Αριθμητικές Μέθοδοι για Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις
Εργαστηριακή Άσκηση 1 (εισαγωγή στο matlab)

Άσκηση 1
Να γίνουν οι ακόλουθες γραφικές παραστάσεις

α. της υπερβολής
$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

β. της συνάρτησης
$$f(x) = \begin{cases} e^x, & \text{αν} \quad x < 0, \\ (5 - (2x-1)^2)/4, & \text{αν} \quad 0 \le x \le 1, \\ e^{1-x}, & \text{αν} \quad x \ge 1, \end{cases}$$
για $x \in [-2, 2]$.

γ. της συνάρτησης
$$g(x) = \sum_{n=0}^{10} \frac{1-x}{n!} x^n,$$
για $x \in [-1, 1]$.

Για κάθε ένα από τα ερωτήματα να γράψετε ένα script το οποίο να σχεδιάζει την γραφική παράσταση, για τα ερωτήματα β και γ οι συναρτήσεις f και g θα πρέπει να οριστούν σε ένα ξεχωριστό function m-file και να μπορούν να κληθούν διανυσματικά (δηλαδή αν $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ τότε η $f(\boldsymbol{x})$ πρέπει να επιστρέφει το διάνυσμα $(f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n))$).

* Θα εκτιμηθεί αν ορίσετε τις συναρτήσεις f και g και σαν ανώνυμες (`f = @(x) ...`), χωρίς την χρήση `if`, `for` ή `while`.

Άσκηση 2
Θεωρήστε το πρόβλημα
$$\begin{aligned} -u'' + q(x)u &= f(x), \quad 0 \le x \le 1 \\ u(0) = 0, &\quad u(1) = 0 \end{aligned}$$
με $q(x) = 1 + x^2$.

α. Να βρείτε το $f(x)$ έτσι ώστε η ακριβής λύση του προβλήματος να είναι $u = \sin(\pi x)$.

β. Έστω $\{x_i\}_{i=0}^{J+1}$ μια διαμέριση του $[0, 1]$ με $x_i = ih$, $0 \le i \le J{+}1$ όπου $h = 1/J{+}1$. Προσεγγίζουμε την $u(x_i)$ από U_i, $0 \le i \le J{+}1$ έτσι ώστε
$$\begin{cases} U_0 = U_{J+1} = 0, \\ -\dfrac{(U_{i-1} - 2U_i + U_{i+1})}{h^2} + q(x_i)U_i = f(x_i), \quad 1 \le i \le J \end{cases}$$
Δείξτε ότι το διάνυσμα $U = [U_1, \ldots U_J]^T$ πληροί ένα τριδιαγώνιο σύστημα της μορφής
$$AU = F$$
όπου ο A είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος πίνακας.

γ. Λύστε το σύστημα και βρείτε την νόρμα του σφάλματος

$$e_h = \sqrt{h \sum_{j=1}^{J} \left(U_j - u(x_j)\right)^2}.$$

Δείξτε πειραματικά ότι $e_h = \mathcal{O}(h^2)$ καθώς $h \to 0$.
* Θα εκτιμηθεί αν υλοποιήσετε τον αλγόριθμο του Cholesky για την επίλυση του τριδιαγώνιου συστήματος.