ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΦΥΛΛΑΔΙΟΥ 2

Άσκηση 1

Θεωρήστε τον $(k+1)\times(k+1)$ πίνακα όπου για $i=1,2,\dots,k+1$ και $j=1,2,\dots,k+1$ η a_{ij} συντεταγμένη δίνεται από την $a_{ij}=x^{i+j-2}$, όπου $x\geq 0$. Να βρείτε τα ΣΣΙ και την τιμή του π.π. για κάθε τιμή του x.

Λύση

$$
A = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ \vdots \\ k-1 \\ k \\ k+1 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & k-1 & k & k+1 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
1 & x & x^2 & x^3 & \dots & x^{k-2} & x^{k-1} & x^{k} \\
x & x^2 & x^3 & x^4 & \dots & x^{k-1} & x^{k} & x^{k+1} \\
x^2 & x^3 & x^4 & x^5 & \dots & x^{k} & x^{k+1} & x^{k+2} \\
x^3 & x^4 & x^5 & x^6 & \dots & x^{k+1} & x^{k} & x^{k+3} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
x^{k-2} & x^{k-1} & x^{k} & x^{k+1} & \dots & x^{2k-4} & x^{2k-3} & x^{2k-2} \\
x^{k-1} & x^{k} & x^{k+1} & x^{k+2} & \dots & x^{2k-3} & x^{2k-2} & x^{2k-1} \\
x^{k} & x^{k+1} & x^{k+2} & x^{k+3} & \dots & x^{2k-2} & x^{2k-1} & x^{2k}
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

$1^{\underline{η}}$ περίπτωση:

<u>Αν $x=0$</u>

$$
A = \begin{array}{c} \\ (1) \\ (2) \\ (3) \\ \vdots \\ (k) \\ (k+1) \\ \max_i a_{ij} \rightarrow \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} (1) & (2) & (3) & \dots & (k) & (k+1) \end{array} \\
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0
\end{bmatrix} \\
\begin{array}{cccccc} 1 & 0^{*} & 0^{*} & \dots & 0^{*} & 0^{*} \end{array}
\end{array}
\begin{array}{c} \min_j a_{ij} \\ 0^{*} \\ 0^{*} \\ 0^{*} \\ \vdots \\ 0^{*} \\ 0^{*} \\ \\ \end{array}
$$

$$0=\bar{u}=\max_i \min_j a_{ij}$$

$$\min_j \max_i a_{ij} = \underline{u} = 0$$

Επειδή $\underline{u}=\bar{u}$ το παιχνίδι έχει ΣΣΙ σε καθαρές στρατηγικές με τιμή $u=0$.
ΣΣΙ είναι οι στρατηγικές $((i),(j))$ με $i\in\{1,\dots,k+1\}$, $j\in\{2,\dots,k+1\}$

2η περίπτωση

$0<x<1$:

$$
A = \begin{array}{c|cccccc|c}
 & (1) & (2) & (3) & \cdots & (k) & (k+1) & \min\limits_j a_{ij} \\
\hline
(1) & 1 & x & x^2 & \cdots & x^{k-1} & x^k & x^k \; * \\
(2) & x & x^2 & x^3 & \cdots & x^k & x^{k+1} & x^{k+1} \\
(3) & x^2 & x^3 & x^4 & \cdots & x^{k+1} & x^{k+2} & x^{k+2} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
(k) & x^{k-1} & x^k & x^{k+1} & \cdots & x^{2k-2} & x^{2k-1} & x^{2k-1} \\
(k+1) & x^k & x^{k+1} & x^{k+2} & \cdots & x^{2k-1} & x^{2k} & x^{2k} \\
\hline
\max\limits_i a_{ij} \to & 1 & x & x^2 & \cdots & x^{k-1} & \underset{*}{x^k} &
\end{array}
$$

$$x^k = \bar{u} = \max_i \min_j a_{ij}$$

$$\min_j \max_i a_{ij} = \underline{u} = x^k$$

Εφόσον $\underline{u} = \bar{u}$ το παιχνίδι έχει ΣΣΙ σε καθαρές στρατηγικές με $u = x^k$

Το ΣΣΙ είναι το $((1),(k+1))$

3η περίπτωση:

$x=1$

$$
A = \begin{array}{c|cccccc|c}
 & & & & & & & \min\limits_j a_{ij} \\
\hline
 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \; * \\
 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \; * \\
 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \; * \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \; * \\
 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \; * \\
\hline
\max\limits_i a_{ij} \to & \underset{*}{1} & \underset{*}{1} & \underset{*}{1} & \cdots & \underset{*}{1} & \underset{*}{1} &
\end{array}
$$

$1 = \bar{u}$

$\underline{u} = 1$

Το παιχνίδι έχει ΣΣΙ σε καθαρές στρατηγικές

με $u = 1$

και ΣΣΙ είναι τα $((i),(j))$

όπου $i \in \{1, \dots, k+1\}$

$j \in \{1, \dots, k+1\}$

4η περίπτωση:

$x > 1$

$$
A = \begin{array}{c} \\ (1) \\ (2) \\ (3) \\ \vdots \\ (k) \\ (k+1) \\ \max_i a_{ij} \to \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} (1) & (2) & (3) & \cdots & (k) & (k+1) \end{array} \\
\left[\begin{array}{cccccc}
1 & x & x^2 & \cdots & x^{k-1} & x^k \\
x & x^2 & x^3 & \cdots & x^k & x^{k+1} \\
x^2 & x^3 & x^4 & \cdots & x^{k+1} & x^{k+2} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
x^{k-1} & x^k & x^{k+1} & \cdots & x^{2k-2} & x^{2k-1} \\
x^k & x^{k+1} & x^{k+2} & \cdots & x^{2k-1} & x^{2k}
\end{array}\right] \\
\begin{array}{cccccc} x^k\,* & x^{k+1} & x^{k+2} & \cdots & x^{2k-1} & x^{2k} \end{array}
\end{array}
\begin{array}{c} \min_j a_{ij} \\ 1 \\ x \\ x^2 \\ \vdots \\ x^{k-1} \\ x^k\,* \\ \\ \end{array}
$$

$$x^k = \bar{u} = \max_i \min_j a_{ij}$$

$$\min_j \max_i a_{ij} = \underline{u} = x^k$$

Εφόσον $\underline{u} = \bar{u}$ το παιχνίδι έχει ΣΣΙ σε καθαρές στρατηγικές με $u = x^k$ και ΣΣΙ το $((k+1),(1))$.

Άσκηση 2

Δυο παίκτες παίζουν το εξής παιχνίδι:
Ο ΙΙ τοποθετεί ένα αντικείμενο σε μια από τις n θέσεις, ώστε το αντικείμενο της θέσης j αξίζει a_j.
Ο Ι επιλέγει μια από τις n θέσεις και εάν μεν η θέση αυτή είναι κενή, παίρνει 0 ενώ αν έχει αντικείμενο, παίρνει την αξία του.

· κανονική μορφή

$$S^{I} = \{(1),(2),\dots,(n)\}$$
$$S^{II} = \{(1),(2),\dots,(n)\}$$

$$A = \begin{array}{c} \\ (1) \\ (2) \\ (3) \\ \vdots \\ (n-1) \\ (n) \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} (1) & (2) & (3) & \cdots & (n-1) & (n) \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{bmatrix} \end{array}$$

Μια στρατηγική ((i),(i)) είναι ΣΣΙ ανν $\left.\begin{array}{l} a_i \le 0 \\ a_i \ge 0 \end{array}\right\} \Rightarrow a_i = 0$

Μια στρατηγική ((i),(j)) με $i \neq j$ είναι ΣΣΙ ανν $a_i \ge 0$ και $a_j \le 0$

Άσκηση 3 (11/3$^{\underline{00}}$)

Δυο γειτονικές χώρες επιλέγουν ανεξάρτητα η μια από την άλλη την "ειρηνική" (ε) ή την "πολεμική" (π) στρατηγική. Αν και οι δυο επιλέξουν "π" τότε η πληρωμή της κάθε μιας θα είναι -3 μ.ω.
Αν επιλέξουν "ε" και οι δυο τότε η πληρωμή θα είναι 1 μ.ω. για την κάθε μια.
Τέλος, αν η μια επιλέξει "ε" και η άλλη "π" τότε η φιλειρηνική χώρα θα πάρει -2 μ.ω. και η πολεμοχαρής 2 μ.ω.
Δώστε την κανονική μορφή.

$S^{I} = \{(\varepsilon), (\pi)\}$

$S^{II} = \{(\varepsilon), (\pi)\}$

$$A = \begin{array}{c} \\ (\varepsilon) \\ (\pi) \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} (\varepsilon) & (\pi) \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \end{array} \qquad B = \begin{array}{c} \\ (\varepsilon) \\ (\pi) \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} (\varepsilon) & (\pi) \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \end{array}$$

$((\varepsilon),(\varepsilon))$ όχι ΣΣΙ αφού $BR^{I}(\varepsilon) = (\pi)$

$((\varepsilon),(\pi))$ ΣΣΙ με πληρωμή $(-2, 2)$

$((\pi),(\varepsilon))$ ΣΣΙ με πληρωμή $(2, -2)$

$((\pi),(\pi))$ όχι ΣΣΙ αφού $BR^{I}(\pi) = (\varepsilon)$

Άσκηση 4 (14/3ου)

Έστω το S.n.n $A = \begin{pmatrix} t & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ όπου $t \in \mathbb{R}$.

Για ποιες τιμές του t υπάρχει ΣΣΙ σε καθαρές στρατηγικές

Από τον πίνακα B βλέπουμε ότι $BR^{II}(1) = (1)$

$BR^{II}(2) = (2)$

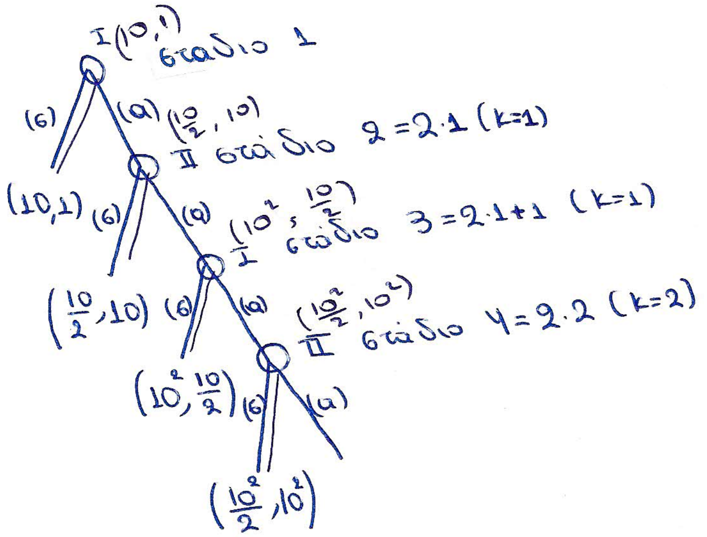
Άρα οι στρατηγικές $((1),(2))$ και $((2),(1))$ δεν είναι ΣΣΙ

Επίσης $BR^{I}(2) = (1)$ άρα και $((2),(2))$ όχι ΣΣΙ

για να είναι το $((1),(1))$ ΣΣΙ πρέπει $t \geq 2$

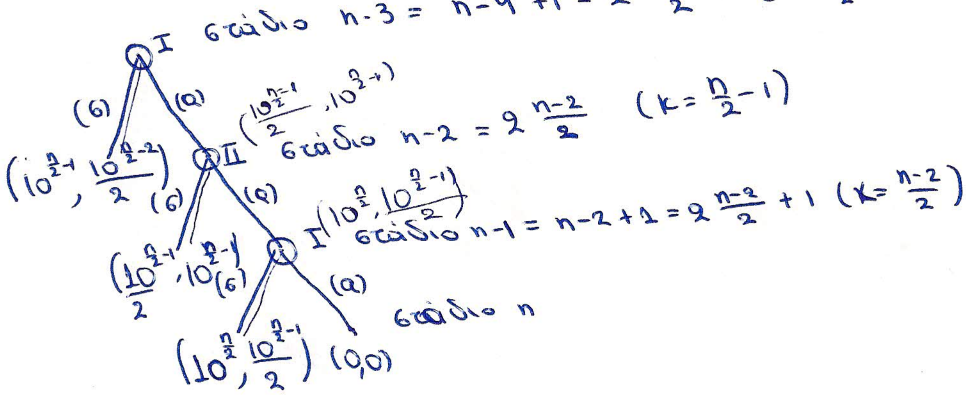
Άσκηση 5

Αν n άρτιο



Άρα στο 2k στάδιο ($k \geq 1$) αν ο ΙΙ παίξει "σ" οι πληρωμές είναι $(\frac{10^k}{2}, 10^k)$

Στο 2k+1 στάδιο, $k \geq 1$ αν ο Ι παίξει "σ" οι πληρωμές είναι $(10^{k+1}, \frac{10^k}{2})$



Άρα ΣΣΙ είναι να σταματούν και η πληρωμή είναι (10, 1)

Όμοια ως όταν n περιττό