathbb{R}^2\setminus S \end{cases}$$

Αυτό, γιατί αν $A=(\alpha,\beta)\times(\gamma,\delta)$ τότε $P((X,Y)\in A) = P(X\in(\alpha,\beta), Y\in(\gamma,\delta)) =$
$= P(X\in(\alpha,\beta))\,P(Y\in(\gamma,\delta)) = \int_{(\alpha,\beta)} f_X(x)\,dx \int_{(\gamma,\delta)} f_Y(y)\,dy \overset{*}{=} \int_\alpha^\beta\int_\gamma^\delta f_X(x)f_Y(y)\,dy\,dx =$
$= \int_A\int f(x,y)\,dx\,dy$

$\left(* \int_\alpha^\beta f_X(x)\int_\gamma^\delta f_Y(y)\,dy\,dx = \int_\gamma^\delta f_Y \int_\alpha^\beta f_X \right)$

Παρατήρηση

1) Η από κοινού πυκνότητα $f_{X,Y}$ των X,Y ικανοποιεί τις

(α) $f_{X,Y}\geq 0$

(β) $\int_{\mathbb{R}^2}\int f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy = 1$

$$\left[\begin{array}{c} P((X,Y)\in A) = \int_A\int f_{XY}(x,y)\,dx\,dy \quad (*) \\ P((X,Y)\in \mathbb{R}^2) = P(\Omega) = 1 \end{array} \right]$$

Αλλά και αντίστροφα αν μια $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ ικανοποιεί τις (α),(β), τότε υπάρχουν τυχαία μεταβλητή $X,Y:\Omega\to\mathbb{R}$ που να έχουν από κοινού πυκνότητα της f

2). όπως και στη μονοδιάστατη περίπτωση η $f_{X,Y}$ μπορεί να πάρει τιμές >1 και δεν εκφράζει πιθανότητα.

Αυτό που ισχύει είναι ότι αν η $f_{X,Y}$ είναι συνεχής στο $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ και $A\subset\mathbb{R}^2$ σύνολο με μικρή διάμετρο γύρω απ'το (x_0,y_0) (Δηλαδή $A\subset B((x_0,y_0),\delta)$ με δ: μικρό)

Τότε, ισχύει:

- $P((X,Y)\in A)\simeq f_{XY}(x_0,y_0)$ εμβαδόν (A)

Από την $f_{X,Y}$ μπορούμε να υπολογίσουμε τις $F_{X,Y}$, f_X, f_Y

- $F_{X,Y}(x,y)=P((X,Y)\in(-\infty,x]\times(-\infty,y])$

$=\iint_{(-\infty,x]\times(-\infty,y]} f_{X,Y}(s,t)\,ds\,dt=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(s,t)\,dt\,ds$

Καθεμία απ'τις X,Y είναι συνεχής τυχαία μεταβλητή

Το δείχνουμε για την X

Έστω $A\subset\mathbb{R}$, $P(X\in A)=P((X,Y)\in A\times\mathbb{R})=\int_{A\times\mathbb{R}}\int f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy=\int_A\underbrace{\int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)\,dy}_{h(x)}dx$

Συνεχής τ.μ. στο $\mathbb{R}$: $P(X\in A)=\int_A f_X(x)\,dx$

$P((X,Y)\in A)=\int_A\int f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy$

Άρα $P(X\in A)=\int_A h(x)\,dx$

Έπεται ότι η X είναι συνεχής τμ. με πυκνότητα $f_X(x)=h(x)=\int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)\,dy$

Η f_X μαζεύει όλη τη "μάζα" που δίνει η $f_{X,Y}$ στην ευθεία $\{x\}\times\mathbb{R}$.

Ομοίως, η Y είναι συνεχής τμ με πυκνότητα:

$f_Y(y)=\int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)\,dx$

Οι f_X, f_Y λέγονται περιθώριες πυκνότητες του ζεύγους (X,Y).

$\boxed{\text{ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ}}$ (18 σ.255 Ross).

Η από κοινού των (X,Y) είναι η $f_{X,Y}(x,y) = 2e^{-x} \cdot e^{-2y} 1_{x>0} 1_{y>0}$.

Να βρεθούν (α) $P(X>1, Y<1)$

(β) $P(X<Y)$

(γ) $P(X<<1, \varepsilon>0)$

-ΛΥΣΗ-

$$P((X,Y) \in (1,\infty) \times (-\infty,1)) = \int_1^\infty \int_{-\infty}^1 f_{X,Y}(x,y)\,dy\,dx = \int_1^\infty \int_0^1 2e^{-x}e^{-2y}\,dy\,dx =$$

$$= \int_1^\infty e^{-x} \int_0^1 2e^{-2x}\,dy\,dx = \int_1^\infty e^{-x}\left[-e^{-2y}\right]_0^1 dx =$$

$$= \int_1^\infty e^{-x}(-e^{-2}+1)\,dx = (1-e^{2}) \cdot \left[-e^{-x}\right]_1^\infty = (1-e^{-2})e^{-1}$$

(β) Έστω $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x<y\}$

$$P(X<Y) = P((X,Y) \in A) = \int_A \int f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy = \int_{-\infty}^\infty \int_x^\infty f_{X,Y}(x,y)\,dy\,dx =$$

$$= \int_0^\infty \int_x^\infty 2e^{-x}e^{-2y}\,dy\,dx = \int_0^\infty e^{-x} \int_x^\infty \left[-e^{-2y}\right]'\,dy\,dx = \int_0^\infty e^{-x}(0-(-e^{-2x}))\,dx =$$

$$= \int_0^\infty e^{-3x}\,dx = -\frac{1}{3}e^{-3x}\Big|_0^\infty = -\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

4/12/2018 17º μαθημα

Πιθανότητες Ι - Χελιώτης

(X,Y) δισδιάστατη συνεχής τ.μ. $P((X,Y)\in\Delta) = \int_{\mathbb{R}}\int F_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy$

$F_X(x) = \int_{\mathbb{R}} F_{X,Y}(x,y)\,dy \quad , \quad F_Y(x) = \int_{\mathbb{R}} F_{X,Y}(x,y)\,dx$

$\boxed{\text{Παράδειγμα}}$ (1.5 Ross σελ. 256)

Εστω (X,Y) σημείο που επιλέγουμε τυχαία στο δίσκο.

$D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 1\}$, Η (X,Y) πρέπει να έχει πυκνότητα

$$F_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c & \text{αν } (x,y)\in D \\ 0 & \text{αν } (x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus D \end{cases}$$

Να υπολογιστούν : (α) το c?

(β) οι περιθώριες πυκνότητες F_X, F_Y την X,Y

(γ) $P(\underbrace{\text{απόσταση του } (X,Y) \text{ απ'το } (0,0) \leq r}_{\Delta})$ $\forall r>0$

(δ) $E(\Delta)$

-ΛΥΣΗ-

α) $1 = \int_{\mathbb{R}^2}\int F_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy = \int_D\int c\,dx\,dy = c\int_D\int dx\,dy = c\cdot\pi \Rightarrow c = \frac{1}{\pi}$

(β) $F_X(x) = \int_{\mathbb{R}} F_{X,Y}(x,y)\,dy$

- Αν $|x|>1$ αυτό ισούται με μηδέν, διότι $F_{X,Y}(x,y)=0 \ \forall x$ με $|x|>1$ και $y\in\mathbb{R}$.
- Αν $|x|\leq 1$, τότε $F_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & \text{αν } |y|\leq\sqrt{1-x^2} \\ 0, & \text{αν } |y|>\sqrt{1-x^2} \end{cases}$

<u>Άρα</u>: $F_X(x) = \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\pi}\,dy = \frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}$

Άρα $f_X(x) = \frac{2}{\pi} \cdot \sqrt{1-x^2} \quad 1|x| \leq 1$.

Όμοια $f_Y(y) = \frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2} \quad 1|y| \leq 1$

$[(x,y) \in \mathbb{R}^2 = \sqrt{x^2+y^2} \leq r]$

(γ) $\Delta = \sqrt{x^2+y^2}$

$P(\Delta \leq r) = P(\sqrt{x^2+y^2} \leq r) \Rightarrow P(\Delta \in B(0,r)) = \int\int_{B(0,r)} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy$

· Αν $r<1$ το τελευταίο ολοκλήρωμα ισούται με:

$\iint_{B(0,r)} \frac{1}{\pi}\,dx\,dy = \frac{1}{\pi}$ Εμβαδόν $(B(0,r)) = \frac{\pi \cdot r^2}{\pi} = r^2$.

· Αν $r \geq 1$ $P(\Delta \leq r) = 1$, γιατί $x^2+y^2 \leq 1$ πάντοτε

Άρα $P(\Delta \leq r) = \begin{cases} r^2, & r \in [0,1] \\ 1, & r \geq 1. \end{cases}$

(δ) Βρίσκουμε την πυκνότητα της Δ. Η $F_\Delta(t) = P(\Delta \leq t) = \begin{cases} 0, & t<0 \\ t^2, & t \in [0,1] \\ 1, & t>1. \end{cases}$

Είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, η οποία είναι συνεχής στο $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Κατά τα γνωστά, η Δ έχει πυκνότητα $f_\Delta(t) = 2t\, 1_{(0,1)}(t)$.

Άρα, $E\Delta = \int_{\mathbb{R}} x f_\Delta(x)\,dx = \int_0^1 x\, 2x\,dx = \frac{2}{3}$.

<u>ΕΥΡΕΣΗ ΤΗΣ $f_{X,Y}$ ΑΠΟ ΤΗΝ $F_{X,Y}$</u>

Αν η $f_{X,Y}$ είναι συνεχής στο (x_0, y_0) και η $\int_{-\infty}^{x_0} f(x_0,t)\,dt$ συνεχής στο x_0 (ή η $\int_{-\infty}^{x} f(s,y_0)\,ds$ συνεχής στο x_0,

τότε $f_{X,Y}(x_0,y_0) = \frac{d^2 F}{dx\,dy}(x_0,y_0)$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ →

-Απόδειξη-

Στην $F_{X,Y}(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} F(s,t)\,dt\,ds$ παραγωγίζουμε πρώτα ως προς x, στο $x=x_0$ και μετά ως προς y στο $y=y_0$.

Δηλαδή, $\frac{dF_{X,Y}}{dx}(x_0,y)=\int_{-\infty}^{y} F_{X,Y}(x_0,t)\,dt \Rightarrow \frac{dF_{X,Y}(x_0,y_0)}{dy\,dx}=F(x_0,y_0)$

Μια ταυτότητα για την $F_{X,Y}$.

Για $a<b$, $\gamma<\delta$:

$P((X,Y)\in[a,b]\times[\gamma,\delta])=F_{X,Y}(b,\delta)-F_{X,Y}(b,\gamma)+F_{X,Y}(a,\gamma)$

ΠΟΛΥΔΙΑΣΤΑΤΕΣ ΤΥΧΑΙΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ

Αν $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$ n-διάστατη τ.μ. λέμε κάθε συνάρτηση $Z=(X_1,\dots,X_n):\Omega\to\mathbb{R}^n$ όπου Ω δειγματικός χώρος.

$X_1,\dots,X_n$ είναι μονοδιάστατες τ.μ. Αν το $Z(\Omega)$ είναι αριθμήσιμο λέμε την Z, διακριτή.

Αν υπάρχει $F:\mathbb{R}^n\to[0,\infty)$ ώστε $P((X_1,X_2,\dots,X_n)\in A)=$

$=\int\int_A F(x_1,x_2,\dots,x_n)\,dx_1,\dots,dx_n \quad \forall A\subset\mathbb{R}^n$, λέμε την

Z: συνεχή n-διάστατη τυχαία μεταβλητή

§ 6.2 ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΕΣ ΤΥΧΑΙΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω $X,Y:\Omega\to\mathbb{R}$ τυχαίες μεταβλητές (σε κοινό χώρο πιθανοτήτων). Οι X,Y λέγονται ανεξάρτητες, αν $P(X\in A, Y\in B)\overset{*}{=}P(X\in A)P(Y\in B)$ $\forall A,B\subseteq\mathbb{R}$. Δηλαδή, τα ενδεχόμενα $\{X\in A\},\{Y\in B\}$ είναι ανεξάρτητα

$*$ $\{X\in A\}\cap\{Y\in B\}$

ΠΡΟΤΑΣΗ

Έστω X,Y διακριτές τμ (στον ίδιο χώρο πιθανοτήτων), με από κοινού συνάρτηση πιθανότητας $f_{X,Y}$. Οι X,Y είναι ανεξάρτητες $\Leftrightarrow$ $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y) \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$.

-Αποδ-

$[\Rightarrow]$ $f_{X,Y}(x,y) = P(X=x, Y=y) = P(X=x) \cdot P(Y=y) = f_X(x) f_Y(y)$

$X \in \{x\} \quad Y \in \{y\}$

$[\Leftarrow]$ Για $A,B \subset \mathbb{R}$ $\quad P(X\in A, Y \in B) = P((X,Y) \in A \times B) = \sum_{(x,y)\in A\times B} f_{X,Y}(x,y) =$

$= \sum_{x\in A} \sum_{y \in B} f_X(x) f_Y(y) = \sum_{x \in A} \left(f_X(x) \sum_{y\in B} f_Y(y) \right) = P(Y\in B) \sum_{x\in A} f_X(x) =$

$= P(Y\in B) P(X \in A)$

ΠΡΟΤΑΣΗ

Έστω X,Y (στον ίδιο χώρο πιθανότητας) από κοινού συνεχείς με από κοινού πυκνότητα $f_{X,Y}$. Οι X,Y είναι ανεξάρτητες $\Leftrightarrow$

$(*)$ $\boxed{f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y)}$ $\forall x,y \in \mathbb{R}$

-Αποδ.-

$[\Leftarrow]$ όπως το πάνω

Δηλαδή, $P(X\in A, Y \in B) = \int_A \int_B f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy =$

$= \int_A \int_B f_X(x) f_Y(y)\,dx\,dy = \int_A f_X(x) \int_B f_Y(y)\,dx = P(Y\in B) P(X \in A)$

Η σωστή συνθήκη είναι ότι η $(*)$ ισχύει

$\forall x,y \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$, όπου $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ με εμβαδόν που ισούται με 0.

Παρατηρησεις

1) Η σωστη συνθηκη ειναι η *. Ισχυει $\forall x,y \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$, οπου $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ με εμβαδον που ισουται με μηδεν.

2) Η συνθηκη $F_{x,y}(x,y) = F_x(x) F_y(y)$ $\forall x,y \in \mathbb{R}$ στις δύο παραπανω προτασεις ισοδυναμει με την "$\exists\, g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ωστε $F_{x,y}(x,y) = g(x)\cdot h(y)$ $\forall x,y \in \mathbb{R}^n$".
Πραγματι, το δειχνουμε όταν οι x,y από κοινου συνεχεις.
Αν υπαρχουν τετοιες g,h τοτε $F_x(x) = \int_{\mathbb{R}} F_{x,y}(x,y)\,dy =$
$= \int_{\mathbb{R}} g(x)h(y)\,dy = g(x)\underbrace{\int_{\mathbb{R}} h(x)\,dy}_{C_1} = C_1 \cdot g(x)$

Ομοια, $F_y(y) = \int_{\mathbb{R}} F_{x,y}\,dx = h(y)\underbrace{\int_{\mathbb{R}} g(x)\,dx}_{C_2} = C_2 \cdot h(y)$

Αρα, $F_{x,y}(x,y) = g(x)\cdot h(x) = \dfrac{F_x(x)}{C_1}\cdot\dfrac{F_y(y)}{C_2} = \dfrac{1}{C_1\cdot C_2}\cdot F_x(x)\cdot F_y(y)$

Ομως, $1 = \iint_{\mathbb{R}^2} F_{x,y}(x,y)\,dy\,dx = \iint_{\mathbb{R}^2} g(x)\cdot h(y)\,dx\,dy =$

$= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} g(x)\cdot h(y)\,dx\,dy = \int_{\mathbb{R}} h(y)\int_{\mathbb{R}} g(x)\,dx\,dy = C_1 \cdot \int_{\mathbb{R}} h(y)\,dy = C_1\cdot C_2$

Αρα, $F_{x,y}(x,y) = F_x(x)\cdot F_y(y)$.

Παραδειγμα (2οΤ Ross σελ. 265)

a) Αν x,y από κοινου συνεχεις με πυκνοτητα $F_{x,y}(x,y) = 6e^{-2x}e^{-3y}$ $1_{x>0}1_{y>0}$, Ειναι οι x,y ανεξαρτητες;

β) $F_{x,y}(x,y) = \begin{cases} 24xy & , 0<x<1,\ 0<y<1,\ x+y<1 \\ 0 & , \text{αλλιως} \end{cases}$

-Λυση-

-ΛΥΣΗ-

(α) Είναι ανεξάρτητες, γιατί $f_{X,Y}(x,y) = g(x)\cdot h(y)$ $\forall x,y \in \mathbb{R}$
με $g(x) = 6\cdot e^{-2x}\mathbb{1}_{x>0}$, $h(y) = e^{-3y}\mathbb{1}_{y>0}$

(β) ΔΕΝ είναι ανεξάρτητες
1ος τρόπος: Βρίσκουμε τις $f_X(x)$, $f_Y(y)$ και δείχνουμε ότι
$f_{X,Y}(x,y) \neq f_X(x) f_Y(y)$ για πολλά x, y.
$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)dy.$

2ος τρόπος: Αν ήταν ανεξάρτητες, τότε $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$ $(\forall x,y)$
θέτοντας $A = \{x\in\mathbb{R} : f_X(x) \neq 0\}$, $B = \{y \in \mathbb{R} : f_Y(y) \neq 0\}$, θα είχαμε:
$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f_{X,Y}(x,y) \neq 0\} = A\times B$, ΑΤΟΠΟ.

3ος τρόπος: Για $A = (0,9,1)$, $B = (0,9,1)$ τότε $P(X\in A, Y\in B) = 0 =$
$= \int\int_{A\times B} f_{X,Y}(x,y)dxdy.$
Όμως $P(X\in A) > 0$, $P(X\in A) = \int_{\mathbb{R}}\int_A f_{X,Y}(x,y)dxdy$ και
$P(Y\in B) > 0.$

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω I: σύνολο και $\{X_i : i\in I\}$ τυχαία μεταβλητή στον ίδιο χώρο πιθανότητας. Λέμε ότι οι $\{X_i : i \in I\}$ είναι ανεξάρτητες, αν $\forall k\in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, $P(X_{ik} \in A_i)$

Όμοια όπως πριν, οι $X_1, \dots, X_k$ είναι ανεξάρτητες $\Leftrightarrow f_{X_1,\dots,X_k}(x_1,\dots,x_k) =$
$= f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) \cdots f_{X_k}(x_k)$ $\forall x_1, x_2, \dots, x_k \in \mathbb{R}.$

Στο παράδειγμα 2στ του Ross σελ. 265, δείξτε ότι
$f_X(x) = 12x(1-x)^2 1_{x\in(0,1)}$ και $f_Y = f_X$, οπότε $f_{X,Y}(x,y) \neq f_X(x) f_Y(y)$

§ 6.3 Αθροίσματα ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών

X, Y: ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με πυκνότητες f_X, f_Y.
Η X+Y έχει πυκνότητα f_{X+Y}. Ποια είναι αυτή;

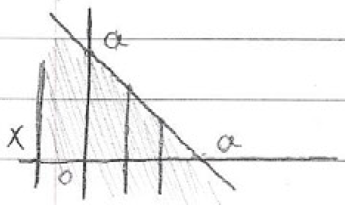
ΠΡΟΤΑΣΗ

Η X+Y είναι συνεχής τυχαία μεταβλητή, με πυκνότητα
$$f_{X+Y}(a) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(a-x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(a-y) f_Y(y)\,dy \quad \forall a\in\mathbb{R}$$

-Αποδ-

Για $a\in\mathbb{R}$: $F_{X+Y}(a) = P(X+Y\le a) = P((X,Y)\in(a)) = \int\int_{(a)} f_X(x) f_Y(y)\,dx\,dy$ (1)

Αν $x\in\mathbb{R}$: $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$, τότε η x έχει πυκνότητα f
$P(X\in A) = \int_A f(t)\,dt$



$$(1) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{a-x} f_X(x) f_Y(y)\,dy\,dx.$$

Παραγωγίζουμε ως προς a: $F'_{X+Y}(a) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(a-x)\,dx \overset{y=a-x}{=\!=}$

$$= -\int_{\infty}^{-\infty} f_X(a-y) f_Y(y)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(a-y) f_Y(y)\,dy.$$

Παράδειγμα 3α (σελ. 272 Ross)

X, Y: ανεξάρτητες με $X, Y \sim U(0,1)$. Η πυκνότητα της X+Y, είναι η:

$$f_{X+Y}(x) = \begin{cases} x & , x\in(0,1) \\ 2-x & , x\in[1,2] \\ 0 & , x\in\mathbb{R}\setminus(0,2) \end{cases}$$

-Αποδ-

Για $a\in\mathbb{R}$, έχουμε : $f_{X+Y}(a)=\int_{\mathbb{R}} f_X(x)f_Y(a-x)dx=$

$=\int_0^1 f_Y(a-x)dx=\int_0^1 1_{0<a-x<1}\,dx=\int_0^1 1_{a-x<x<a}\,dx$

• αν $a\leq 0$; το ολοκλήρωμα ισούται με μηδέν, γιατί με $x\in(0,1)$, η $x<a$ ΔΕΝ ισχύει

• αν $a\geq 2$, πάλι το ολοκλήρωμα ισούται με μηδέν, γιατί για $x\in(0,1)$, η $a-1<x<a$ ΔΕΝ ισχύει, λόγω του $x>a-1\geq 1$

• $a\in(0,1)$ το ολοκλήρωμα $=\int_0^1 1_{x<a}\,dx=a$

• $a\in[1,2]$ " $=\int_0^1 1_{a-1<x}\,dx=1-(a-1)=2-a.$

Παρατήρηση : Αν X,Y διακριτές τυχαίες μεταβλητές με τιμές στο $\mathbb{Z}$ και συνάρτηση πιθανότητας f_X,f_Y. Τότε, η $X+Y$ έχει συνάρτηση πιθανότητας $f_{X+Y}(a)=\sum_{k\in\mathbb{Z}} f_X(k)f_Y(a-k)\quad\forall a\in\mathbb{R}$

-Αποδ-

Αν $a\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ και τα δύο μέλη ισούνται με μηδέν, γιατί οι X,Y παίρνουν τιμές στο $\mathbb{Z}$.

Αν $a\in\mathbb{Z}$, $f_{X+Y}(a)=P(X+Y=a)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}P(X+Y=a,X=k)=$

$\{X+Y=a\}=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\{X+Y=a,X=k\}$

$=\sum_{k\in\mathbb{Z}}P(X=k,Y=a-k)\overset{X,Y:\text{ανεξ.}}{=}\sum_{k\in\mathbb{Z}}P(X=k)P(Y=a-k)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}f_X(k)f_Y(a-k)$

[ΑΣΚΗΣΗ]

Αν $X \sim Poisson(\lambda)$, $Y \sim Poisson(\mu)$, $\lambda, \mu \geq 0$ και X, Y: ανεξάρτητες, τότε $X+Y \sim Poisson(\lambda+\mu)$

-ΛΥΣΗ-

• Για $k \in \mathbb{N}$: $P(X+Y=k) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} f_X(j) f_Y(k-j) = \sum_{j=0}^{k} e^{-\lambda} \frac{\lambda^j}{j!} e^{-\mu} \frac{\mu^{k-j}}{(k-j)!} =$

$$= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{k!} \cdot \sum_{j=0}^{k} \frac{k!}{j!(k-j)!} \lambda^j \mu^{k-j} = \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{k!} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \lambda^j \mu^{k-j} =$$

$$= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{k!} (\lambda+\mu)^k$$

ΔΕΣΜΕΥΜΕΝΕΣ ΤΥΧΑΙΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ

Περίπτωση ①: X, Y διακριτές τυχαίες μεταβλητές, με από κοινού συνάρτηση πιθανότητας

$\boxed{\text{ΟΡΙΣΜΟΣ}}$: Για κάθε $y \in \mathbb{R}$, ώστε $f_Y(y) > 0$, η συνάρτηση $f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ είναι συνάρτηση πιθανότητας,

γιατί είναι ≥ 0 και $\sum_{x \in \mathbb{R}} f_{X|Y}(x|y) = \sum_{x \in \mathbb{R}} \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} =$

$$= \frac{1}{f_Y(y)} \sum_{x \in \mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y) = 1$$

$\hookrightarrow \{Y=y\} = \bigcup_{x \in X(\Omega)} \{Y=y, X=x\}$

Ονομάζεται συνάρτηση πιθανότητας της X, δεδομένου ότι η $Y=y$, αντιστοιχεί στην τυχαία μεταβλητή $X|Y=y$

Παρατήρηση: ο λόγος που ορίζουμε την $f_{X|Y}$ έτσι, είναι ο εξής:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(X=x|Y=y) = \frac{P(X=x, Y=y)}{P(Y=y)} = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}.$$

<u>Παράδειγμα</u>: Ρίχνουμε δύο ζάρια. Έστω X: η μικρότερη ένδειξη, Y: η μεγαλύτερη ένδειξη. Ποια η συνάρτηση πιθανότητας της $Y|X=3$;

-ΛΥΣΗ-

$f_X(3) = P(X=3) > 0$, άρα η $Y|X=3$, ορίζεται.
Σε πίνακα, βρίσκουμε τις τιμές των $f_{X,Y}$, f_X:

$$f_{Y|X}(y|3) = \frac{f_{X,Y}(3,y)}{f_X(3)}, \quad y \in \mathbb{R}$$

y \ x	1	2	3	4	5	6	Fy
1	a	0	0	0	0	0	a
2	2a	a	0	0	0	0	3a
3	2a	2a	a	0	0	0	5a
4	2a	2a	2a	a	0	0	7a
5	2a	2a	2a	2a	a	0	9a
6	2a	2a	2a	2a	2a	a	11a
Fx	11a	9a	7a	5a	3a	a	

$f_X(3) = 7a$

$$f_Y(y|3) = \frac{f_{X,Y}(3,y)}{f_X(3)} = \begin{cases} 0, & y=1,2 \\ \frac{a}{7a} = \frac{1}{7}, & y=3 \\ \frac{2a}{7a} = \frac{2}{7}, & y=4,5,6 \\ 0, & y \in \mathbb{R} \setminus \{1,\dots,6\} \end{cases}$$

Περίπτωση 2

X, Y: από κοινού συνεχείς τυχαίες μεταβλητές, με από κοινού πυκνότητα $f_{X,Y}$

$\boxed{\text{ΟΡΙΣΜΟΣ}}$: Για κάθε $y \in \mathbb{R}$, με $f_Y(y) > 0$, η συνάρτηση:
$f_{X,Y}(x,y) = \dfrac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ είναι πυκνότητα.

(διότι $f_{X|Y}(x|y) \geq 0$ $\forall x$: $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}\,dx = \frac{1}{f_Y(y)} \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)\,dx = 1$),

τη λέμε πυκνότητα της X, δεδομένου ότι $Y=y$. Αντίστοιχη στην «τυχαία μεταβλητή $X|Y=y$».

$$P(X=x \mid Y=y) = \frac{P(X=x \mid Y=y)}{P(Y=y)}$$

Παρατηρηση: Για καθε $A \in \mathbb{R}$, $P(X \in A \mid Y=y) = \int_A f_{X|Y}(x|y)\,dx$, αφού η $f_{X|Y}(\cdot|y)$ ειναι η πυκνοτητα της $X|Y=y$

Παραδειγμα (5β Ross σελ. 286)

X, Y τυχαίες μεταβλητές με απο κοινου πυκνοτητα:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{-x/y} \cdot e^{-y}}{y} & , 0 < x < \infty,\ 0 < y < \infty \\ 0 & , (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0,\infty)^2 \end{cases}$$

(α) Ποια η κατανομη της $X|Y=y$, για $y>0$

(β) Να βρεθει η $P(X>1 \mid Y=y)$, $y>0$

-ΛΥΣΗ-

(α) $f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)\,dx \quad (1)$

- αν $y \leq 0$, η $(1) = 0$, γιατι $f_{X,Y}(x,y) = 0 \ \forall x$
- αν $y > 0$, η $(1) = \int_0^\infty \frac{1}{y} \cdot e^{-y} \cdot e^{-\frac{x}{y}}\,dx =$

$$= e^{-y} \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x}\left(-e^{-\frac{x}{y}}\right)dx = e^{-y} \cdot \left[-e^{-\frac{x}{y}}\right]_{x>0}^{x=\infty} = e^{-y}$$

Αρα, $f_Y(y) = e^{-y}\, 1_{y>0}$

Δηλαδη: $Y \sim \exp(1)$

Για $x \in \mathbb{R}$: $f_{X|Y}(x|y) = \dfrac{F_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \dfrac{\frac{1}{y} e^{-y} e^{-\frac{x}{y}} 1_{x>0} 1_{y>0}}{e^{-y}} \underset{=}{\overset{y>0}{}}$

$$= \frac{1}{y} e^{-\frac{x}{y}} 1_{x>0}$$

β) $P(X>1 \mid Y=y) = P(X \in (1,\infty) \mid Y=y) = \int_1^\infty f_{X|Y}(x|y)\,dx =$

$$= \int_1^\infty \frac{1}{y} e^{-\frac{x}{y}}\,dx = -e^{-\frac{x}{y}} \Big|_{x=1}^{x=\infty} = e^{-\frac{1}{y}}$$

β). Ορίζεται ακριβώς για τα $x \in \mathbb{R}$, με $f_X(x) > 0$.

Δηλαδή, για $x > \infty$

• για $x > 0$: $f_{Y|X}(y|x) = \dfrac{F_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = \dfrac{c \cdot (x^2 - y^2) e^{-x} 1_{x \geq 0} 1_{|y| \leq x}}{\frac{4}{3} x^3 \cdot e^{-x} \cdot c 1_{x \geq 0}} =$

$= \dfrac{3}{4} \dfrac{(x^2 - y^2)}{x^3} 1_{|y| \leq x}$ συνάρτηση του $y = \begin{cases} \dfrac{3}{4} \dfrac{(x^2 - y^2)}{x^2}, & y \in [-x, x] \\ 0, & y \in \mathbb{R} \setminus [-x, x] \end{cases}$

11/12/2018 19º μαθημα

Πιθανότητες Ι (Χελιώτης)

ΑΣΚΗΣΗ 6.7 (φυλλαδιο)

X, Y από κοινού συνεχεις τυχαίες μεταβλητές με πυκνότητα $f(\cdot,\cdot)$. ΝΔΟ $P(X=Y)=0$

[Ειδική περίπτωση X, Y ανεξάρτητες συνεχής τυχαίες μεταβλητές τότε $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$]

-ΛΥΣΗ-

Θέτουμε $A=\{(x,x): x\in\mathbb{R}\}\subset\mathbb{R}^2$

$P(X=Y)=P((X,Y)\in A)=\iint_A f(x,y)\,dx\,dy=0$, γιατί εμβαδόν$(A)=0$

ΑΣΚΗΣΗ 6.6

Τμημα μήκους l το κόβουμε τυχαία σε τρία κομμάτια. Ποια η πιθανότητα τα τρία κομματια να φτιαχνουν τρίγωνο αν το κόψιμο γίνεται με τα εξής σενάρια:

(α) Επιλέγουμε ανεξάρτητα δύο σημεια ομοιόμορφα στο τμημα

(β). Επιλέγουμε ομοιόμορφα ένα σημείο Γ. Το πρώτο κομματι είναι το ΑΓ. Μετά επιλέγουμε ομοιομορφα (και ανεξάρτητα), ένα σημείο Δ στο ΓΒ. Αυτό καθορίζει τα άλλα δύο τμήματα.

-ΛΥΣΗ-

Τρεις αριθμοί α, β, γ είναι μήκη πλευρών τριγωνου αν και μονο αν ικανοποιούνται και οι τρεις τριγωνικές ανισότητες $(\alpha<\beta+\gamma,\ \beta<\alpha+\gamma,\ \gamma<\alpha+\beta)$.

Ας υποθέσουμε ότι $\alpha\geq\beta,\gamma$

Με κέντρο το Μ, κάνουμε κύκλο, ακτίνας β.

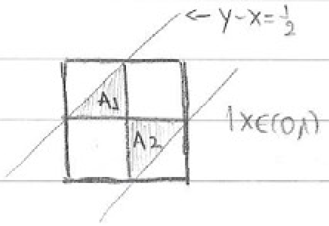
Με κέντρο το Μ, κανουμε κυκλο, ακτίνας γ

(α). Εστω ότι τα σημεια που επιλέγουμε, είναι τα $x, y\in(0,1)$ με $x<y$

Τοτε, $\alpha=x,\ \beta=y-x,\ \gamma=1-y$ →

Θελουμε, $\left.\begin{array}{l} x < y-x+1-y \\ y-x < x+1-y \\ 1-y < x+y-x \end{array}\right\} \left.\begin{array}{ll} x<\frac{1}{2} & \\ y-x<\frac{1}{2} & y>\frac{1}{2} \end{array}\right]$ A_1

Ενώ, αν $x>y$ θελουμε: $\underbrace{y<\frac{1}{2},\ x-y<\frac{1}{2},\ x>\frac{1}{2}}_{A_2}$



Ζητάμε την πιθανότητα $(U_1,U_2)\in A_1\cup A_2$

Η από κοινού κατανομή των U_1,U_2 είναι:

$f_{U_1,U_2}(x,y) = f_{U_1}(x) f_{U_2}(y) = 1(x,y)\in(0,1)^2$

Άρα, $P((U_1,U_2)\in A_1\cup A_2) = \iint_{A_1\cup A_2} f_{U_1,U_2}(x,y)\,dx\,dy = \iint_{A_1\cup A_2} 1_{(x,y)\in(0,1)^2}\,dx\,dy =$

$= \iint_{A_1\cup A_2} 1\,dx\,dy =$ εμβαδόν $(A_1\cup A_2) = \frac{1}{4}.$ (6.5) να δω

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

Έστω X,Y τυχαίες μεταβλητές σε μια απ' τις εξής κατηγορίες:

(I) X,Y: διακριτές με από κοινού συνάρτηση πιθανότητας $f_{X,Y}$

(II) X,Y: από κοινού συνεχής με από κοινού πυκνότητα $f_{X,Y}$

[Για $A\subset\mathbb{R}^2$, έχουμε $P((X,Y)\in A) = \begin{cases} \sum_{(x,y)\in A} f_{X,Y}(x,y) & \text{στην περίπτωση I} \\ \iint_A f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy & \text{στην περίπτωση II} \end{cases}$]

ΕΡΩΤΗΜΑ: Αν $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, τότε $Eg(X,Y) =$;

ΠΡΟΤΑΣΗ : Εστω οτι $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Τοτε

$$\underbrace{E\, g(X,Y)}_{W} = \begin{cases} \sum_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} g(x,y)\, f_{X,Y}(x,y) & \text{στην περιπτ. (I)} \\ \int\int_{\mathbb{R}^2} g(x,y)\, f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy & \text{στην περιπ. (II)} \end{cases}$$

Με την προϋποθεση οτι, το δεξι μελος οριζεται.

$$\Omega \xrightarrow{(X,Y)} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$
$$g(X(\omega), Y(\omega))$$

ΕΚΤΟΣ ΥΛΗΣ

(Αν $Y = X$ συνεχης, τοτε οι X, Y ειναι συνεχεις. Ομως δεν ειναι απο κοινου συνεχεις, γιατι $(X,Y)\in A$, οπου $A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x=y\}$ με εμβαδον (A), οποτε αν ηταν απο κοινου συνεχης, θα επρεπε:
$1 = P((X,Y)\in A) = \int_A\int f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy = 0$)

Παραδειγμα 2α (σελ. 317)

$L>0$. Εστω $X, Y \sim U(0,L)$ ανεξαρτητες

(α) $P(|X-Y| < \frac{L}{2})$

(β) $E|X-Y|$

-ΛΥΣΗ-

X, Y: ανεξαρτητες με πυκνοτητες $f_X(x) = f_Y(y) = \frac{1}{L} 1_{(0,L)}(x)$

Αρα, οι X, Y ειναι απο κοινου συνεχεις με απο κοινου πυκνοτητα
$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y) = \frac{1}{L^2} 1_{(0,L)^2}(x,y)$

→

(α) Εστω $A = \{ (x,y) \in (0,L)^2 : |x-y| < \frac{L}{2} \}$

$P(|X-Y| < \frac{L}{2}) = P((X,Y) \in A) = \iint_A f_{X,Y}(x,y)\,dxdy = \frac{1}{L^2} \iint_A 1\,dxdy =$

$= \frac{1}{L^2} \text{εμβαδον}(A) = \frac{1}{L^2} \left(L^2 - \frac{L^2}{4}\right) = \frac{3}{4}$

(β) $E|X-Y| = \iint_{\mathbb{R}^2} |x-y| f_{X,Y}(x,y)\,dxdy = \iint_{(0,L)^2} |x-y| \cdot \frac{1}{L^2}\,dxdy = \frac{1}{L^2} \int_0^L \int_0^L |x-y|\,dydx$

Υπολογιζουμε $\int_0^L |x-y|\,dy = \int_0^x (x-y)\,dy + \int_0^L (y-x)\,dy = x^2 - \frac{x^2}{2} + \frac{L^2-x^2}{2} - x(L-x) =$

$= \frac{L^2}{2} - Lx + \cancel{x}^2$

Αρα, $E|X-Y| = \frac{1}{L^2} \int_0^L \left(x^2 - Lx + \frac{L^2}{2}\right) = \frac{1}{L^2} \left(\frac{L^3}{3} - L \cdot \frac{L^2}{2} + \frac{L^3}{2} \right) = \frac{L}{3}$.

§ 7.4 Συνδιακύμανση, διασπορά αθροισμάτων

ΠΡΟΤΑΣΗ

Αν X,Y ανεξάρτητες τυχαιες μεταβλητές, τότε:
$E(XY) = EX \cdot EY$, όταν οι EX, EY ορίζονται και $X,Y \geq 0$ ή $EX, EY \in \mathbb{R}$

-Αποδ-

Ειδική περίπτωση οι X,Y από κοινού συνεχής. Εστω $f_{X,Y}$ η από κοινού πυκνότητα των X,Y.

$E(XY) = \iint_{\mathbb{R}^2} xy f_{X,Y}(x,y)\,dxdy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy f_X(x) f_Y(y)\,dydx =$

$= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) \left(\int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y)\,dy \right) dx = EY \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx = EY\,EX$

ΠΡΟΤΑΣΗ

Εστω $X_1, X_2, \ldots, X_k, Y_1, \ldots, Y_\ell$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές και $g: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, $h: \mathbb{R}^\ell \to \mathbb{R}$. Θέτουμε $Z = g(X_1, \ldots, X_k)$, $W = h(Y_1, \ldots, Y_\ell)$. Τότε, οι Z, W είναι ανεξάρτητες.

Ανισότητα Cauchy-Schwarz

X, Y τυχαίες μεταβλητές σε κοινό χώρο πιθανότητας. Ισχύει ότι $E|XY| \leq (E(X^2))^{1/2} (E(Y^2))^{1/2}$

Εστω X, Y τυχαίες μεταβλητές με $EX, EY \in \mathbb{R}$. Θέτουμε $\mu_X = EX$, $\mu_Y = EY$.

ΟΡΙΣΜΟΣ: Συνδιακύμανση των X, Y ονομάζουμε τον αριθμό $Cov(X,Y) = E((X-\mu_X)(Y-\mu_Y))$, αν η μέση τιμή ορίζεται.

ΠΡΟΤΑΣΗ:

Αν $EX, EY, E(XY)$ ορίζονται, τότε $Cov(X,Y) = E(XY) - EXEY$

-Απόδ-

$Cov(X,Y) = E(XY - X\mu_Y - \mu_X Y + \mu_X\mu_Y) = E(XY) - \mu_Y EX - \mu_X EY + \mu_X \mu_Y =$
$= E(XY) - EXEY$

Από την $(X-\mu_X)(Y-\mu_Y) = XY - \mu_X Y - \mu_Y X + \mu_X \mu_Y$, έπεται ότι η $Cov(X,Y)$, ορίζεται αν και μόνο αν $EX, EY \in \mathbb{R}$ και $E(XY)$ ορίζεται.
Ικανή συνθήκη για να ορίζεται η $E(XY)$ είναι η $E(X^2), E(Y^2) < \infty$, γιατί τότε απ' την ανισότητα Cauchy-Schwarz $E|XY| < \infty$, άρα $E(XY)$ ορίζεται και είναι πραγματικός αριθμός.

Παραδειγμα 1 : Ριχνουμε ενα νομισμα 3 φορές. Εστω:

X = αριθμός κεφαλών στις πρώτες 2 φορές

Y = αριθμος κεφαλών στις τελευταιες 2 φορές

$Cov(X,Y) =$;

-ΛΥΣΗ-

Οι συναρτήσεις πιθανότητας $f_{X,Y}, f_X, f_Y$ φαινονται στο πινακάκι

$y \backslash x$	0	1	2	f_Y
0	$1/8$	$1/8$	0	$2/8$
1	$1/8$	$2/8$	$1/8$	$4/8$
2	0	$1/8$	$1/8$	$2/8$
f_X	$2/8$	$4/8$	$2/8$	

πινακας τιμων της $f_{X,Y}(\cdot,\cdot)$

$$E(XY) = \sum_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} xy f_{X,Y}(x,y) = \sum_{x=0}^{2}\sum_{y=0}^{2} xy f_{X,Y}(x,y) =$$

$$= 1\cdot 1\cdot \frac{2}{8} + 1\cdot 2\,\frac{1}{8} + 2\cdot 1\cdot \frac{1}{8} + 2\cdot 2\cdot \frac{1}{8} = \frac{5}{4}$$

$$EX = \sum_{x=0}^{2} x f_X(x) = 1\cdot\frac{4}{8} + 2\cdot\frac{2}{8} = 1 = EY$$

Αρα $cov(X,Y) = E(XY) - EXEY = \frac{5}{4} - 1 = \frac{1}{4}$

Παραδειγμα 2 : X,Y απο κοινου συνεχης με πυκνοτητα

$$f(x,y) = \begin{cases} 6x & , \text{αν } x,y>0\ ,\ x+y<1 \\ 0 & , \text{αλλιως} \end{cases}$$

$cov(X,Y) =$;

-ΛΥΣΗ-

$$E(XY) = \iint_{\mathbb{R}^2} xy f(x,y)\,dxdy = \iint_A xy6x\,dxdy = \int_0^{1}\int_0^{1-x} 6x^2y\,dydx = \dots = \frac{1}{10}$$

$$EX = \iint_{\mathbb{R}^2} x f_{X,Y}(x,y)\,dxdy = \int_0^1\int_0^{1-x} x\cdot 6x\,dydx = \int_0^1 6x^2(1-x)\,dx = \dots = \frac{1}{2}$$

$$EY = \iint_{\mathbb{R}^2} y \dots dxdy = \int_0^1\int_0^{1-x} 6xy\,dydx = \dots = \frac{1}{4}$$

Αρα $Cov(X,Y) = E(XY) - EYEX = \frac{1}{10} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} = -\frac{1}{40}$

ΣΗΜΑΣΙΑ ΤΗΣ ΣΥΝΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗΣ

$Cov(X,Y) = E((X-\mu_X)(Y-\mu_Y))$

Το $Cov(X,Y) \geq 0$ είναι συμβατό/προκύπτει συνήθως απ'την εξής συμπεριφορά. Αν για ένα $\omega \in \Omega$ ισχύει:

$X(\omega) - \mu_X \geq 0$ τότε και $Y(\omega) - \mu_Y \geq 0$

Ενώ αν $X(\omega) - \mu_X < 0$ τότε και $Y(\omega) - \mu_Y < 0$.

Δηλαδή, σε κάθε πραγματοποίηση του πειράματος, αν η μια τυχαία μεταβλητή πάρει μεγάλη τιμή, τότε και η άλλη παίρνει μεγάλη τιμή.

Για το $Cov(X,Y) < 0$ αντιστοιχεί όταν η μία τυχαία μεταβλητή παίρνει μικρή τιμή, στην άλλη παίρνει μεγάλη.

Στο παράδειγμα 1 πιο πάνω, ήταν αναμενόμενο να έχουμε $Cov(X,Y) > 0$, γιατί μεγάλες τιμές του X, ευνοούν μεγάλες τιμές του Y.

Στο παράδειγμα 2, το $Cov(X,Y) < 0$ ήταν αναμενόμενο

Πιθανότητες Ι - Χελιώτης

13/12/2018

$$Cov(X,Y) = E((X-EX)(Y-EY)) = E(XY) - EXEY$$

ΠΡΟΤΑΣΗ

Ιδιότητες της συνδιακύμανσης

Με την προϋπόθεση ότι όλες οι συνδιακυμάνσεις πιο κάτω, ορίζονται, ισχύουν τα εξής:

i). $Cov(X,Y) = Var(X)$

ii). $Cov(X,Y) = Cov(Y,X)$

iii). $Cov(aX,Y) = a\,Cov(X,Y)$, $a \in \mathbb{R}$

iv). $Cov(X+Y,Z) = Cov(X,Z) + Cov(Y,Z)$

v). $cov\left(\sum_{i=1}^{m} X_i, \sum_{j=1}^{N} Y_j\right) = \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N} Cov(X_i, Y_j)$

vi). $Cov(a,X) = a$, $a \in \mathbb{R}$

-Αποδ-

i). $cov(X,X) = E((X-EX)^2) = Var(X)$

ii). προφανώς

iii). $cov(aX,Y) = E(aXY) - E(aX)EY =$
$= aE(XY) - aEXEY = a\,Cov(X,Y)$

iv). $cov(X+Y,Z) = E((X+Y)Z) - E(X+Y)EZ =$
$= E(XZ) + E(YZ) - EXEZ - EYEZ =$
$= cov(X,Z) + cov(Y,Z)$

v). έπεται από τα ii, iv

$$cov(X+Y, Z+W) \overset{iv}{=} cov(X, Z+W) + cov(Y, Z+W) \overset{iii}{=}$$
$$= cov(Z+W, X) + cov(Z+W, Y) \overset{iv}{=}$$
$$= cov(Z,X) + cov(W,X) + cov(Z+Y) + cov(W,Y)$$

vi). $cov(a,X) = E((a-\underset{a}{\underbrace{Ea}})(X-EX)) = 0$

ΠΡΟΤΑΣΗ : Αν $E(X_i^2)<\infty$ $\forall i\in\{1,2,\dots,n\}$

$$Var\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\sum_{i=1}^{n}Var(X_i)+2\sum_{1\le i<j\le n}Cov(X_i,X_j)$$

-Αποδ-

$$Var\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)\overset{(1)}{=}cov\left(\sum_{j=1}^{n}X_j,\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\overbrace{cov(X_i,X_j)}^{c_{ij}}=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}cov(X_i,X_i)+\sum_{1\le i\ne j\le n}cov(X_i,X_j)=\sum_{i=1}^{n}Var(X_i)+2\sum_{1\le i<j\le n}cov(X_i,X_j)$$

$\boxed{\text{Ειδική περίπτωση}}$: $Var(X+Y)=Var(X)+Var(Y)+2cov(X,Y)$

ΠΡΟΤΑΣΗ

X,Y: ανεξάρτητες $\Rightarrow cov(X,Y)=0$

-Αποδ-

"$\Rightarrow$" $cov(X,Y)=E(XY)-EXEY=EXEY-EXEY=0$

"$\not\Leftarrow$" Αντιπαράδειγμα: αν $X\sim U(-1,1)$, θέλουμε $Y=X^2$. Τότε,

$cov(X,Y)=E(X^3)-EX\cdot E(X^2)=0$, διότι

- $E(X)=\int_{\mathbb{R}}\underbrace{xf_X(x)}_{\text{περιττή}}dx=0$
- $E(X^3)=\int_{\mathbb{R}}x^3f_X(x)dx=0$

Αν ήταν ανεξάρτητες, θα έπρεπε: $P(X\in A,Y\in B)=P(X\in A)P(Y\in B)$ $\forall A,B\in\mathbb{R}$

- Για $A=(\frac{1}{2},1)$, $B=(0,\frac{1}{16})$

$P(X\in A)=\frac{1}{4}$, $P(Y\in B)=P(X^2\in\frac{1}{16})=P(|X|\le\frac{1}{4})=\frac{1}{4}$

Δηλ. $P(X\in A),P(Y\in B)>0$

Αλλά $P(X\in A,Y\in B)=P(X\in(\frac{1}{2},1),X\in(-\frac{1}{4},\frac{1}{4}))=0$

ΟΡΙΣΜΟΣ: οι X, Y λέγονται $\boxed{\text{ασυσχέτιστες}}$ αν $Cov(X,Y)=0$

Είδαμε ότι οι X,Y: ανεξάρτητες $\Rightarrow X, Y$ ασυσχέτιστες

ΠΟΡΙΣΜΑ

Αν οι $X_1, \dots, X_n$ είναι ανά δύο ασυσχέτιστες, τότε
$Var(X_1 + \dots + X_n) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i)$

-Αποδ-

$$Var(X_1 + \dots + X_n) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) + 2 \overbrace{\sum_{1 \le i < j \le n} Cov(X_i, X_j)}^{=0}$$

ΑΣΚΗΣΗ 7.15 (φυλλάδιο)

n άτομα επιβιβάζονται σε αεροπλάνο n θέσεων στην τύχη, αγνοώντας την ανάθεση της κάρτας επιβίβασης. Έστω W, ο αριθμός αυτών που κάθονται στη σωστή θέση. Θέτουμε:

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{αν ο } i \text{ κάθισε σωστά} \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

(α) $Cov(X_i, X_j)$ για $i \neq j$. Πώς σχολιάζετε το πρόσημό της.
(β) $E(W)$, $Var(W) = ;$

-ΛΥΣΗ-

(α) $Cov(X_i, X_j) = E(X_i X_j) - EX_i EX_j$

Η $X_i X_j$ παίρνει τις τιμές 0,1

$P(X_i X_j = 1) = P(\text{ο } i \text{ και ο } j \text{ κάθονται σωστά}) = \frac{(n-2)!}{n} = \frac{1}{n(n-1)}$

Άρα, $E(X_i X_j) = 1 P(X_i X_j = 1) + 0 \cdot P(X_i X_j = 0) = \frac{1}{n(n-1)}$
$E(X_i) = 1 P(X_i = 1) + 0 \, P(X_i = 0) = P(X_i = 1) = \frac{1}{n}$
Άρα, $cov(X_i, X_j) = \frac{1}{n(n-1)} - \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2(n-1)} > 0$

(β). $W = \sum_{i=1}^{n} X_i$

$$EW = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} = n \cdot \frac{1}{n} = 1.$$

$$Var(W) = Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) + 2\sum_{1\le i<j\le n} Cov(X_i, X_j) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right) +$$

$$+ 2\sum_{1\le i<j\le n} \frac{1}{n^2(n-1)} = \left(1-\frac{1}{n}\right) + 2\binom{n}{2}\frac{1}{n^2(n-1)} = \left(1-\frac{1}{n}\right) + 2\frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{1}{n^2(n-1)} = 1$$

ΑΣΚΗΣΗ.

Αν X, Y: ανεξάρτητες, νδό $Cov(X, XY) = EY \cdot Var(X)$, $EY \in \mathbb{R}$, $E(X^2) < \infty$

-ΛΥΣΗ-

$$Cov(X, XY) = E(X\,XY) - EX \cdot E(XY) = E(X^2Y) - EXEXEY =$$
$$= E(X^2)EY - (EX)^2EY = EY(E(X^2) - (EX)^2) = EY \cdot Var(X)$$

Παράδειγμα 4α Ross σελ343.

$X_1, X_2, \dots, X_n$ ανεξάρτητες και ισοδύναμες τυχαίες μεταβλητές με $EX_i = \mu$, $Var(X_i) = \sigma^2$. Θέτουμε $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$

Να βρεθούν τα: (α) $Var(\bar{X})$

(β) $E(S^2)$

-ΛΥΣΗ-

(α). $$Var(\bar{X}) = Var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2} Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Var(X_i) =$$

$$= \frac{1}{n^2} n Var(X_i) = \frac{1}{n}\sigma^2 \qquad \left[E\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} EX_i = \frac{1}{n} n\mu = \mu\right]$$

(β). $$(n-1)S^2 = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu + \mu - \bar{X})^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 + (\mu - \bar{X})^2 + 2(\mu - \bar{X}) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)\right) =$$
$$= n(\mu - \bar{X})^2 + \sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 + \underbrace{2(\mu - \bar{X})(n\bar{X} - n\mu)}_{2n(\mu - \bar{X})^2}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (X_i-\mu)^2 - n(\mu-\bar{X})^2 \Rightarrow (n-1)E(S^2) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} E((X_i-\mu)^2) - nE((\bar{X}-\mu)^2) =$$

$$= n\sigma^2 - n Var(\bar{X}) = n\sigma^2 - n\cdot\frac{1}{n}\cdot\sigma^2 = (n-1)\sigma^2 \Rightarrow E(S^2) = \sigma^2$$

Παράδειγμα 4ε

X_i: όπως πριν νδο $cov(X_i-\bar{X}, \bar{X}) = 0$

-ΛΥΣΗ-

$$cov(X_i-\bar{X}, \bar{X}) = cov(X_i, \bar{X}) - cov(\bar{X}, \bar{X}) =$$

$$= cov(X_i, X_1+\dots X_n) - Var(\bar{X}) =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} cov(X_i, X_j) - Var(\bar{X}) = \frac{1}{n} cov(X_i, X_j) - \frac{\sigma^2}{n} =$$

$$= \frac{1}{n} var(X_i) - \frac{\sigma^2}{n} = \frac{\sigma^2}{n} - \frac{\sigma^2}{4} = 0$$

ΟΡΙΣΜΟΣ Έστω X, Y τυχαία μεταβλητή με $Var(X), Var(Y) \in (0,\infty)$. Συντελεστή συσχέτισης των X, Y λέμε τον αριθμό

$$P(X,Y) = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{var(X)}\sqrt{var(Y)}}$$

ΠΡΟΤΑΣΗ: X, Y όπως πιο πάνω $a, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$, $a\gamma \neq 0$. Τότε,

$$p(aX+\beta, \gamma Y+\delta) = sgn(a\gamma) P(X,Y) = \begin{cases} P(X,Y) & , \text{αν } a\gamma > 0 \\ -P(X,Y) & , \text{αν } a\gamma < 0 \end{cases}$$

-Αποδ-

$$cov(aX+\beta, \gamma Y+\delta) = cov(aX, \gamma Y) + cov(AX, \delta) + cov(\beta, \gamma Y) + cov(\beta, \delta) =$$

$$= a\gamma cov(X,Y) + 0 + 0 + 0 = a\gamma cov(X,Y)$$

$Var(aX+\beta) = Var(aX) = a^2 Var(X)$

$Var(\gamma Y+\delta) = \gamma^2 Var(Y)$

Αρα $\rho(aX+\beta, \gamma Y+\delta) = \dfrac{a\gamma\, cov(X,Y)}{|a|\sqrt{Var(X)} + |\gamma|\sqrt{Var(Y)}} = \dfrac{a\gamma}{|a\gamma|}\rho(X,Y) =$

$= sgn(a\gamma)\rho(X,Y)$

Παρατήρηση : $\rho(X,X) = \dfrac{cov(X,X)}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(X)}} = \dfrac{Var(X)}{Var(X)} = 1$

$\boxed{\text{ΠΡΟΤΑΣΗ}}$ X, Y : τυχαίες μεταβλητές

Ισχύει $E|XY| \leq E(X^2)^{1/2} E(Y^2)^{1/2}$

-Αποδ-

Αν $EX^2 = 0$, τότε $P(X=0) = 1$

Αρα, $P(|XY| = 0) = 1$, αρα $E|XY| = 0$ και η ανισοτητα ισχυει

- ομοια αν $E(Y^2) = 0$

Υποθετουμε λοιπον οτι $E(X^2), E(Y^2) > 0$

- αν $E(X^2) = \infty$, τοτε επειδη $E(Y^2) > 0$ το δεξι μελος $= \infty$ και η ανισοτητα ισχυει

- αν $E(Y^2) = \infty$ ομοια.

Υποθετουμε λοιπον οτι $0 < E(X^2), E(Y^2) < \infty$

Για καθε $\lambda \in \mathbb{R}$, ισχυει $E((\lambda|X| + |Y|)^2) \geq 0$

Δηλαδη, $\lambda^2 E(X^2) + 2\lambda E(|XY|) + E(Y^2) \geq 0$

πρεπει $\Delta \leq 0$: $\Delta = 4E(|XY|)^2 - 4E(X^2)E(Y^2) \leq 0 \Rightarrow$

$E(|XY|) \leq E(X^2)^{1/2} E(Y^2)^{1/2}$

Παρατηρηση

Αν $EX^2, EY^2 < \infty$, η ισοτητα ~~του~~ στην Cauchy-Schwarz ισχύει αν και μονο αν $\exists a, b \in \mathbb{R}$ με $|a| + |b| > 0$, ωστε $aX + bY = 0 \ \forall \omega \in \Omega$.

-Αποδ-

"$\Rightarrow$" Αν $E(X^2) = 0$, τοτε $P(X=0) = 1$ και η $aX + bY = 0$ ισχυει με $a = 1, b = 0$

Αν $E(X^2) > 0$, τοτε το τριωνυμο στην αποδειξη της C-S εχει $\Delta = 0$. $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ ριζα του τριωνυμου. Δηλ. $E((\lambda X + Y)^2) = 0$.

Αρα, $\lambda X + Y = 0 \ \forall \omega \in \Omega$ $\Big|$ $a = \lambda$, $b = 1$

"$\Leftarrow$" Αν πχ. $b \neq 0$, τοτε $Y = \frac{-aX}{b}$

Και εχουμε: το αριστερο μελος της C-S:

$|E(XY)| = \left|\frac{a}{b}\right| E(X^2)$

Το δεξι μελος: $E(X^2)^{1/2} \cdot E(Y^2)^{1/2} = E(X^2)^{1/2} \cdot E\left(\frac{a^2}{b^2}X^2\right)^{1/2} =$

$= \left|\frac{a}{b}\right| E(X^2)$

18/12/2018 21° μαθημα

Πιθανότητες Ι - Χελιώτης

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)}}$$ συντελεστης συσχετισης

<u>ΠΡΟΤΑΣΗ</u>: Εστω X,Y τυχαια μεταβλητη με $Var(X), Var(Y) \in (0,\infty)$. Τοτε:

(i). $|\rho(X,Y)| \le 1$

(ii). $\rho(X,Y) = 1 \Leftrightarrow \exists\, \alpha,\beta \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ ωστε $Y = \alpha X + \beta$

(iii). $\rho(X,Y) = -1 \Leftrightarrow \exists\, \alpha,\beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < 0$ ωστε $Y = \alpha X + \beta$

$|E(XY)| \le \sqrt{E(X^2)}\sqrt{E(Y^2)}$

Το "=" $\Leftrightarrow \exists\, \alpha,\beta : |\alpha| + |\beta| > 0$ $\alpha X + \beta Y = 0$

-Αποδ-

(i) $|Cov(X,Y)| = |E((X-EX)(Y-EY))| \overset{CS}{\le} \sqrt{E((X-EX)^2)} \cdot \sqrt{E((Y-EY)^2)} =$
$= \sqrt{Var(X)} \cdot \sqrt{Var(Y)}$

(ii) "$\Rightarrow$" εχουμε "=" στην C-S : $\exists\, \gamma,\delta$ όχι και τα δύο μηδέν, ώστε: $\gamma \cdot (X - EX) + \delta \cdot (Y - EY) = 0$

$\delta \neq 0$, γιατί αν $\delta = 0$, τοτε θα ειχαμε $\gamma \neq 0$ και $X = EX$. Αρα, $Var(X) = 0$: ατοπο.

Αρα $Y = \frac{\gamma}{\delta}(X - EX) + EY = \underbrace{\frac{\gamma}{\delta}}_{\alpha} X \underbrace{- \frac{\gamma}{\delta} EX + EY}_{\beta} = \alpha X + \beta$

όμοια $\gamma \neq 0$.

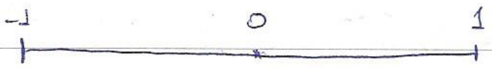
Αρα $\rho(X,Y) = \rho(X, \alpha X + \beta) = \frac{\alpha}{|\alpha|}\rho(X,X) = \frac{\alpha}{|\alpha|}$ Αυτο $= 1$. Αρα $\alpha \ge 0$.

"$\Leftarrow$" $\rho(X,Y) = \rho(X, \alpha X + \beta) = \frac{\alpha}{|\alpha|}\rho(X,X) \overset{\alpha>0}{=} \frac{\alpha}{\alpha} \cdot 1 = 1$

(iii). $\rho(X,Y)=-1 \Rightarrow \rho(X,-Y)=+1 \xRightarrow{(ii)} \exists\, \bar{a}>0$ ώστε $-Y=\bar{a}X+b \Rightarrow Y=-\bar{a}X-b$ $\quad \boxed{-\bar{a}=a}$

Παρατήρηση

① Με τον $\rho(X,Y)$ απεικονίζουμε στο $[-1,1]$ όλο το φάσμα εξαρτήσεων μεταξύ X και Y.



• $\rho(X,Y)=1 \Rightarrow Y=aX+b$ με $a>0$ που είναι η ισχυρότερη μορφή θετικής εξάρτησης

• $\rho(X,Y)=-1 \Leftrightarrow Y=aX+b$ με $a<0$ που είναι η ισχυρότερη μορφή αρνητικής εξάρτησης

• $\rho(X,Y)=0 \Leftrightarrow X,Y$ ασυσχέτιστες.

② • Το $\rho(X,Y)$ έχει το ίδιο πρόσημο με το $Cov(X,Y)$, έτσι κρατάει την πληροφορία με θετική/αρνητική εξάρτηση.

• Η τιμή του έχει σημασία (ενώ του Cov όχι)

πχ.: $Cov(X,10Y)=10\,Cov(X,Y)$, ενώ $\rho(X,10Y)=\rho(X,Y)$

• Η Cov έχει καλύτερες αλγεβρικές ιδιότητες.

§ 7.5 Δεσμευμένη μέση τιμή

X,Y: τυχαίες μεταβλητές σε ένα απ'τα εξής σενάρια:

Ⓘ Διακριτές με από κοινού συνάρτηση πιθανότητας $f_{X,Y}$ και περιθώριες f_X, f_Y

ⒾⒾ Από κοινού συνεχής με από κοινού πυκνότητα $f_{X,Y}$ και περιθώριες πυκνότητες f_X, f_Y

Για $y \in \mathbb{R}$ με $f_Y(y) > 0$, έχουμε ορίσει την:

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Δεσμευμένη συνάρτηση πιθανότητας στο I (ή πυκνότητας στο II)

Σ' αυτήν την $f_{X|Y}(\cdot|y)$ αντιστοιχεί μια μέση τιμή

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u>: Αν $f_Y(y) > 0$, δεσμευμένη μέση τιμή του X, δεδομένου ότι $Y=y$ λέγεται ο αριθμός:

$$E(X|Y=y) = \begin{cases} \sum_{x \in \mathbb{R}} x f_{X|Y}(x|y) & \text{στο σενάριο I} \\ \int_{\mathbb{R}} f_{X|Y}(x|y)\,dx & \text{στο σενάριο II} \end{cases}$$

Επιπλέον ισχύει $E(g(X)|Y=y) = \begin{cases} \sum_{x \in \mathbb{R}} g(x) f_{X|Y}(x|y) & \text{I} \\ \int g(x) f_{X|Y}(x|y)\,dx & \text{II} \end{cases}$

Άσκηση 9.1 (φυλλάδιο)

X, Y από κοινού συνεχής με από κοινού πυκνότητα

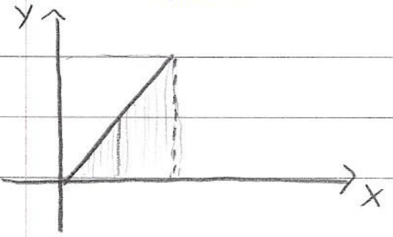
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{x} & , \text{αν } 0<y<x<1 \\ 0 & , \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

(α) ΝΔΟ f: πυκνότητα

(β) $f_{X|Y}(\cdot|y), f_{Y|X}(\cdot|x) = ;$

(γ) για $x, y \in (0,1)$, να βρεθούν: $E(Y), E(X^2|Y=y), E(e^Y|X=x)$.

-ΛΥΣΗ-



α) $f \geq 0$ $\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 \int_0^x f(x,y)\,dy\,dx =$

$= \int_0^1 \int_0^x \frac{1}{x}\,dy\,dx = \int_0^1 \frac{1}{x} \cdot x\,dx = 1$

β) $f_{X|Y}(\cdot|y)$ έχει νόημα για $f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$

Βρίσκουμε τις f_X, f_Y

$f_Y(y)=\int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)dx$: Αυτό $=0$ αν $y\in\mathbb{R}\setminus(0,1)$

Για $y\in(0,1)$, τότε $f_Y(y)=\int_y^1 \frac{1}{x}dx=[\log x]_y^1=\log 1-\log y=-\log y>0$ $\forall y\in(0,1)$

Όμοια, $f_X(x)=0$, για $\forall x\in\mathbb{R}\setminus(0,1)$, ενώ $\forall x\in(0,1)$.

$f_X(x)=\int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)dy=1$ Σταθερή πυκνότητα $\Rightarrow$ ομοιόμορφη κατανομή στο $(0,1)$.

Άρα, $f_{X|Y}(\cdot|y)$ έχει νόημα ακριβώς για $y\in(0,1)$ και

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{\frac{1}{x}\cdot 1_{0<y<x<1}}{-\log y}=-\frac{1}{x\log y}1_{(y,1)}(x)$$

μεταβλητή

παράμετρος

Όμοια, $f_{Y|X}(y|x)$ έχει νόημα ακριβώς για $x\in(0,1)$ και

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}=\frac{\frac{1}{x}1_{0<y<x<1}}{1}=\frac{1}{x}\cdot 1_{(0,x)}(y)$$

γ) $EY=\int_{\mathbb{R}} y f_Y(y)dy=-\int_0^1 y\log y\,dy=-\int_0^1\left(\frac{y^2}{2}\right)'\log y\,dy=$

$=\left[-\frac{y^2}{2}\log y\right]_0^1+\int_0^1\frac{y^2}{2}\cdot\frac{1}{y}dy=\frac{1}{2}\int_0^1 y\,dy=\frac{1}{4}$

$E(X^2|Y=y)=\int x^2 f_{X|Y}(x|y)dx=\int_y^1 x^2\left(-\frac{1}{x\cdot\log y}\right)dx=-\frac{1}{\log y}\cdot\int_y^1 x\,dx=$

$=-\frac{1}{\log y}\cdot\frac{(1-y^2)}{2}$

$E(e^Y|X=x)=\ldots$

> Η δεδομένη μέση τιμή έχει ανάλογες ιδιότητες, όπως η συνήθης μέση τιμή

πχ: $E(aX_1 + X_2 | Y=y) = a\cdot E(X_1|Y=y) + E(X_2|Y=y)$
(γραμμικότητα)

Επίσης, αν X,Y: ανεξάρτητες, τότε $E(X|Y=y) = EX$, γιατί
$X|Y=y \overset{d}{=} X$ ίδια κατανομή

Αποδ: αν X,Y από κοινού συνεχείς $\Rightarrow$
$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{f_X(x)\cdot \cancel{f_Y(y)}}{\cancel{f_Y(y)}} = f_X(x)$$

Για y με $f_Y(y)>0$, ορίζουμε $w(y) = E(X|Y=y)$
(X,Y σ'ένα απ'τα σενάρια I, II)

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u>: Θέτουμε $E(X|Y) = w(Y)$

ΣΗΜΑΝΤΙΚΟ ⊛ <u>ΘΕΩΡΗΜΑ</u>

Έστω X,Y με $EX\in\mathbb{R}$.
Τότε $E(E(X|Y)) = EX$
(Νόμος Επαναλαμβανόμενης Μέσης Τιμής)

<u>ΑΠΟΔ</u>

Στο σενάριο I: $E(E(X|Y)) = E(w(Y)) =$
$$= \sum_{y\in\mathbb{R}} w(y) f_Y(y) = \sum_{y\in\mathbb{R}} f_Y(y) \cdot \sum_{x\in\mathbb{R}} x\, f_{X|Y}(x|y) =$$
$$= \sum_{y\in\mathbb{R}} f_Y(y) \cdot \sum_{x\in\mathbb{R}} x \cdot \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \sum_{y\in\mathbb{R}}\sum_{x\in\mathbb{R}} x\, f_{X,Y}(x,y) = EX,$$
για $g(x,y) = x$.

<u>Παρατηρήσεις</u>

① Το θεώρημα ισχύει ακόμα και όταν οι X,Y δεν είναι στα σενάρια I, II
πχ. η X: διακριτή και Y: συνεχής. Αρκεί να είναι σαφές το νόημα της $X|Y=y$

② Όταν η Y: διακριτή και παίρνει τιμές $y_1,\dots,y_n$ τότε το θεώρημα γράφει $EX = Ew(Y) = \sum_{y\in\mathbb{R}} f_Y(y)\, w(y) = \sum_{k=1}^{n} f_Y(y_k)\cdot E(X|Y=y_k) =$

20/12/2018 — 22° μαθημα

ΠιΘΙ- Χελιώτης

$E(E(X|Y)) = EX$, $\omega(y) = E(X|Y=y)$

9.8-9.14: φυλλαδιο , 9.10 ΘΕΜΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

7.5.3 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ ΜΕ ΔΕΣΜΕΥΣΗ

X, Y: τμ ωστε να εχει νόημα η $E(X|Y)$.

Τοτε, $EX = E(E(X|Y))$

Αν $A \subseteq \Omega$ και θεσουμε $X = 1_A$, τοτε

$E(1_A) = 0 \cdot P(1_A = 0) + 1 \cdot P(1_A = 1) = P(1_A) = P(A)$

Παιρνουμε $P(A) = E(E(1_A|Y)) = E(P(A|Y)) = E(\omega(Y))$, όπου

$\omega(Y) = P(A|Y=y)$

$$\text{Αρα, } P(A) = E(\omega(y)) = \begin{cases} \sum_{x \in \mathbb{R}} f_Y(y) \cdot P(A|Y=y) & \text{, αν } Y \text{: διακριτη} \\ \int_A f_Y(y) \cdot P(A|Y=y)dy & \text{, αν } Y \text{: συνεχης} \end{cases}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5iβ | σελ.364 Ross

Εστω $n \geq 1$ φυσικός, U, X: τμ για τις οποίες ξερουμε ότι $U \sim U(0,1)$ και $X|U=p \sim Bin(n,p)$.

Ποια η κατανομή της X;

-ΛΥΣΗ-

Η X παίρνει τιμές στο $A = \{0, 1, 2, \dots, n\}$.

Για $x \in k$ $P(X=k) = \int_{\mathbb{R}} f_U(p) \cdot P(X|U=p)dp = \int_0^1 1 \cdot \binom{n}{k} p^k (n-p)^{n-k} dp =$

$= \dots = \binom{n}{k} \frac{k!(n-k)!}{(n+1)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{k!(n-k)!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}$.

$$\text{Αρα, } f_X(k) = \begin{cases} \frac{1}{n+1} & \text{, αν } k \in A \\ 0 & \text{, αν } k \in \mathbb{R} \setminus A \end{cases}$$

(ΔΕΣ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5ia /σελ.362 (προβλημα γραμματεως))

7.5.4 ΔΕΣΜΕΥΜΕΝΗ ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗ

Στην τμ $X|Y=y$ με συνάρτηση πιθανότητας ή πυκνότητας $f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$

η μεση τιμή είναι η $E(X|Y=y)$

Την διασπορά της την συμβολίζουμε με $Var(X|Y=y)$ και ισούται με $E((X-E(X|Y=y))^2|Y=y) = \dots = E(X^2|Y=y) - (E(X|Y=y))^2$

Εστω $\delta(y) = Var(X|Y=y)$

ΟΡΙΣΜΟΣ

$Var(X|Y) = \delta(Y) = E(X^2|Y) - (E(X|Y))^2$ ⊛⊛

Η $Var(X|Y)$ είναι τμ.

($\delta(Y) \neq var(X|Y=y)$

Πρώτα τη συμβολίζουμε και μετά βάζουμε το Y)

Για την ⊛⊛ : $\delta(y) = E(X^2|Y=y) - (E(X|Y))^2 = \omega_2(y) - \omega_1^2(y)$,

οπου $\omega_i(y) = E(X^i|Y=y)$

Αρα, $\delta(Y) = \omega_2(y) - (\omega_1(Y))^2 = E(X^2|Y) - (E(X|Y))^2$

ΠΡΟΤΑΣΗ

X: τμ με $EX \in \mathbb{R}$. Τοτε $Var(X) = E(Var(X|Y)) + Var(E(X|Y))$

-Αποδ-

$Var(X|Y) = E(X^2|Y) - (E(X|Y))^2$

- $E(Var(X|Y)) = E(X^2) - E((E(X|Y))^2)$
- $Var(E(X|Y)) = E(E(X|Y)^2) - (E(E(X|Y)))^2$

Το άθροισμά τους είναι $E(X^2) - (E(X))^2 = Var(X)$

ΤΥΧΑΙΟ ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΤΥΧΑΙΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ (ΠΑΡ 5ιστ/σ.366 Ross)

$(X_i)_{i\geq 1}$ ανεξάρτητες ισόνομες με $EX_i \in \mathbb{R}$

N τμ με τιμές στο $\mathbb{N}^+$ ανεξάρτητη απ' τις $(X_i)_{i\geq 1}$

$S_n = X_1 + \dots + X_n$, $S_N = X_1 + \dots + X_N$.

Τότε: $Var(S_N) = EN\,Var(X_1) + (EX)^2\,Var(N)$

-ΛΥΣΗ-

$Var(S_n) = Var(X_1) + \dots + Var(X_n) = n\,Var(X_1)$

$Var(S_N) = E(\underbrace{Var(S_N\,N)}_{\sigma(N)}) + Var(\underbrace{E(S_N|N)}_{m(N)})$

με $\delta(n) = Var(S_N|N=n) = Var(S_n|N=n) =$

$= E(S_n^2|N=n) + (E(S_n|N=n))^2 \underset{\text{Sn: ανεξ. από N}}{=}$

$= E(S_n^2) - (E(S_n))^2 = Var(S_n) = n\cdot Var(X)$.

Άρα, $\delta(N) = N\,var(X_1)$

$m(n) = E(S_N|N=n) = E(S_n|N=n) \overset{S_n \perp N}{=} E(S_n) = n(E(X_1))$

Άρα, $Var(S_N) = EN\,Var(X_1) + Var\,N\,E(X_1)$

7.26 Ross / σ.399

$E(g(X)Y|X) = g(x)E(Y|X)$

$E(X|Y=y) = m(y)$
$E(X|Y) = m(Y)$

-ΛΥΣΗ-

Το αριστερό μέλος είναι ίσο με $m(X)$, όπου

$m(x) = E(g(X)Y|X=x) = E(g(x)\cdot Y|X=x) = g(x)E(Y|X=x) =$

$= g(x)\,m_1(x)$

ΑΡΑ: $m(X) = g(X)\cdot m(X) = g(X)\cdot E(Y|X)$

7.28 / σ.399 Ross

(ΠΑΛΙΟ ΘΕΜΑ)

X, Y: τμ $E(X^2), E(Y^2) < \infty$ ΝΔΟ $cov(X, E(Y|X)) = cov(X,Y)$

-ΛΥΣΗ-

Το αριστερό μέλος είναι ίσο με

$E(X\cdot E(Y|X)) - EX\,E(E(Y|X)) =$

$= E(E(XY|X)) - EXEY = E(XY) - EXEY = cov(X,Y)$

ΦΥΛΛΑΔΙΟ 7.5

X = αριθμός πελατών που μπαίνει σ' ένα κατάστημα σε μια μέρα. $X \sim Poisson(120)$

Κάθε πελάτης πληρώνει με κάρτα με πθ: $p = \frac{1}{4}$

Κάθε πελάτης πληρώνει με μετρητά με πθ: $p = \frac{3}{4}$

Y = #πελατών που πληρώνουν με κάρτα

α) $EY = ?$

β). $Var(Y) = ?$

γ) $P(X,Y) = ?$

-ΛΥΣΗ-

α) $EY = E(E(Y|X)) = E(\mu(X))$ όπου $\boxed{\mu(x) = E(Y|X=x) \sim Bin(x,p) = x \cdot p}$

Άρα $EY = E(\mu(x)) = E(x \cdot p) = p\lambda = 30$

β) $Var(Y) = E(\underbrace{Var(Y|X)}_{\sigma(x)}) + Var(\underbrace{E(Y|X)}_{\mu(x)})$

με $\mu(x) = E(Y|X) = Xp$

$S(x) = Var(Y|X) = Xp(1-p)$

Άρα, $Var(Y) = E(Xp(1-p)) + Var(Xp) =$

$= p \cdot (1-p) \cdot \lambda + p^2\lambda - p\lambda = 30$

γ). $Cov(X,Y) = Cov(X, E(Y|X)) = Cov(X, Xp) = p\, cov(X,X) =$

$= p\, Var(X) = \lambda p$

Άρα $P(X,X) = \dfrac{cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)}} = \dfrac{1 \cdot p}{\sqrt{\lambda} \cdot \lambda p} = \sqrt{p}$

θετικά εξαρτημένες συσχετισμένες

(5)

ASKHΣH

$X \sim Bin(n,p)$

ΝΔΟ $Var(X) = np(1-p)$

-ΛΥΣΗ-

Αν $X \sim Bin(n,p)$ γράφεται ως $X = I_1 + I_2 + \dots + I_n$, όπου I_i: ανεξάρτητες ισονομεί και $I_i \sim$ Bernoulli, όπου

$$I_i = \begin{cases} 1, & i: \text{επιτ.} \\ 0, & i: \text{αποτ.} \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Άρα $Var(X) = Var(I_1) + Var(I_2) + \dots + Var(I_n) = n Var(I_1) =$
$= n \cdot (E(X_1^2) - (EX_1)^2) = n(E(I_1)^2 - (EI_1)^2) = n(p - p^2) = np(1-p)$

9.4/φυλλάδιο

X, Y, Z ανεξάρτητες με $X \sim exp(\lambda)$, $Y \sim exp(\mu)$, $Z \sim exp(v)$.
Να βρεθούν οι πιθανότητες:

α) $P(Y < Z)$

β) $P(X < Y < Z)$

-ΛΥΣΗ-

Η από κοινού πυκνότητα των X, Y, Z είναι:

$f(x,y,z) = f(x) \cdot f(y) \cdot f(z) = \lambda \mu v e^{-\lambda x - \mu y - vz}$, $1_{x,y,z > 0}$

(α) $A = \{(y,z) \in \mathbb{R}^2 \quad y < z$

$P(Y,Z) \in A = \iint_A f_{Y,Z}(y,z)\,dy\,dz = \int_0^\infty \int_y^\infty f_Z(z) f_Y(y)\,dz\,dy$

$P(Y < Z) = \int_{\mathbb{R}} P(Y < Z \mid Y = y) f_Y(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}} P(Y < Z \mid Y = y) f_Y(y)\,dy$

$= \int_{\mathbb{R}} P(Z > y) f_Y(y)\,dy = \int_0^\infty e^{-vy} \mu e^{-\mu y}\,dy =$

$= \mu \int_0^\infty e^{-(v+\mu)y}\,dy = \frac{\mu}{\mu+v} \int_0^\infty \frac{e^{-(\mu+v)y}}{\mu+v}\,dy = \frac{\mu}{\mu+v}$

β) $P(X<Y<Z) = \int_0^{\infty} P(X<Y<Z \mid X=x) f_X(x)dx =$

$= \int_0^{\infty} P(x<Y<Z) f_X(x)dx = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} P(x<y<Z) f_Y(y)dy f_X(x)dx =$

$= \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \chi P(x<y<Z) f_Y(y)dy f_X(x)dx =$

$= \int_0^{\infty}\int_x^{\infty} P(Z>y) f_Y(y) f_X(x)dx =$

$= \int_0^{\infty}\int_x^{\infty} e^{-vy}\mu e^{-\mu y}dy\, \lambda e^{-\lambda x}dx =$

$= \frac{\mu}{\mu+v}\int_0^{\infty}\int_x^{\infty} \frac{e^{(\mu+v)y}}{\mu+v}dy\, \lambda e^{-\lambda x}dx =$

$= \frac{\mu}{\mu+v}\int_0^{\infty} \frac{e^{-(\mu+v)x}}{\mu+v}\lambda e^{-\lambda x}dx =$

$= \frac{\mu\cdot\lambda}{(\mu+v)^2}\int_0^{\infty}(\mu+v+\lambda)e^{-(\mu+v+\lambda)x}dx\,\frac{1}{\mu+v+\lambda} =$

$= \frac{\mu\cdot\lambda}{(\mu+v)^2(\mu+v+\lambda)}$

7.7 ΡΟΠΟΓΕΝΝΗΤΡΙΕΣ

X: τμ με τιμές στο $\mathbb{R}$. Ροπογεννήτρια της X λέμε την συνάρτηση $\mu_X : \mathbb{R} \to (0,\infty)$ με $\mu_X(t) = E(e^{tX})$ $\forall t \in \mathbb{R}$

Η $E(e^{tX})$ ορίζεται πάντοτε γιατί $e^{tX} \geq 0$. Ενδέχεται όμως να παίρνει την τιμή ∞.

Προφανώς $M_X(t) = \begin{cases} \sum_{x \in \mathbb{R}} e^{tx} f_X(x), & X: \text{διακριτή} \\ \int_{\mathbb{R}} e^{tx} f_X(x)dx, & X: \text{συνεχής} \end{cases}$

$M_X(0) = 1$ $\forall$ τμ X, αφού $E(e^0) = 1$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

α) Αν $X \sim Bernoulli$ $M_X(t) = E(e^{tX}) = e^0 P(X=0) + e^{t \cdot 1} P(X=1) =$
$= 1 - p + e^t \cdot p \quad \forall t \in \mathbb{R}$

β) Αν $X \sim U(0,c)$, $c > 0$:
$M_X(t) = E(e^t) = \int_0^c \frac{1}{c} \cdot e^{tx} dx \overset{t \neq 0}{=\!=} \frac{1}{c} \int_0^c \left(\frac{e^{tx}}{t}\right)' dx =$

$= \frac{e^{tc} - 1}{tc}$ Για $t=0$: $E(e^{tx}) = E(e^0) = 1$

γ) Αν $X \sim Bin(n,p)$
$E(e^{tx}) = \sum_{k=0}^{n} e^{tk} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (pe^t)^k (1-p)^{n-k} =$

$= (pe^t + 1 - p)^n \quad \forall t \in \mathbb{R}$

δ) $X \sim Poisson(\lambda)$
$E(e^{tx}) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{tk} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(e^t \lambda)^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{t\lambda} = e^{\lambda(e^t - 1)}$

ε) $X \sim N(0,1)$
$E(e^{tx}) = \int_{\mathbb{R}} e^{tx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-1/2 (x^2 - 2tx)} dx =$

$= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x^2 - 2tx + t^2) - \frac{t^2}{2}} dx =$

$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} = \sqrt{\pi}$

$= e^{-t^2/2} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{1/2 (x-t)^2} dx}_{\text{πυκνοτητα της } N(t,1)} = e^{t^2/2} \cdot 1 = e^{t^2/2}$

Στη ροπογεννητρια, παντα για την επαληθευση θα θυμαμαι ότι $M_X(0) = 1$

ΤΥΧΑΙΟ ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΤΥΧΑΙΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

• $(X_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία ισονομων (ίδια κατανομή) τυχαίων μεταβλητών με $EX \in \mathbb{R}$.

• N: τυχαία μεταβλητή με τιμές στο $\{1, 2, \dots\} = \mathbb{N}^+$, ανεξάρτητη απ' τις $X_1, X_2, \dots$

Θέτουμε $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^+$.

Θεωρούμε την τυχαία μεταβλητή $S_N : \Omega \to \mathbb{R}$ με

$S_N(\omega) = S_{N(\omega)}(\omega) = X_1(\omega) + \dots + X_n(\omega)$

$\boxed{\text{ΑΣΚΗΣΗ}}$

ΝΔΟ $E(S_N) = EN \cdot EX$ → μέση τιμή κάθε ζημιάς

μέση τιμή πλήθους

-ΛΥΣΗ-

$E(S_N) = E(E(S_N | N)) = E(u(N))$, με

$u(n) = E(S_N | N = n) = E(S_n | N = n) =$

$= E(S_n) = E(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = EX_1 + EX_2 + \dots + EX_n = n\, EX_1$

Άρα $E(S_N) = E(N \cdot EX_1) = EX_1 \cdot EN$

15/1/2019 — 21ο μαθημα

ΠΙΘΑΝΟΓΕΝΝΗΤΡΙΕΣ

X: τμ με τιμές στο $\mathbb{N}=\{0,1,2,\dots\}$ και συναρτηση πιθανοτητας f_X, ($f_X(a)=P(X=a)$ $\forall a\in\mathbb{R}$)

Ορσ: Πιθανογεννήτρια της X, λέμε τη συναρτηση
$$P_X(t)=E(t^X)=\sum_{k=0}^{\infty}P(X=k)\,t^k$$

Ορίζεται τουλάχιστον για $t\in[-1,1]$, γιατί αν $|t|\leq 1$
$$\sum_{k=0}^{\infty}|P(X=k)t^k|\leq\sum_{k=0}^{\infty}P(X=k)=1<\infty$$

Παράδειγμα

Αν $X\sim Poisson(\lambda)$ τοτε $P_X(t)=e^{\lambda(t-1)}$, $\forall t\in\mathbb{R}$

Πράγματι, $P_X(t)=\sum_{k=0}^{\infty}e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}t^k=e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda t)^k}{k!}=$

$=e^{-\lambda}e^{\lambda t}=e^{\lambda(t-1)}$

Στις πιθανογεννήτριες για να βρουμε την f_X, αναλύουμε σε δυναμοσειρά και οι συντελεστές είναι οι τιμές της f_X

ΠΡΟΤΑΣΗ

α) $P(X=k)=\frac{1}{k!}P_X^{(k)}(0)$, $x\in\mathbb{N}$

β). $E((X)_k)=P_X^{(k)}(1)$, $\forall k\geq 1$

Η $P_X(t)$ έχει ανάπτυγμα σε δυναμοσειρά με κεντρο το 0 και ακτίνα σύγκλισης τουλάχιστον 1. Αρα στο $(-1,1)$ ειναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη και οι παράγωγοι υπολογίζονται με παραγώγιση όρο προς όρο.

-Αποδ-

(α) $P_X(t) = \sum_{j=0}^{\infty} P(X=j)\cdot t^j \Rightarrow$

$P_X^{k}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} P(X=j)\cdot j(j-1)\cdot\ldots\cdot(j-x+1)\cdot t^{j-k} =$

$= \sum_{j=k}^{\infty} P(X=j)\cdot (j)_x \cdot t^{j-k} \quad \forall t \in (-1,1)$

Για $t=0$: $P_X^{k}(0) = P(X=k)\cdot k!$

β). $P((X)_k) = P_X^{k}(1)$

Έχουμε $P_X^{k}(t) = \sum_{j=k}^{\infty} (j)_k P(X=j)\, t^{j-k} \Rightarrow$

$P_X^{k}(1) = \sum_{j=k}^{\infty} (j)_k P(X=j) = E((X)_x)$

Το (β) μας δίνει τη μέση τιμή των ποσοτήτων
$X, X(X-1), X(X-1)(X-2)$

<u>ΠΡΟΤΑΣΗ</u> (Μοναδικότητα)

Έστω X,Y: τμ με τιμές στο $\mathbb{N}$.
Αν $P_X(t) = P_Y(t)$ $\forall t \in (-1,1)$, τότε οι X,Y έχουν την ίδια κατανομή (δηλ. $P(X=k) = P(Y=k)$ $\forall k \in \mathbb{N}$)

-Αποδ-

$P(X=k) = \frac{P_X^{k}(0)}{k!} = \frac{1}{k!} P_Y^{k}(0) = P(Y=k)$

<u>ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ</u>

$E((X)_k) = P_X^{(k)}(1^-)$

<u>Προτασ</u>

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες τμ με τιμές στο $\mathbb{N}$. Τότε
$P_{X_1+\ldots+X_n}(t) = P_{X_1}(t)\cdot\ldots\cdot P_{X_n}(t) \quad \forall t \in [-1,1]$

Αποδ

Αν X τμ με τιμές στο $\mathbb{N}$, τότε

$P_X(t) = E(e^{X \log t}) = M_X(\log t), t>0$ $\quad M_X(t) = E(e^{tX}), t \in \mathbb{R}$

$M_X(t) = E((e^t)^X) = P_X(e^t), t \in \mathbb{R}$ $\quad P_X(t) = E(t^X), t \geq -1$

ΑΣΚΗΣΗ

$X \sim Poisson(\lambda)$

Με χρηση της $P_X(t) = e^{\lambda(t-1)}$, $t \in \mathbb{R}$ να βρεθουν οι $EX, Var(X)$

-ΛΥΣΗ-

$P_X'(t) = \lambda \cdot e^{\lambda(t-1)} \Rightarrow EX = P_X'(1^-) = \lambda$

$P_X''(t) = \lambda^2 e^{\lambda(t-1)} \Rightarrow E(X(X-1)) = P_X''(1^-) = \lambda^2 \Rightarrow$

$E(X^2) - EX = \lambda^2 \Rightarrow EX^2 = \lambda^2 + \lambda$

Ασκησεις φυλλ. 10.7, 10.8

ΑΣΚ. 10.8 (φυλλαδιο)

α) $\exists a \in \mathbb{R}$ ώστε κάποια απ'τις $g(t) = \frac{at-1}{3-t^3}$, $f(t) = \frac{5t^2+a}{7-t^5}$ να είναι πιθανογεννήτρια κάποιας τμ X?

β). Ποια η κατανομή αυτής της τμ;

γ). $EX, Var(X) = ?$

-ΛΥΣΗ-

$$\left[\begin{array}{l} P_X(t) = f_X(0) + t\, f_X(1) + t^2 f_X(2) = E(t^X) \\ P_X(1) = E(1^X) = 1 \end{array}\right]$$

Επειδή $P_X(1) = 1$ πρέπει $g(1) = 1$, $f(1) = 1$

→ Για την g

$g(1) = 1 \Rightarrow a-1 = 2 \Rightarrow a = 3$

$g(t) = \frac{3t-1}{3-t^3} = (3t-1) \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{t^3}{3}} =$

$$= \frac{1}{3}(3t-1)\cdot \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{t^3}{3}\right)^k = \frac{1}{3}(3t-1)\cdot\left(1+\frac{t^3}{3}+\frac{t^6}{3^2}+\dots\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{3}{3^k}t^{3k+1} - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^{3k}}{3^k}\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{3}{3^{k+1}}t^{3k+1} - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^{3k}}{3^{k+1}}$$

Οι συντελεστές των δυνάμεων $3k, k\in\mathbb{N}$ είναι αρνητικοί, οπότε η $g(t)$ ΔΕΝ είναι πιθανογεννήτρια

Για την f

$f(1)=1 \Rightarrow 5+a=7-1 \Rightarrow a=1$

$$f(t) = \frac{5t^2+1}{7-t^5} = (5t^2+1)\cdot\frac{1}{7}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{t^5}{7}\right)^k =$$

$$= (5t^2+1)\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^{5k}}{7^{k+1}} = \dots$$

§8.2 ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ Marcov, Chebychev και ο ΑΣΘΕΝΗΣ ΝΟΜΟΣ ΤΩΝ ΜΕΓΑΛΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

ΠΡΟΤΑΣΗ (Ανισότητα Marcov)

X: τμ με τιμές στο $(0,+\infty)$. Τότε

$$P(X\geq a) \leq \frac{EX}{a} \quad \forall a>0$$

-Αποδ-

$X(\omega) \geq a\, 1_A(\omega)$, όπου $A=\{\omega\in\Omega : X(\omega)\geq a\}$ $\forall \omega\in\Omega$

$$1_A = \begin{cases} 1, & X(\omega)\geq a \\ 0, & X(\omega)<a \end{cases}$$

Αν $X(\omega)<a \Rightarrow X(\omega)\geq 0$, ισχύει αφού $X(\omega)\in[0,+\infty)$

Αν $X(\omega)\geq a \Rightarrow X(\omega)\geq a$, ισχύει

Άρα $EX \geq E(a \cdot 1_A) = a \cdot E(1_A) = a P(A) \Rightarrow P(A) \leq \frac{EX}{a}$

▸ Όμοια, αν $X \geq a$: $P(X \geq a) \leq \frac{E(X^k)}{a^k}$, $a>0, \lambda>0$, γιατί:

$$P(X \geq a) = P(X^\lambda \geq a^\lambda) \leq \frac{E(X^\lambda)}{a^\lambda}$$

ΠΡΟΤΑΣΗ (ανισότητα Chebyshev)

X: τμ με $\mu = EX \in \mathbb{R}$.

Τότε $\forall a>0$ ισχύει $P(|X-\mu| \geq a) \leq \frac{1}{a^2} \cdot Var(X)$

-Αποδ-

$$P(|X-\mu| \geq a) = P(|X-\mu|^2 \geq a^2) \underset{Marcov}{\leq} \frac{E((X-\mu)^2)}{a^2} = \frac{Var(X)}{a^2}$$

Ασκ. 11.2 /φυλλάδιο

$X \geq 0$: τμ με $EX = 4$, $E(X^2) = 18$. Τι άνω φράγμα για την $P(X \geq 5)$ δίνουν οι ανισότητες Marcov και Chebyshev

-ΛΥΣΗ-

∘ $P(X \geq 5) \leq \frac{EX}{5} = \frac{4}{5}$ (1° φράγμα)

↳ Marcov, αφού $X \geq 0$

∘ $P(X \geq 5) = P(X^2 \geq 25) \leq \frac{E(X^2)}{25} = \frac{18}{25}$ (2° φράγμα)

∘ $P(X \geq 5) = P(X-4 \geq 1) \leq P(|X-4| \geq 1) \leq \frac{Var(X)}{1^2} =$
$= E(X^2) - (E(X))^2 = 18 - 16 = 2$ (3° φράγμα

Ασκ. 11.1 /φυλλάδιο

X: τμ με $EX = 3$, $E(X^2) = 13$. ΝΔΟ $P(-2 \leq X \leq 8) \geq \frac{21}{25}$

-ΛΥΣΗ-

$P(-2 \leq X \leq 8) = P(-5 \leq X - EX \leq 5) = P(|X-EX| \leq 5) =$
$= 1 - P(|X-EX| > 5) \geq 1 - \frac{4}{25} = \frac{21}{25}$

ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ : <u>11.4, 11.5</u> /φυλλάδιο

<u>ΑΣΚ. 11.5 (φυλλ)</u>

X: σίχης τμ με τιμές στο $[0,+\infty)$ και πυκνότητα f με $f\downarrow$. ΝΔΟ $f(x) \leq \frac{2}{x^2} EX$, $\forall x>0$

-ΛΥΣΗ-

(Για $EX=\infty$, ισχύει) Έστω $x>0$: $EX = \int_0^\infty t\cdot f_X(t)dt \geq \int_0^x t f_X(t)dt \geq$

$\int_0^x t f_X(x)dt = f_X(x)\int_0^x t dt = \frac{x^2}{2} f_X(x)$

<u>ΑΣΚ. 11.7 (φυλλ)</u>

Έστω $X\geq 0$ τμ με $0<EX<\infty$ και $a\in(0,1)$. Τότε

α) $P(X\leq aEX) \leq \frac{Var(X)}{(1-a)^2 (EX)^2}$

β) $P(X>aEX) \geq (1-a)^2 \frac{(E(X))^2}{E(X^2)}$

-ΛΥΣΗ-

α) $P(X\leq aEX) = P(X-EX \leq EX(a-1)) = P(X-EX\leq -EX(1-a)) \leq$

$\leq P(|X-EX| \geq (1-a)EX) \leq \frac{Var(X)}{(1-a)^2 EX^2}$

β) Έστω $A=\{\omega\in\Omega : X(\omega)>aEX\}$

$EX = E(X\cdot 1_A) + E(X 1_{A^c}) \leq (E(X^2))^{1/2}\cdot(E(1_A{}^2))^{1/2} + E(aEX\cdot 1_{A^c}) =$

$= (E(X^2))^{1/2}\cdot(P(A))^{1/2} + aEX\, P(A^c) \leq (E(X^2)^{1/2})\cdot(P(A)^{1/2}) + aEX$

$\Rightarrow (1-a)EX \leq (E(X^2))^{1/2}(P(A))^{1/2} \Rightarrow$

$\Rightarrow (1-a)^2 EX^2 \leq E(X^2)P(A) \Rightarrow$

$P(A) \geq \frac{(1-a)^2 EX^2}{E(X^2)}$

17/1/2019 25° μαθημα

Π, Θ Ι - Χελιώτης

Θεώρημα (ο ασθενής νόμος των μεγάλων αριθμών)

$(X_i)_{i\geq 1}$ ανεξάρτητες ισόνομες τυχαίες μεταβλητές
με $\mu := EX \in \mathbb{R}$
Θετουμε $S_n = X_1 + \ldots + X_n$
Τοτε, $\forall \varepsilon > 0$, ισχύει $P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mu\right| \geq \varepsilon\right) \xrightarrow{n\to+\infty} 0$

-Αποδ-

Υποθετουμε ότι $\sigma^2 = Var(X_i) < \infty$ $(\Leftrightarrow E(X_i^2) < \infty)$

$E(S_n) = E(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = EX_1 + \ldots + EX_n = n\cdot\mu$

$Var(S_n) = Var(X_1) + Var(X_2) + \ldots + Var(X_n) = n\sigma^2$

↳ X_i: ανεξάρτητες

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mu\right| \geq \varepsilon\right) = P\left(S_n - n\mu \geq n\cdot\varepsilon\right) \leq \frac{Var(S_n)}{\varepsilon^2 \cdot n^2} =$$

$$= \frac{n\cdot\sigma^2}{\varepsilon^2\cdot n^2} = \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2\cdot n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

§ 8.3 ΤΟ ΚΕΝΤΡΙΚΟ ΟΡΙΑΚΟ ΘΕΩΡΗΜΑ

Υπενθύμιση: X: τμ με $EX = \mu \in \mathbb{R}$, $Var(X) = \sigma^2 \in (0, +\infty)$
Κανονικοποίηση της X, λεμε την τμ $Y = \frac{X-\mu}{\sigma}$, $\sigma = \sqrt{Var(X)}$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΚΑΝΟΝΙΚΟΠΟΙΗΣΗΣ

- $EY = \frac{1}{\sigma^2}(EX - E\mu) = \frac{1}{\sigma^2}(EX - \mu) = 0$
- $Var(Y) = \frac{1}{\sigma^2} Var(X-\mu) = \frac{1}{\sigma^2} Var(X) = 1$

> Εστω $(X_i)_{i\geq 1}$ ανεξάρτητες ισόνομες τμ με
$\mu = EX \in \mathbb{R}$ και $\sigma^2 = Var(X) \in (0, +\infty)$

Θετουμε $S_n = X_1 + \dots + X_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^+$
Επηδή $ES_n = n \cdot \mu$, $Var(S_n) = n\sigma^2$,
η κανονικοποιηση της S_n είναι η

$$W_n = \frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n \cdot \sigma^2}}$$

Θεώρημα (Το κεντρικό οριακό θεώρημα)(ΚΟΘ)
Εστω $(X_i)_{i \geq 1}$ ανεξάρτητες ισονομες τμ με $\mu = EX \in \mathbb{R}$ και $\sigma^2 = Var(X) \in (0, +\infty)$.
Τοτε $\forall I \subseteq \mathbb{R}$ διάστημα, ισχύει:

$$\lim_{n \to +\infty} P\left(\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \in I\right) = P(Z \in I), \text{ οπου } Z \sim N(0,1)$$

Δηλ. για μεγαλο n, η W_n σχεδόν ακολουθει την κατανομή $N(0,1)$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1) Συνεπηει (α, β)

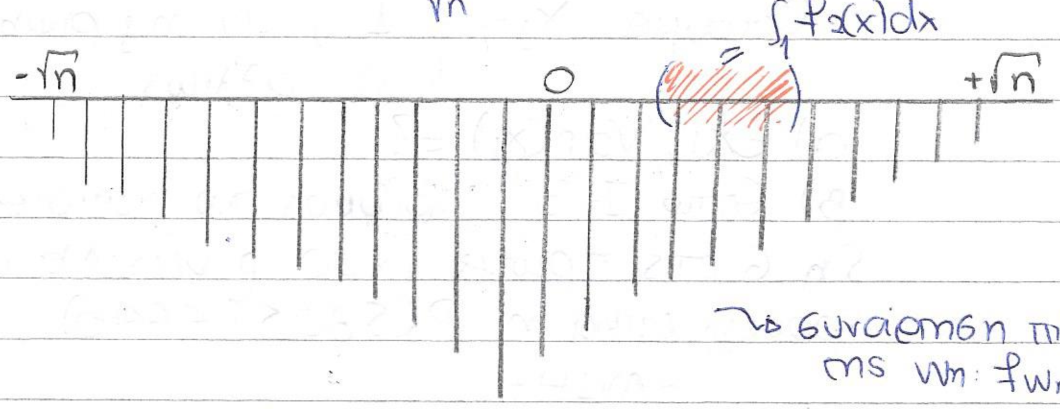
α) $P\left(\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{\sigma^2 \cdot n}} \leq x\right) \xrightarrow{n \to +\infty} P(Z \leq x) = \varphi(x)$

β) $P\left(a \leq \frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n \cdot \sigma^2}} \leq b\right) \xrightarrow{n \to +\infty} P(a \leq Z \leq b) =$
$= \varphi(b) - \varphi(a)$

2) Η W_n δεν ακολουθεί ακριβώς την $N(0,1)$
(την ακολουθεί μονο οταν $X_1 \sim N(\mu, \sigma^2)$)
πχ: αν $X_1 \sim Bernoulli\left(\frac{1}{2}\right)$, $E(X_1) = \frac{1}{2}$, $Var(X_1) = \frac{1}{4}$,

τοτε $W_n = \frac{S_n - \frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{4}}}$ παίρνει τιμές στο $\left\{\frac{k - \frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{4}}}, k = 0, \dots, n\right\}$

Αυτό το σύνολο αποτελείται από σημεία που εκτείνονται από $-\sqrt{n}$ στο $\sqrt{n}$ και 2 διαδοχικά σημεία, έχουν απόσταση $\frac{2}{\sqrt{n}}$



$$P(W_n \in I) = \sum_{x \in I} f_{W_n}(x)$$

Αν πάρω το χώρο ( ) θα βρω ίδια τιμή

3) Η X_1 μπορεί να έχει οποιαδήποτε κατανομή: Διακριτή, συνεχή, μικτή

4) Αν $\bar{X} = \frac{S_n}{n}$ (μέσος όρος), τότε

$$E(\bar{X_n}) = \frac{n\mu}{n} = \mu,$$

$$Var(\bar{X}) = \frac{Var(S_n)}{n^2} = \frac{n \cdot \sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}$$

Το Κ.Ο.Θ. λέει ότι:

$$P\left(\frac{\bar{X_n} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \in I\right) \xrightarrow{n \to +\infty} P(Z \in I)$$

↳ κανονικοποίηση της $\bar{X_n}$

Ασκ. 11.10 / φυλλ.

Θεωρούμε ακολουθία ρίψεων αμερόληπτου ζαριού

Θέτουμε $X_j = \begin{cases} 1, & \text{αν η j ρίψη έφερε 5 ή 6} \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$

α) $EX_1, Var(X_1) = ?$

β) Έστω $T =$ ο αριθμός των αποτελεσμάτων 5 ή 6 στις πρώτες 1800 ρίψεις. Να υπολογιστεί προσεγγιστικά η $P(580 < T < 640)$

-ΛΥΣΗ-

Παρατηρώ ότι $X_1 \sim Bernoulli(p)$ $[p = \frac{2}{6} = \frac{1}{3})$

$EX_1 = p \cdot 1 + (1-p) \cdot 0 = p = \frac{1}{3}$

$\sigma^2 = Var(X_1) = \underbrace{pq}_{\text{τύπος}} = \frac{1}{3} \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$

β) Έστω $S_n = X_1 + \dots + X_n$, $T = S_{1800}$

Το ΚΟΘ λέει ότι η $W_n = \dfrac{S_n - \frac{n}{3}}{\sqrt{n \frac{2}{9}}}$,

ακολουθεί προσεγγιστικά την κατανομή $N(0,1)$, αν το n είναι μεγάλο

$W_{1800} = \dfrac{T - 600}{\sqrt{1800 \frac{2}{9}}} = \dfrac{T-600}{20}$

$P(580 < T < 640) = P(-20 < T - 600 < 40) =$

$= P(-1 < \frac{T-600}{20} < 2) \simeq P(-1 < Z < 2) = \Phi(2) - \Phi(-1) =$

$= \Phi(2) - (1 - \Phi(1)) = \Phi(2) + \Phi(1) - 1$

ΑΣΚΗΣΗ 8.14 (σελ 430)

Ενα εξάρτημα ενός ηλεκτρικού συστήματος έχει τυχαίο χρόνο ζωής με μέση τιμή $\mu=100$ και $\sigma=30$. Μόλις καίγεται, αντικαθίσταται. Πόσα τουλάχιστον πρέπει να έχουμε σε απόθεμα ώστε η πιθανότητα να λειτουργήσει το σύστημα συνεχώς για 2000 ώρες, να είναι $\geq 0{,}95$?

-ΛΥΣΗ-

Εστω n: αριθμός ανταλλακτικών που διαθέτουμε (μαζί με το 1°)

X_i: = ο χρόνος ζωής του i-ανταλλακτικού

$S_n = X_1 + \dots + X_n$

Οι X_i είναι ανεξάρτητες (το υποθέτουμε) και ισόνομες (τυχαίο χρόνο ζωής)

Ζητάμε το ελάχιστο n, ώστε $P(S_n \geq 2000) \geq 0{,}95$

Το ΚΟΘ λέει ότι η ποσότητα

$$W_n = \frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n\cdot\sigma^2}} = \frac{S_n - n\cdot 100}{\sqrt{n\cdot 30^2}}$$ ακολουθεί

προσεγγιστική κατανομή $N(0,1)$

$$P(S_n \geq 2000) = P\left(\frac{S_n - 100n}{\sqrt{n\cdot\sigma^2}} \geq \frac{2000-100n}{30\sqrt{n}}\right) \simeq$$

$$P\left(Z \geq \frac{2000-100n}{30\sqrt{n}}\right) \simeq 1 - \Phi\left(\frac{2000-100n}{30\sqrt{n}}\right)$$

Αυτό είναι $\geq 0{,}95 \Leftrightarrow \Phi\left(\frac{2000-100n}{30\sqrt{n}}\right) \leq 0{,}05 = \Phi(*)$

Ισχύει ότι $\Phi(1{,}65) = 0{,}95$ Άρα

$0{,}95 = \Phi(1{,}65) = 1 - \Phi(-1{,}65) \Rightarrow$

$0{,}05 = \Phi(-1{,}65)$

Άρα $\frac{2000-100n}{30\sqrt{n}} \leq -1,65 \Rightarrow$

$100 \cdot n - 2000 \geq 1,65 \cdot 30\sqrt{n}$

Το ελάχιστο n που ικανοποιεί αυτή την ανισότητα, είναι $n=23$

Ασκ. 11.16 /φυλλ

ΝΔΟ $\lim_{n\to\infty} \int_0^{n/2} \frac{2^n}{(n-1)!} \cdot t^{n-1} \cdot e^{-2t} dt = \frac{1}{2}$

- ΛΥΣΗ -

Ζητάμε το $\lim_{n\to\infty} \int_0^{n/2} f_n(t)dt$, όπου

f_n: πυκνότητα της $\Gamma(n,2)$

$\int_0^{n/2} f_n(t)dt = P(A_n < \frac{n}{2})$ με $A_n \sim \Gamma(n,2)$

Έστω $(X_i)_{i\geq 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων μεταβλητών με $X_1 \sim \Gamma(1,2)$, τότε $A_n \overset{d}{=} X_1 + \dots + X_n = S_n$

$EX_1 = \frac{1}{2}$, $Var(X_1) = \frac{1}{4}$

$P(A_n < \frac{n}{2}) = P(S_n < n/2) = P\left(\frac{S_n - n/2}{\sqrt{n/4}} < 0\right) \xrightarrow{n\to\infty}$

$P(Z<0) = \frac{1}{2}$

§ 8.4 Ο ΙΣΧΥΡΟΣ ΝΟΜΟΣ ΤΩΝ ΜΕΓΑΛΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ (ΙΝΜΑ)

Θεώρημα

$(X_i)_{i\geq 1}$ ανεξάρτητες και ισόνομες τμ με $EX_1 = \mu$ να ορίζεται (στοιχείο του $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$). Τότε, με πιθανότητα 1 ισχύει $\frac{S_n}{n} \to \mu$

ΑΣΚΗΣΗ

$(X_i)_{i\geq 1}$, S_n : όπως παραπάνω

Αν $EX_1 > 0$ τότε $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$ με πιθανότητα 1

- ΛΥΣΗ

$$S_n = \frac{S_n}{n} \cdot n \xrightarrow{n\to\infty} \mu \cdot (+\infty) = +\infty$$

ΑΣΚΗΣΗ

$(X_i)_{i\geq 1}$ ανεξάρτητες, ισόνομες τμ με $\mu = EX_1 \in \mathbb{R}$.

Τότε με πιθανότητα 1, το $\lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 \right] = Var(X_1)$

-ΛΥΣΗ-

Θέτουμε $Y_i := (x_i - \mu)^2 \ \forall i \geq 1$

Οι $(Y_i)_{i\geq 1}$ είναι ανεξάρτητες, καθώς οι X_i είναι ανεξάρτητες και ισόνομες.

$EY_1 = E((X_1 - \mu)^2) = Var(X_1)$

Ο ΙΝΜΑ εφαρμόζεται και δίνει ότι $\frac{1}{n}(Y_1 + \ldots + Y_n) \xrightarrow{n\to+\infty} EY_1 = var(X_1)$ με πιθανότητα 1.

ΑΣΚΗΣΗ

Έστω $(U_i)_{i\geq 1}$ ανεξάρτητες και ισόνομες τμ με $V_i \sim U(0,1)$

α) ΝΔΟ $\lim_{n\to\infty} (U_1 \cdot U_2 \cdots U_n)^{1/n} = e^{-1}$

-ΛΥΣΗ-

$(U_1 \cdot U_2 \cdots U_n)^{1/n} = e^{-1}$

- ΛΥΣΗ

$(U_1 \cdot U_2 \cdots U_n)^{1/n} = e^{1/n (\log U_1 + \ldots + \log U_n)}$

Θεωρούμε τις τμ $X_i = \log U_i$, $i \geq 1$ ανεξάρτητες κ' ισόνομες.

$$EX_1 = E(\log U_1) = \int_{\mathbb{R}} \log x \cdot f_{U_1}(x)dx = \int_0^1 \log x\, dx = \int_0^1 (x')\log x\, dx =$$

$$= [x\log x]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{x}dx = \cancel{\log 1} - \lim_{x\to 0^+}(x\log x) - 1 = 0 - 1 = -1$$

Άρα, $\dfrac{\log U_1 + \ldots + \log U_n}{n} \to -1$ με πιθανότητα 1