ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΦΥΛΛΑΔΙΟΥ 4.

Άσκηση 1

(α) Έστω δ.π.π A, B

Εξηγήστε γιατί $(\underline{x_0}, \underline{y_0})$ ΣΣΙ $\Leftrightarrow$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \underline{x_0}^T A \underline{y_0} \geq \underline{x}^T A \underline{y_0} & \forall \underline{x} \in P^m \\ \underline{x_0}^T B \underline{y_0} \geq \underline{x_0}^T B \underline{y} & \forall \underline{y} \in P^n \end{array} \right\}$$

<u>Λύση:</u>

$$(\underline{x_0}, \underline{y_0}) \text{ ΣΣΙ} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} BR^{I}(\underline{y_0}) = \underline{x_0} \\ BR^{II}(\underline{x_0}) = \underline{y_0} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} \underline{x_0}^T A \underline{y_0} \geq \underline{x}^T A \underline{y_0} & \forall \underline{x} \in P^m \\ \underline{x_0}^T B \underline{y_0} \geq \underline{x_0}^T B \underline{y} & \forall \underline{y} \in P^n \end{array} \right\}$$

(β) Ν.δ.ο το ΣΣΙ σε μικτές στρατηγικές ενός δ.ππ (A,B) είναι αμετάβλητο ως προς μετασχηματισμούς θετικής κλίμακας

Δηλαδή αν $(\underline{x_0}, \underline{y_0})$ ΣΣΙ του (A, B)

τότε και το δ.π.π (A', B')

με $A' = k_1 A + c_1 \mathbb{1}$ με $k_1 > 0$, $c_1 \in \mathbb{R}$

$B' = k_2 B + c_2 \mathbb{1}$ $k_2 > 0$, $c_2 \in \mathbb{R}$

έχει Σ.Σ.Ι. το $(\underline{x_0}, \underline{y_0})$

<u>Λύση:</u>

Εφόσον $(\underline{x_0}, \underline{y_0})$ ΣΣΙ του (A, B) $\Leftrightarrow$

$$\underline{x_0}^T A \underline{y_0} \geq \underline{x}^T A \underline{y_0} \quad \forall \underline{x} \in P^m \quad (1)$$

$$\underline{x_0}^T B \underline{y_0} \geq \underline{x_0}^T B \underline{y} \quad \forall \underline{y} \in P^n \quad (2)$$

Για να είναι το $(\underline{x_0}, \underline{y_0})$ ΣΣΙ του (A', B') αρκεί ν.δ.ο

$$\underline{x_0}^T A' \underline{y_0} \geq \underline{x}^T A' \underline{y_0} \quad \forall \underline{x} \in P^m \quad (3)$$

$$\underline{x_0}^T B' \underline{y_0} \geq \underline{x_0}^T B' \underline{y} \quad \forall \underline{y} \in P^n \quad (4)$$

③ $\iff \underline{x_0}^T(k_1 A + c_1 \mathbb{1})\underline{y_0} \geq \underline{x}^T(k_1 A + c_1 \mathbb{1})\underline{y_0} \quad \forall\, \underline{x} \in P^m \iff$

$k_1 \underline{x_0}^T A \underline{y_0} + c_1 \underline{x_0}^T \mathbb{1} \underline{y_0} \geq k_1 \underline{x}^T A \underline{y_0} + c_1 \underline{x}^T \mathbb{1} \underline{y_0} \quad \forall\, \underline{x} \in P^m$ *

όμως αν $\underline{x}^T = (x_1, x_2, \dots, x_m) : \sum_{i=1}^{m} x_i = 1$

$\underline{y}^T = (y_1, y_2, \dots, y_n) : \sum_{i=1}^{n} y_i = 1$

τότε $\underline{x}^T \mathbb{1} \underline{y} =$

$$(x_1, x_2, \dots, x_m)\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} =$$

$$\left(\sum_{i=1}^{m} x_i, \sum_{i=1}^{m} x_i, \dots, \sum_{i=1}^{m} x_i\right)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} =$$

$$(1, 1, \dots, 1)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} y_i = 1$$

$\overset{*}{\iff} \cancel{k_1} \underline{x_0}^T A \underline{y_0} + \cancel{c_1} \geq \cancel{k_1} \underline{x}^T A \underline{y_0} + \cancel{c_1} \quad \forall\, \underline{x} \in P^m$

$\iff \underline{x_0}^T A \underline{y_0} \geq \underline{x}^T A \underline{y_0}$ ισχύει $\forall\, \underline{x} \in P^m$

ομοίως ισχύει η ④.

① Ν.δ.ο κάθε παιχνίδι 2 παικτών σταθερού αθροίσματος είναι στρατηγικά ισοδύναμο με ένα π.π.

Δηλ. το (A,B) με $A+B=c\mathbb{1}$ είναι ισοδύναμο με π.π.

Λύση:

Θέτω $A' = A - c\mathbb{1}$

$B' = B$ το (A',B') είναι στρατηγικά ισοδύναμο του (A,B), λόγω (6)

και είναι $A'+B'=0$ άρα (A',B') π.π.

⑤ Έστω $\Gamma = \langle N, S^i, i\in N, h^i, i\in N\rangle$

$\tilde{S}_0$ ΣΣΙ της μεικτής επέκτασης του Γ

Αν $G = \langle N, S^i, i\in N, g^i, i\in N\rangle$ όπου

$g^i(s) = k_i\, h^i(s) + c_i, \ k_i>0, c_i\in\mathbb{R}\ \forall i\in N$

τότε ν.δ.ο $\tilde{S}_0$ ΣΣΙ του G

Λύση:

$\tilde{S}_0$ ΣΣΙ του $\Gamma \Leftrightarrow \tilde{h}^i(\tilde{S}_0^i, \tilde{S}_0^{-i}) \geq \tilde{h}^i(\tilde{S}^i, \tilde{S}_0^{-i})\ \forall \tilde{S}^i\in\tilde{S}^i, \forall i\in N$ ①

$\tilde{S}_0$ ΣΣΙ του $G \Leftrightarrow \tilde{g}^i(\tilde{S}_0^i, \tilde{S}_0^{-i}) \geq \tilde{g}^i(\tilde{S}^i, \tilde{S}_0^{-i})\ \forall \tilde{S}^i\in\tilde{S}^i\ \forall i\in N$

$\Leftrightarrow \cancel{k_i}\, \tilde{h}^i(\tilde{S}_0^i, \tilde{S}_0^{-i}) + c_i \geq \cancel{k_i}\, \tilde{h}^i(\tilde{S}^i, \tilde{S}_0^{-i}) + c_i\ \forall \tilde{S}^i\in\tilde{S}^i\ \forall i\in N$

$\Leftrightarrow$ ① άρα ισχύει.

Άσκηση 2

Ν.δ.ο αν (x_0, y_0) και (x_1, y_1) ΣΣΙ ενός π.π. Α, τότε και (x_0, y_1), (x_1, y_0) είναι επίσης ΣΣΙ

Εξειδικεύστε στην περίπτωση που x_0, x_1, y_0, y_1 καθαρές στρατηγικές.

Πώς εμφανίζονται τότε τα ΣΣΙ;

$(\underline{x}_0, \underline{y}_0)$ ΣΣΙ $\Leftrightarrow$ $\underline{x}^T A \underline{y}_0 \leq \underline{x}_0^T A \underline{y}_0 \leq \underline{x}_0^T A \underline{y}$ ① $\forall \underline{x} \in \mathbb{R}^m, \forall \underline{y} \in \mathbb{R}^n$

$(\underline{x}_1, \underline{y}_1)$ ΣΣΙ $\Leftrightarrow$ $\underline{x}^T A \underline{y}_1 \leq \underline{x}_1^T A \underline{y}_1 \leq \underline{x}_1^T A \underline{y}$ ② $\forall \underline{x} \in \mathbb{R}^m, \forall \underline{y} \in \mathbb{R}^n$

Γνωρίζουμε ότι $\underline{x}_0^T A \underline{y}_0 = \underline{x}_1^T A \underline{y}_1 = v$

Στην ① θέτω $\underline{y} = \underline{y}_1$ στην ② θέτω $\underline{x} = \underline{x}_0$

$$v$$

άρα ① $\Rightarrow \underline{x}_0^T A \underline{y}_0 \leq \underline{x}_0^T A \underline{y}_1$

② $\underline{x}_0^T A \underline{y}_1 \leq \underline{x}_1^T A \underline{y}_1 = v$

$\Rightarrow \quad v \leq \underline{x}_0^T A \underline{y}_1 \leq v \Rightarrow \underline{x}_0^T A \underline{y}_1 = v$

① $\Rightarrow \underline{x}_0^T A \underline{y}_1 \leq \underline{x}_0^T A \underline{y}$

② $\Rightarrow \underline{x}^T A \underline{y}_1 \leq \underline{x}_0^T A \underline{y}_1$

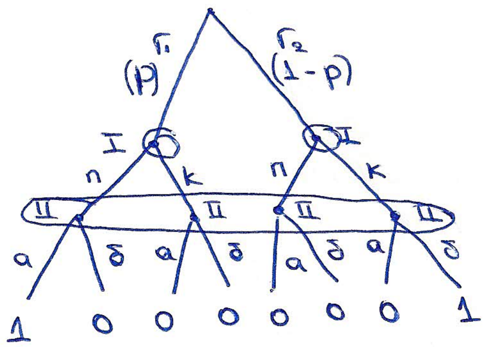
άρα $\quad \underline{x}^T A \underline{y}_1 \leq \underline{x}_0^T A \underline{y}_1 \leq \underline{x}_0^T A \underline{y}$

άρα (x_0, y_1) ΣΣΙ

Ομοίως για (x_1, y_0)

Για καθαρές αν τα (i,j) και (k,l) είναι σαγματικά τότε και τα (i,l) και τα (k,j) είναι σαγματικά

Άσκηση 3:
Εκτεταμένη μορφή:



σύνολα καθαρών στρατηγικών:

$S^{I} = \{(\pi,\pi),(\pi,\kappa),(\kappa,\pi),(\kappa,\kappa)\}$

$S^{II} = \{(\alpha),(\delta)\}$

συνάρτηση πληρωμής:

$S^{I} \backslash S^{II}$	(α)	(δ)
(π,π)	p	0
(π,κ)	p	$1-p$
(κ,π)	0	0
(κ,κ)	0	$1-p$

(π,π) vs (α): $p1+(1-p)0=p$

(π,π) vs (δ): $p0+(1-p)0=0$

(π,κ) vs (α): $p1+(1-p)0=p$

(π,κ) vs (δ): $p0+(1-p)1=(1-p)$

(κ,π) vs (α): $p0+(1-p)0=0$

(κ,π) vs (δ): $p0+(1-p)0=0$

(κ,κ) vs (α): $p0+(1-p)0=0$

(κ,κ) vs (δ): $p\cdot 0+(1-p)1=1-p$

$$A = \begin{bmatrix} \cancel{p \quad 0} \\ p & 1-p \\ \cancel{0 \quad 0} \\ \cancel{0 \quad 1-p} \end{bmatrix}$$

$\Gamma_2 \succ \Gamma_1$

$\Gamma_4 \succ \Gamma_3$

$\Gamma_2 \succ \Gamma_4$

Αν $p \geq 1-p \Rightarrow p \geq \frac{1}{2}$ $\quad \Sigma_2 \succ \Sigma_1$

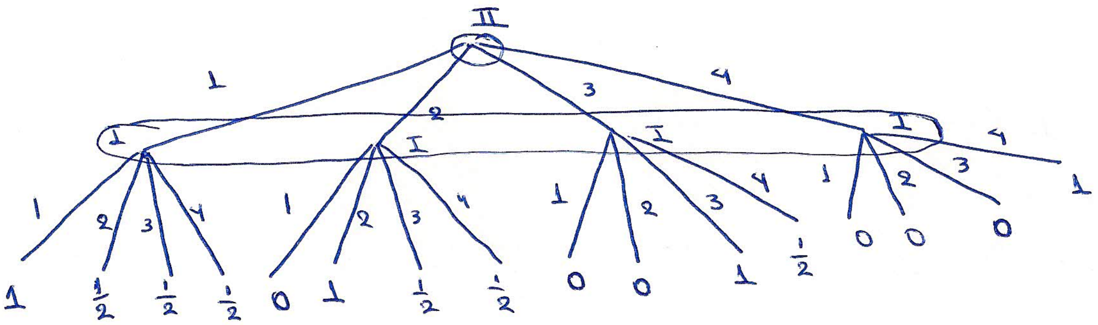
ΣΣΙ: $((\Pi, K), (\delta))$ με πληρωμή $1-p$

Αν $p < 1-p \Rightarrow p < \frac{1}{2}$ $\quad \Sigma_1 \succ \Sigma_2$

ΣΣΙ: $((\Pi, K), (\alpha))$ με πληρωμη p

Άσκηση 4:

εκτεταμένη μορφή:



σύνολα καθαρών στρατηγικών:

$S^{I} = \{(1),(2),(3),(4)\}$

$S^{II} = \{(1),(2),(3),(4)\}$

συνάρτηση πληρωμής:

$S^{I} \setminus S^{II}$	(1)	(2)	(3)	(4)	$\min_j a_{ij}$
(1)	1	0	0	0	0
(2)	$\frac{1}{2}$	1	0	0	0
(3)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0	0
(4)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$
$\max_i a_{ij}$	1	1	1	1	

$\underline{v} = \frac{1}{2}$

$\bar{v} = 1$ άρα $\nexists$ ΣΣΙ σε καθαρές.

$$A = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Θα το λύσουμε μέσω επικρατειών στρατηγικών

$$x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 = v \xRightarrow{1,2,3} x_1 = \frac{1}{8}v \quad 4$$

$$x_2 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 = v \xRightarrow{1,2} x_2 = \frac{1}{4}v \quad 3$$

$$x_3 + \frac{1}{2}x_4 = v \xRightarrow{1} x_3 = \frac{1}{2}v \quad 2$$

$$x_4 = v \quad 1$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \xRightarrow{1,2,3,4}$$

$$\frac{1}{8}v + \frac{1}{4}v + \frac{1}{2}v + v = 1 \Rightarrow$$

$$\frac{15v}{8} = 1 \Rightarrow$$

$$v = \frac{8}{15}$$

$$\underline{x}^* = \left(\frac{1}{15}, \frac{2}{15}, \frac{4}{15}, \frac{8}{15}\right)^T$$

Για τον II:

$$y_1 = \frac{8}{15} \quad 5$$

$$\frac{1}{2}y_1 + y_2 = \frac{8}{15} \xRightarrow{5} y_2 = \frac{4}{15} \quad 6$$

$$\frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 + y_3 = \frac{8}{15} \xRightarrow{5,6} y_3 = \frac{2}{15} \quad 7$$

$$\frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 + \frac{1}{2}y_3 + y_4 = \frac{8}{15} \xRightarrow{5,6,7} y_4 = \frac{1}{15}$$

Άρα $\underline{y}^* = \left(\frac{8}{15}, \frac{4}{15}, \frac{2}{15}, \frac{1}{15}\right)^T$

Το ΣΣΣ είναι $\left(\left(\frac{1}{15}, \frac{2}{15}, \frac{4}{15}, \frac{8}{15}\right)^T, \left(\frac{8}{15}, \frac{4}{15}, \frac{2}{15}, \frac{1}{15}\right)^T\right)$

με τιμή $v = \frac{8}{15}$