ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΦΥΛΛΑΔΙΟΥ 6

Άσκηση 21 / Κεφάλαιο 4

Έστω A τετραγωνικό π.π. (δηλ $m=n$) όπου A αντιστρέψιμος πίνακας. Ας συμβολίσουμε με B τον αντίστροφο του A, δηλ $A^{-1} = B = (b_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$. Να δείξετε ότι αν $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ είναι εξισωτική βέλτιστη του I, τότε

$$x_j = \frac{\sum_i b_{ij}}{\sum_{i,j} b_{ij}}, \quad j=1,\dots,n$$

$$v = \frac{1}{\sum_{i,j} b_{ij}} \quad \text{όπου } v \text{ η αξία του } A$$

Λύση:

Αν $\underline{x}$ εξισωτική του I =>

$$\underline{x}^T A_{\cdot j} = v \quad \forall j \in \{1,\dots,n\} \Rightarrow$$

$$\underline{x}^T A = \underline{x}^T [A_{\cdot 1} \ A_{\cdot 2} \cdots A_{\cdot n}] = [\underline{x}^T A_{\cdot 1} \ \ \underline{x}^T A_{\cdot 2} \cdots \underline{x}^T A_{\cdot n}] =$$

$$[v \ v \ v \cdots v] = v \underline{1}^T \quad \text{όπου } \underline{1} = (1,1,\dots,1)^T$$

$$\underline{x}^T = v \underline{1}^T B \Rightarrow$$

$$x^T = v\left[\sum_i b_{i1} \ \ \sum_i b_{i2} \ \cdots \ \sum_i b_{in}\right]$$

άρα $\underbrace{\sum_j x_j}_{=1} = v \sum_j \sum_i b_{ij} \Rightarrow v = \dfrac{1}{\sum_{i,j} b_{ij}}$

Επομένως $x_j = v \sum_i b_{ij} = \dfrac{\sum_i b_{ij}}{\sum_{i,j} b_{ij}}$

Άσκηση 28 / Κεφάλαιο 4

Έστω $< S, T, h >$ παιχνίδι 2-παικτών 0-αθροίσματος με καλά ορισμένη μεικτή επέκταση (π.χ. π.π) και έστω $\tilde{s}^o$ εξισωτική μεικτή στρατηγική του Ι, δηλαδή $\tilde{h}(\tilde{s}^o, t) = c \ \forall t \in T$.
Ν.δ.ο αν υπάρχει $\tilde{t}^o \in \tilde{T}$ έτσι ώστε το $\tilde{s}^o$ να είναι βέλτιστη απάντηση στην $\tilde{t}^o$ τότε η $(\tilde{s}^o, \tilde{t}^o)$ είναι ΣΣΙ.

Λύση:

Αρκεί ν.δ.ο $\overbrace{\tilde{h}(\tilde{s}, \tilde{t}^o) \le \tilde{h}(\tilde{s}^o, \tilde{t}^o)}^{(2)} \underbrace{\le \tilde{h}(\tilde{s}^o, \tilde{t})}_{(1)} \quad \forall \ \tilde{s} \in \tilde{S}, \ \tilde{t} \in \tilde{T}$

Εφόσον η $\tilde{s}^o$ είναι εξισωτική $\tilde{h}(\tilde{s}^o, \tilde{t}^o) = c$

$\tilde{h}(\tilde{s}^o, \tilde{t}) = c$

άρα (1) ✓

Εφόσον $\tilde{s}^o$ βέλτιστη απάντηση στην $\tilde{t}^o$ $\Rightarrow$

$\tilde{h}(\tilde{s}, \tilde{t}^o) \le \tilde{h}(\tilde{s}^o, \tilde{t}^o) \quad \forall \ \tilde{s} \in \tilde{S}$ άρα (2) ✓

Άσκηση 3/Φυλλάδιο 6

Να λυθεί η άσκηση 5.6.1

(Παιχνίδι Silverman)

- Δυο παίκτες επιλέγουν ταυτόχρονα από ένα θετικό ακέραιο
- Ο παίκτης που διάλεξε αριθμό μεγαλύτερο, αλλά μέχρι τρεις φορές μεγαλύτερο, κερδίζει 1 μ.ω από τον αντίπαλό του.
- Ο παίκτης που διάλεξε αριθμό τρεις φορές ή και περισσότερο μεγαλύτερο από τον αντίπαλο χάνει 2 μ.ω.
- Αν και οι δυο διαλέξουν τον ίδιο αριθμό η πληρωμή είναι 0.

Να βρεθεί τιμή και βέλτιστες στρατηγικές

Λύση:

Έχουμε ένα πινακοπαιχνίδι

Το σύνολα καθαρών στρατηγικών είναι

$$S^{I} = \{(1),(2),(3),(4),\dots\}$$

$$S^{II} = \{(1),(2),(3),(4),\dots\}$$

Ο πίνακας πληρωμής είναι

$$A = \begin{array}{c} \\ (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \\ (5) \\ (6) \\ \vdots \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} (1) & (2) & (3) & (4) & (5) & (6) & \dots \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccccc} 0 & -1 & 2 & 2 & 2 & 2 & \dots \\ 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 2 & \dots \\ -2 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & \dots \\ -2 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & \dots \\ -2 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & \dots \\ -2 & -2 & 1 & 1 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{array}\right] \end{array}$$

Ελέγχουμε για απλοποιήσεις

$$\Gamma_i \prec \Gamma_1 \quad \forall i \geq 6$$

$$\Sigma_j \prec \Sigma_1 \quad \forall j \geq 6$$

στον 5×5 πίνακα που απομένει

$$\Gamma_3 \prec \Gamma_5 , \ \Gamma_4 \prec \Gamma_5 \text{ και}$$

$$\Sigma_3 \prec \Sigma_5 , \ \Sigma_4 \prec \Sigma_5$$

Άρα ο πίνακας A απλοποιήθηκε και έμεινε

$$A' = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Εφόσον $A'^T = -A'$ το παιχνίδι είναι συμμετρικό άρα $v = 0$. Πρέπει να βρω και βέλτιστες στρατηγικές

Ελέγχω αν έχει ΣΣΙ σε καθαρές στρατηγικές

$$\begin{array}{cc} & \min\limits_j a_{ij} \\ A' = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} -1 \\ -1 \\ 0 \end{array} \\ \max\limits_i a_{ij} \to \begin{array}{ccc} 2 & 1 & 2 \end{array} & \end{array} \qquad 0 = \underline{v} = \max_i \min_j a_{ij}$$

$$\bar{v} = \min_j \max_i a_{ij} = 1$$

Εφόσον $\underline{v} < \bar{v}$ δεν υπάρχει ΣΣΙ σε καθαρές

Θα ελέγξω αν υπάρχει ΣΣΙ σε εξισωτικές στρατηγικές

Έστω $\underline{x}^0 = (x_1, x_2, x_3)^T$ εξισωτική στρατηγική του Ι

Επειδή $v = 0$ οι εξισώσεις είναι

$$x_2 + 2x_3 = 0$$

$$-x_1 + x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = x_1 \quad (1)$$

$$2x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 2x_1 \quad (2)$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1 \xRightarrow{(1),(2)} x_1 + 2x_1 + x_1 = 1 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{4}$$

Άρα $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = \frac{1}{4}$

Οπότε στο A' βέλτιστη στρατηγική του Ι είναι η $\underline{x}^{\circ} = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)^{T}$

Επειδή A συμμετρικό θα είναι και

$$\underline{y}^{\circ} = \underline{x}^{\circ} = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)^{T}$$

Άρα και στο A, η τιμή είναι $v = 0$ ενώ οι βέλτιστες στρατηγικές είναι

$$\underline{x}_A^{\circ} = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{4}, 0, 0, \ldots\right)^{T}$$

$$\underline{y}_A^{\circ} = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{4}, 0, 0, \ldots\right)^{T}$$