20-10-2021

Fisher and Pry

$f(t) = \frac{S(t)}{M}$

Διαφ. εξίσωση $\boxed{\frac{df}{dt} = b f(1-f)}$

Αρχική συνθήκη: αν θέσουμε $f(0)=0$

$\Rightarrow t=0: \frac{df}{dt}(t=0) = 0 \Rightarrow f(\delta) \simeq 0 \quad \delta \to 0$

$\frac{df}{dt}(t=\delta) \to 0 \Rightarrow \cancel{f(t) = 0 \quad \forall t}$

(*) $\frac{f'(t)}{f(1-f)} = b$

$\frac{1}{f(1-f)} = \frac{1}{f} + \frac{1}{1-f}$

$\Bigg\} \frac{f'}{f} + \frac{f'}{1-f} = b$

$\frac{f'}{f} = (\ln f)'$, $\frac{f'}{1-f} = -\frac{(1-f)'}{1-f} = -(\ln(1-f))'$

$\overset{(*)}{\Longrightarrow} (\ln f)' - (\ln(1-f))' = b \Rightarrow \left(\ln\frac{f}{1-f}\right)' = b$

$$\left(\ln \frac{f}{1-f}\right)' = b \Rightarrow \ln \frac{f}{1-f} = bt + C$$

$$\Rightarrow \frac{f}{1-f} = e^{bt+C} = Ke^{bt} \qquad (K = e^{C} > 0)$$

$$\Rightarrow f(t) = \frac{Ke^{bt}}{1+Ke^{bt}} = \frac{1}{\frac{1}{Ke^{bt}}+1} = \frac{1}{1+K'e^{-bt}} \qquad \left(K' = \frac{1}{K}\right)$$

K' προσδ. από οποιαδήποτε ενδιάμεση συνθήκη.

Αν για $t = t_0$ $f = f_0$ $\Rightarrow \ldots K' = \ldots$

Στο βιβλίο έστω ότι για $t = t_0$ $f(t_0) = 1/2$

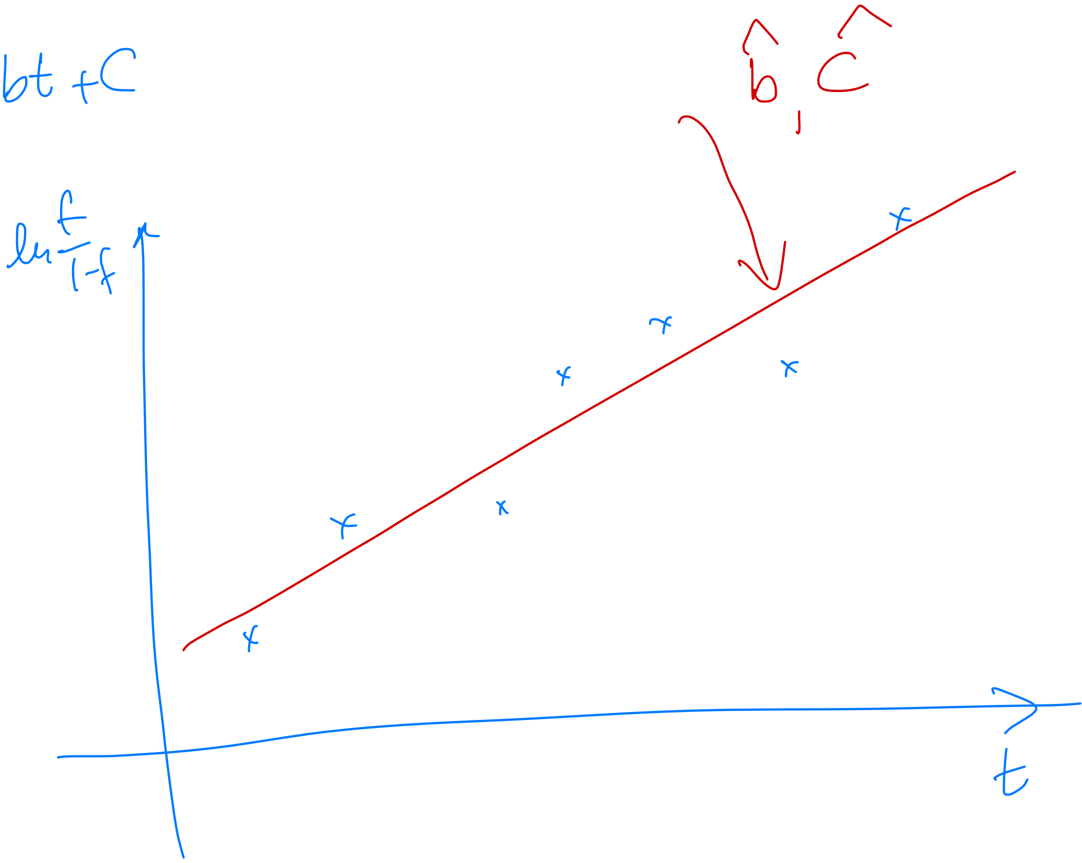
Αν γνωρίζουμε το t_0

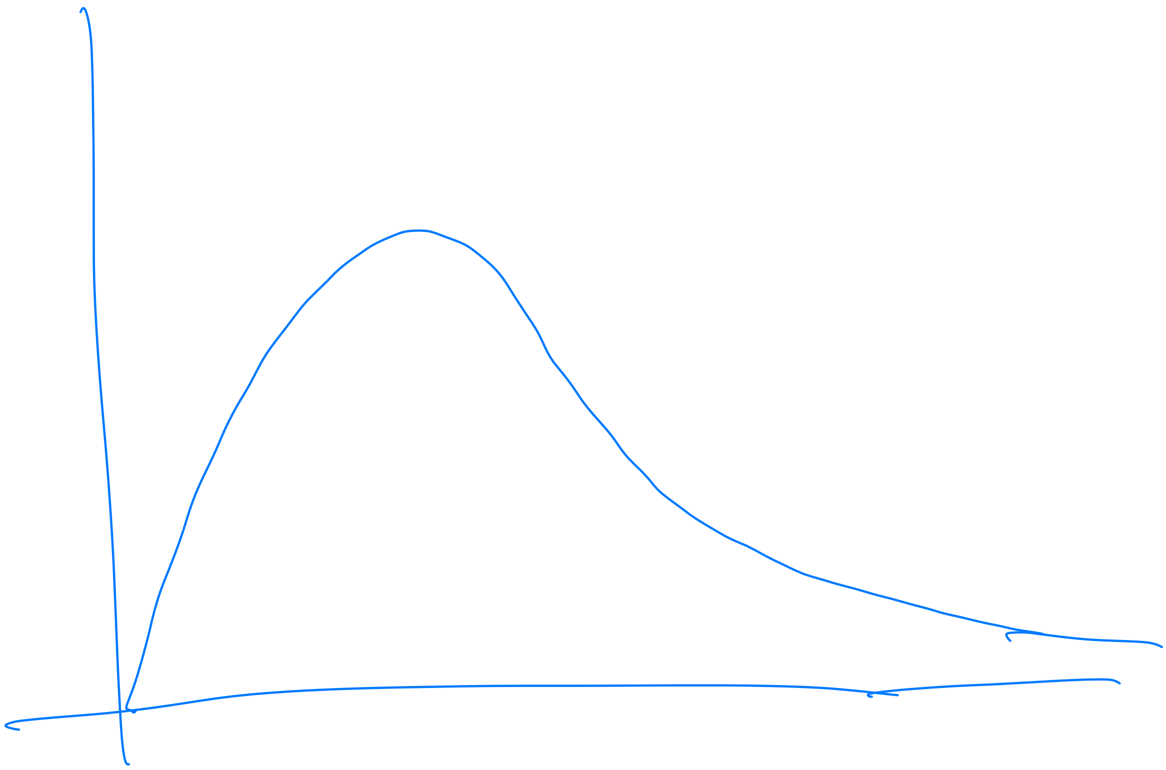
$$f(t_0) = \frac{1}{1+K'e^{-bt_0}} = \frac{1}{2} \Rightarrow K'e^{-bt_0} = 1 \Rightarrow K' = e^{bt_0}$$

$$\Rightarrow \boxed{f(t) = \frac{1}{1+e^{-b(t-t_0)}}}$$

b, t_0 παράμετροι μοντέλου

$$\ln \frac{f(t)}{1-f(t)} = bt + C$$





3 Μοντέλο διάχυσης Bass
Bass diffusion model

Διακριτού χρόνου

$$Q_n = \left(p + r\frac{S_{n-1}}{M}\right)\left(M - S_{n-1}\right)$$

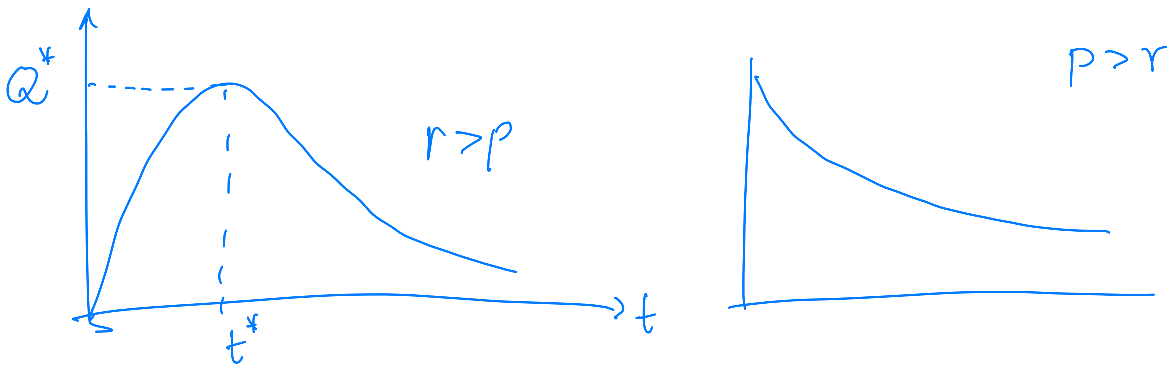
$r=0 \Rightarrow$ Fourt

$p=0 \Rightarrow$ Fisher Pry

Συνεχούς χρόνου

$$Q(t) = \left(p + r\frac{S(t)}{M}\right)\left(M - S(t)\right)$$

παράμετροι p, r, M



t^* : χρόνος μεγιστοποίησης πωλήσεων

Q^* : peak πωλήσεων

$$\boxed{t^* = \frac{1}{p+r}\ln\frac{r}{p} \quad (r>p) \qquad Q^* = \frac{M(p+r)^2}{4r}}$$

Στατιστική Εκτίμηση Παραμέτρων.

Δεδομένα πωλήσεων μπορεί να προέρχονται

(α) από παρεμφερή προϊόντα

(β) από αρχικές πωλήσεις του νέου προϊόντος

(a) Fourt and Woodlock

$$Q_n = r(1-r)^{n-1} \cdot M \qquad r,$$

$$\ln Q_n = \ln(rM) + (n-1)\ln(1-r) =$$

$$= \ln(rM) - \ln(1-r) + n \cdot \ln(1-r)$$

$$= \ln\left(\frac{rM}{1-r}\right) + n\ln(1-r) = a + bn$$

$$\boxed{\begin{array}{l} a = \ln\left(\frac{rM}{1-r}\right) \\ b = \ln(1-r) \end{array}}$$

Απλός τρόπος εκτίμησης παραμέτρων a, b.

Υποθέτουμε $Y_n = \ln Q_n \sim \mathcal{N}(a+bn, \sigma^2)$ $\quad n=1,2,\ldots$ ανεξάρτητα.

γραμμικό μοντέλο $\boxed{Y_n = a + bn + \varepsilon_n}$, $\quad \varepsilon_n = \mathcal{N}(0,\sigma^2)$

$$\Rightarrow Q_n = e^{Y_n} = e^{a+bn} \cdot e^{\varepsilon_n} = e^{a+bn} \cdot R_n$$

πολλαπλασιαστική διαταραχή $(R_n \geq 0)$

$$\ln(R_n) = \varepsilon_n \sim \mathcal{N}(0,\sigma^2) \Rightarrow R_n = LN(a+bn, \sigma^2)$$

Κλασσική ανάλυση παλινδρόμησης : Εκτ. ελαχ. τετρ. $\hat{a}, \hat{b}$

$$\left.\begin{array}{l} \hat{a} = \ln\left(\frac{rM}{1-r}\right) \\ \hat{b} = \ln(1-\hat{r}) \Rightarrow 1-\hat{r} = e^{\hat{b}} \Rightarrow \hat{r} = 1-e^{\hat{b}} \end{array}\right\} \Rightarrow \ldots \Rightarrow \hat{M}$$

$$\hat{a} = \ln(\hat{r}\hat{M}) - \ln(1-\hat{r}) = \ln(\hat{r}\hat{M}) - \hat{b} \Rightarrow \ln \hat{r}\hat{M} = \ln\hat{r} + \ln\hat{M} = \hat{a} + b$$

β) Fisher and Pry

$$\ln \frac{f(t)}{1-f(t)} = b(t-t_0) = -bt_0 + b\underline{t}$$

$$y = \ln \frac{f(t)}{1-f(t)}$$

αντίστοιχο μοντέλο παλινδρόμησης

γ) Bass diffusion

$$Q_n = \left(p + r\frac{S_{n-1}}{M}\right)\left(M - S_{n-1}\right) =$$

$$= pM - pS_{n-1} + rS_{n-1} - \frac{r}{M}S_{n-1}^2$$

$$\underline{Q_n} = -\frac{r}{M}S_{n-1}^2 + (r-p)S_{n-1} + pM = \underline{aS_{n-1}^2} + b\underline{S_{n-1}} + c$$

n	Q_n	S_n
1	5	5
2	10	15
3	12	27
4	15	42

Παλινδρόμηση για ~~εκ~~ εκτίμηση των a, b, c μέσω LSE.

Μοντέλο

$$\boxed{Q_n = aS_{n-1}^2 + bS_{n-1} + c + \varepsilon_n}$$

$\varepsilon_n \sim N(0, \sigma^2)$

ανεξάρτητα

$$\varepsilon_1 = Q_1 - c$$

$$\varepsilon_2 = Q_2 - (aQ_1^2 + bQ_1 + c)$$

$$\varepsilon_3 = Q_3 - (aS_2^2 + bS_2 + c)$$

δεν είναι ανεξάρτητα

$S_n - S_{n-1} = \cdots$

$$\underline{S_n} = \underline{S_{n-1} + aS_{n-1}^2 + bS_{n-1} + c} + \varepsilon_n = f(S_{n-1}) + \underline{\varepsilon_n}$$

$$\Downarrow$$

καταλληλο μοντέλο

$\boxed{\text{χρονοσειρά}}$

ανεξ $\underline{Y_n} = a + bX_n + \varepsilon_n$ ανεξ

σταθερά γνωστά

Σειρά Ασκήσεων

Άσκηση 1

N_t = συνολικές πωλήσεις περιόδων $0, 1, 2, \ldots, t$

$Q_t = a + bt \quad , \quad t = 0, 1, 2 \ldots$ (εβδομάδες)

1. $N_t = ?$

$$\sum_{k=0}^{t} Q_k = \sum_{k=0}^{t} (a + bk) = a(t+1) + b \sum_{k=1}^{t} k$$

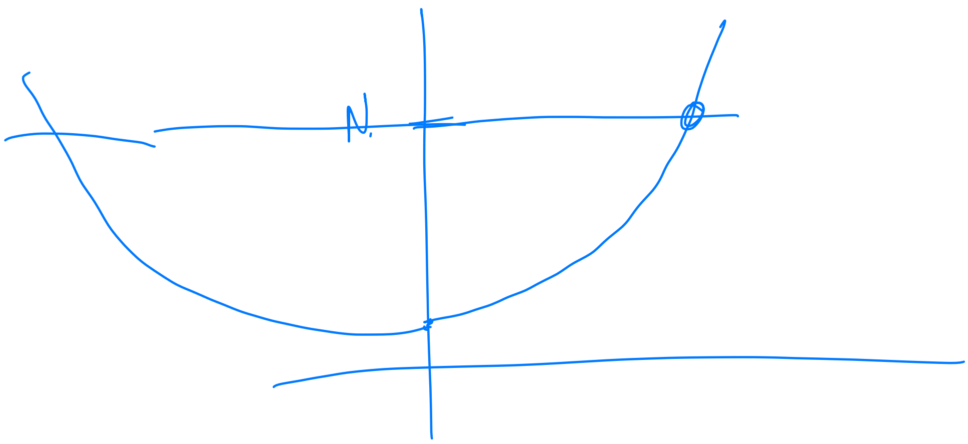
$$\boxed{N_t = a(t+1) + b\,\frac{t(t+1)}{2}}$$

2. $a = 50$, $b = 2$, $t = ?$ έτσι ώστε $N_t = 10^4$

$$N_t = \underline{50(t+1) + t(t+1)} = 10^4 \Rightarrow t^* = \ldots$$

μόνο μία θετική ρίζα

N_t αύξουσα για $t \geq 0$



Άσκηση 2

(a) Από το μοντέλο Bass γνωρίζουμε

$$t^* = \frac{1}{p+r} \ln \frac{r}{p} \quad , \quad r = 0{,}05\,A,\quad p = 0{,}01\,A$$

$$\Rightarrow t^* = \frac{1}{0{,}06\,A} \ln 5 = 10 \Rightarrow \dots A = \dots$$

(b) $$Q_n = 410 + 0{,}39\, S_{n-1} - 10^{-6} S_{n-1}^2$$

$$Q_n = a S_{n-1}^2 + b S_{n-1} + c$$

$$\boxed{a = -\frac{r}{M}, \quad b = r - p, \quad c = pM}$$

$$r = -aM, \quad p = \frac{c}{M},$$

$$b = -aM - \frac{c}{M} \Rightarrow \dots \quad M = \dots \Rightarrow \begin{array}{l} r = -aM \\ p = \dfrac{c}{M} \end{array}$$

Ασκηση 3

$N = 1000$, $T = 4$

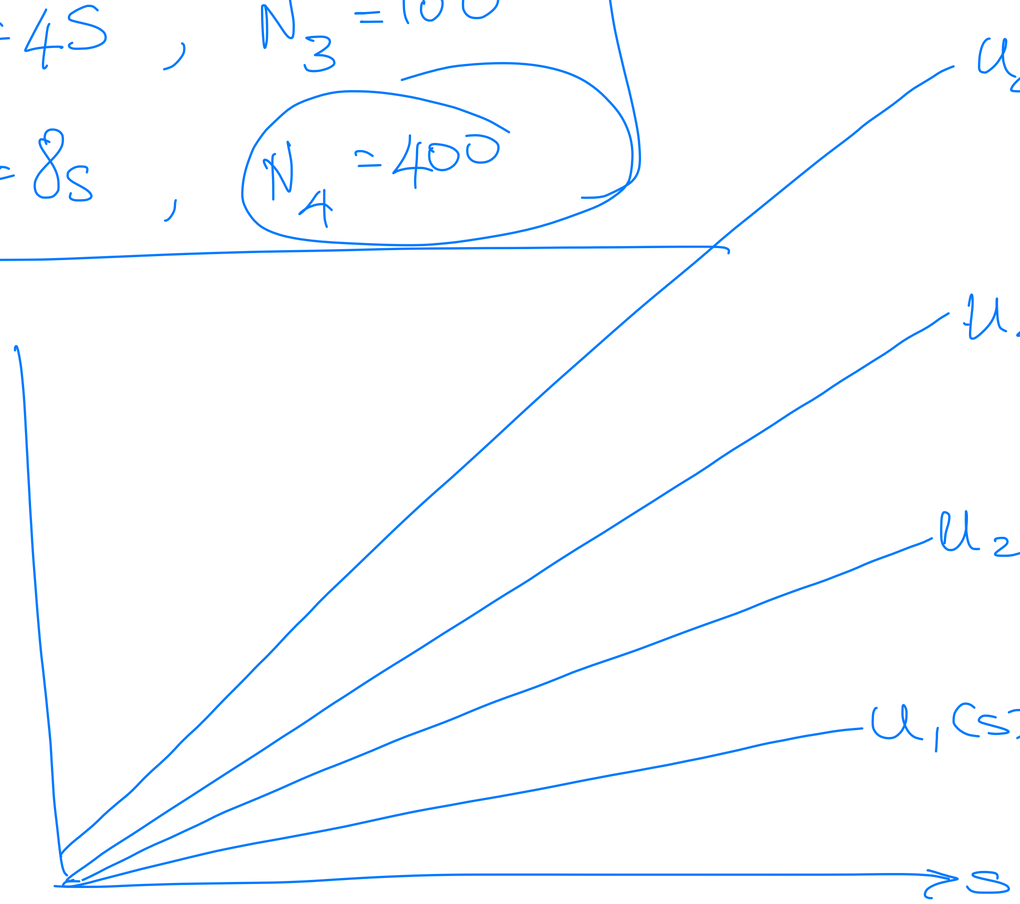
$N_1 = 900$, $N_2 = 300$, $N_3 = 400$, $N_4 = 100$

Εστω $u_1(s) = 2s$, $u_2(s) = s$, $u_3(s) = 8s$, $u_4(s) = 4s$

$C(s) = 2s^2$

Επειδή υποθέτουμε $u_1(s) < u_2(s) < u_3(s) \ldots$ εδώ δεν ισχύει , επομένως κάνουμε επαναρίθμηση

$$\left.\begin{aligned}
&u_1(s) = s \quad , \quad N_1 = 300 \\
&u_2(s) = 2s \quad , \quad N_2 = 200 \\
&u_3(s) = 4s \quad , \quad N_3 = 100 \\
&u_4(s) = 8s \quad , \quad N_4 = 400
\end{aligned}\right\}$$



① Αν επιλέξουμε $t=1$: δηλ. $p = u_1(s)$

Ζήτηση (Πωλήσεις) $= N_1+N_2+N_3+N_4 = 1000$

Κέρδος $\Pi_1(s) = \left(u_1(s) - C(s)\right) \cdot 1000$

$= 1000\,(s - 2s^2) \leftarrow \max_s$

$\Pi_1'(s) = 1000\,(1-4s) = 0 \Rightarrow s_1^* = 1/4$

$p_1^* = u_1(s_1^*) = s_1^* = 1/4$

$\Pi_1(s_1^*) = 1000\left(\frac{1}{4} - \frac{2}{16}\right) = 1000\left(\frac{1}{8}\right) = \underline{\underline{125}}$

---

② Αν $t=2$ δηλαδή $p = u_2(s) = 2s$

$\Rightarrow$ Πωλήσεις $N_2+N_3+N_4 = 800$

$\Pi_2(s) = 800\,(2s - 2s^2) = 1600\,(s - s^2)$

$\Pi_2' = 1600\,(1-2s) = 0 \Rightarrow s_2^* = 1/2$

$p_2^* = 2s_2^* = 1$

$\Pi_2^* = 1600\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \underline{\underline{400}}$

③ $t=3$, $p=u_3(s)=4s$

Πωλήσεις $N_3+N_4=500$

$$\Pi_3(s)=500(4s-2s^2)$$

$$\Pi_3'=500\cdot(4-4s)=0 \Rightarrow s_3^*=1$$

$$p_3^*=4$$

$$\Pi_3^*=500(4-2)=\underline{\underline{1000}}$$

---

④ $t=4$ $p=u_4(s)=8s$, Πωλήσεις $=N_4=400$

$$\Pi_4(s)=400(8s-2s^2)$$

$$\Pi_4'=400(8-4s)=0 \Rightarrow s^*=2$$

$$p^*=16$$

$$\Pi_4^*=400(16-8)=8\cdot 400=\underline{\underline{3200}}$$

$$\Pi_4^*=3200=\max(\Pi_1^*,\Pi_2^*,\Pi_3^*,\Pi_4^*)$$

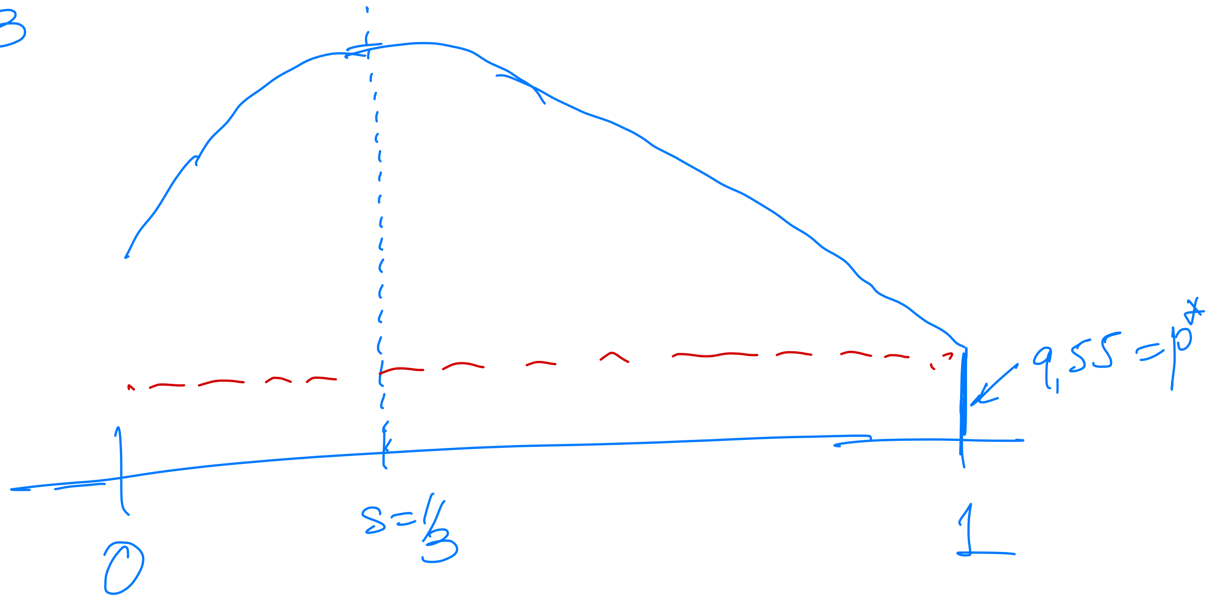
$\Rightarrow \boxed{t^*=4,\ s^*=2,\ p^*=16,}$

Πωλήσεις $=N_4=400 \Rightarrow$ % εξυπ. $=\frac{400}{1000}=40\%$

Άσκηση 4 (Θέτουμε $R=10$)

① $s = 1/3$

$c = 4$



$$u(t,s) = R - (t-s)^2 - p = 10 - (t - 1/3)^2 - p$$

Για να πάρει όλη την αγορά, πρέπει $u(t,s) \geq 0 \ \forall t$

$$\Rightarrow p \leq 10 - (t - 1/3)^2 \quad \forall t \in [0,1]$$

$$\Rightarrow p \leq \min_{t\in[0,1]} \left\{ 10 - (t - 1/3)^2 \right\}$$: ωφέλεια του μακρινότερου πελάτη

Ο πιο απομακρυσμένος πελάτης είναι ο $t=1$.

$$p \leq 10 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 10 - \frac{4}{9} = 9\,5/9 = 9,55$$

$$\Rightarrow p_1^* = 9,55$$

Κέρδος $= (p - c)\cdot 1 = 5,55$

② Ομοια : p_2^*, $\pi_2^* = (p_2^* - 2)\cdot 1$

Επιλέγω 1 ή 2 αναλογα αν $\pi_1^* > \pi_2^*$

<u>Ασκηση 5</u> Στο ①,② Υποθέτουμε ότι η εταιρεία 2 θα θέσει το s_2 γνωρίζοντας το s_1 και στο επόμενο στάδιο οι δύο εταιρείες θα θέσουν τιμές p_1, p_2 <u>ταυτόχρονα</u> γνωρίζοντας <u>και οι δύο</u> τα s_1, s_2.

① Δύο στάδια: ① Η ετ. 2 επιλέγει s_2

② Ανταγωνισμός τιμών (p_1, p_2)

<u>Στάδιο 2</u> : Δεδομένων s_1, s_2 η λύση ως προς το σημείο ισορροπίας (p_1^e, p_2^e) είναι η ίδια με το μοντέλο Hotelling.:

$p_1^e(s_1, s_2)$

$p_2^e(s_1, s_2)$ από τους τύπους του βιβλίου

$\Rightarrow \pi_1(s_1, s_2)$

$\pi_2(s_1, s_2)$

<u>Στάδιο 1</u> : s_1 = σταθερό $\Rightarrow$ ο 1 δεν έχει απόφαση

ο s_2 πρέπει $\max_{s_2} \pi_2(s_1, s_2)$ $(s_1 = 1/3) \Rightarrow s_2^*, p_1^*, p_2^*$

π_1^*, π_2^*