

Διόρθωση στο μάθημα της 10/12.

Στην απόδειξη του Θεωρήματος Glicksberg ακολουθήσαμε τα εξής βήματα: (1) Δείξαμε ότι τα ολικά φραγμένα παιχνίδια έχουν τιμή, δηλαδή ότι $\sup \inf = \inf \sup$ πάνω στις μεικτές στρατηγικές, (2) Έπειτα, χρησιμοποιώντας τα θεωρήματα επιλογής του Helly και το Θεώρημα Helly-Bray, δείξαμε ότι κάθε παίκτης διαθέτει βέλτιστη στρατηγική, και (3) Χρησιμοποιώντας τη συνέχεια της συνάρτησης πληρωμής και τη συμπάγεια των χώρων στρατηγικών, «δείξαμε» ότι τα \sup και \inf του (1) μπορούν να αντικατασταθούν από \min και \max , όπερ έδει δείξαι! Εδώ προσπεράσαμε την απόδειξη του βιβλίου που χρησιμοποιούσε το (2) για να συνάγει το (3) και απέφευγε χρήση συνέχειας και συμπάγειας.

Αναρωτιέται κανένας, για ποιο λόγο τότε να ασχοληθούμε με το Βήμα (2);

Η απάντηση είναι ότι, δυστυχώς, το Βήμα (3) στη τάξη ήταν «λάθος». Εξηγούμαι αμέσως: Στο Βήμα (3), η συνάρτηση που έχουμε είναι η $\tilde{h}(\tilde{s}, \tilde{t})$ ορισμένη στο $\tilde{S} \times \tilde{T}$. Επομένως, αν θέλουμε να επικαλεστούμε συνέχεια και συμπάγεια, πρέπει να είναι σαφής η τοπολογία με την οποία έχει εφοδιαστεί το $\tilde{S} \times \tilde{T}$. Στις περισσότερες αποδείξεις δε δίνουμε σημασία, επειδή μιλάμε για συναρτήσεις ορισμένες πάνω σε συνήθεις Ευκλειδείους χώρους, όπου η τοπολογία παράγεται από τη γνωστή l_2 νόρμα. Εδώ όμως οι χώροι \tilde{S} και \tilde{T} αποτελούνται από όλα τα μέτρα πιθανότητας πάνω στα (συμπαγή) S και T . Τα S και T είναι υποσύνολα Ευκλειδίων χώρων, αλλά τα \tilde{S} και \tilde{T} *δεν είναι*. Τοπολογία που να «κάνει τη δουλειά» μας υπάρχει, η ασθενής τοπολογία, αλλά εμείς από την αρχή είχαμε αποκλείσει αυτήν την προσέγγιση, επειδή δε θέλαμε να εμπλακούμε με πιο «προχωρημένα» μαθηματικά. Γι' αυτό και πήγαμε μέσω των θεωρημάτων Helly και Helly-Bray.

Επομένως, το Βήμα (3) της τάξης ήταν ξεκρέμαστο και θα παρακαλέσω να το αγνοήσετε. Στη θέση του διαβάστε την απόδειξη του Βιβλίου, σελ. 130,¹ όπου χρησιμοποιώντας το Βήμα (2)—ύπαρξη βέλτιστων στρατηγικών—δείχνεται εύκολα ότι τα \sup και \inf αντικαθίστανται με \min και \max .

¹ Στη σελίδα αυτή (14 γραμμές από το τέλος), υπάρχει ένα τυπογραφικό στο τέλος της αλυσίδας ανισοτήτων. Έτσι, αντί για $h(\tilde{S}_0, \tilde{t}_0)$ πρέπει να γραφεί $\tilde{h}(\tilde{S}_0, \tilde{t}_0)$, λείπει δηλαδή μια περισπωμένη.