Αριθμητικές Μέθοδοι για Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις

Εργαστηριακή Άσκηση 3

1) Θεωρήστε το πρόβλημα συνοριακών τιμών (11.5a)-(11.5b) του [G] [1]. Επιλύστε το με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων με P_1 τρίγωνισμό του τύπου του Σχ. 10.1 ([G]).

α) Λύστε το γραμμικό σύστημα με Matlab (`b/A`). Δείξτε ότι η τάξη σύγκλισης της μεθόδου στην $||\cdot||_{L^2}$ και την $||\cdot||_{H^1}$ νόρμα στο Ω είναι αντίστοιχα 2 και 1.

β) Λύστε το γραμμικό σύστημα με την μέθοδο των συζυγών κλίσεων με προρρυθμιστή SSOR (βλ. §12.2.5) με κριτήριο σύγκλισης το σχετικό υπόλοιπο $\dfrac{||F-KU^{(k)}||}{||F||}$ να είναι $\leq 10^{-6}$, με $\omega = 1.5$, και επιβεβαιώστε τον πίνακα της σελ. 275, Ex. 12.7 (Για την πρώτη γραμμή του πίνακα μπορείτε να φτιάξετε τον τριγωνισμό χρησιμοποιώντας την συνάρτηση `RectangleMeshD1.m` και για τις επόμενες γραμμή του πίνακα μπορείτε να κάνετε refine τον αρχικό τριγωνισμό).
Διερευνήστε την ταχύτητα σύγκλισης για $\omega \in [1.25, 1.75]$. Προσπαθήστε να βρείτε ένα βέλτιστο ω για αυτό το πρόβλημα. (Στη διερεύνηση σας πάρτε $h =$ σταθερό).

2*) Θεωρήστε το πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$
\begin{aligned}
-\Delta u + u &= -4 + a(x^2+y^2) \quad \text{στο } \Omega,\\
\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} &= 2,
\end{aligned}
$$

όπου Ω είναι ο μοναδιαίος δίσκος στο επίπεδο με κέντρο $(0,0)$. Η μοναδική λύση του προβλήματος είναι $u = x^2 + y^2$ αν $a > 0$, και ως γνωστόν δεν είναι μοναδική αν $a = 0$.

α) Λύστε το πρόβλημα για $a = 1$ με την μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων με P_1 τρίγωνα και ελέγξτε πειραματικά ότι $||u-u_h|| = O(h^2)$, $||u-u_h||_1 = O(h)$, $\max_j |(u-u_h)(p_j)| = O(h^2)$, όπου $\{p_j\}$ οι ελεύθεροι κόμβοι.

β) Τι συμβαίνει κατά την επίλυση του γραμμικού συστήματος με την μέθοδο των συζυγών κλίσεων όταν $a = 0$?

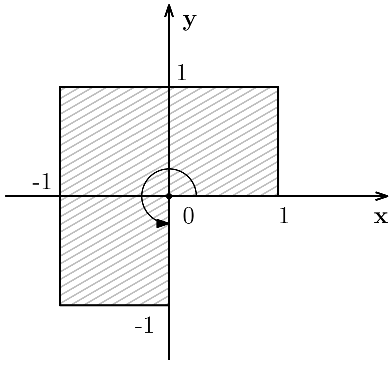
γ) Λύστε το πρόβλημα όταν $a = 0$ επιβάλλοντας την επιπλέον συνθήκη ότι $u(1,0) = 1$ και ελέγξτε πειραματικά ότι $||u-u_h|| = O(h^2)$, $||u-u_h||_1 = O(h)$.

3) Το πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$
\begin{aligned}
-\Delta u &= 1 \quad \text{στο } \Omega\\
u &= 0 \quad \text{στο } \partial\Omega
\end{aligned}
$$

όπου Ω:

[1] [G] = M.S. Gockenbach, Understanding and Implementing the FEM, SIAM 2006



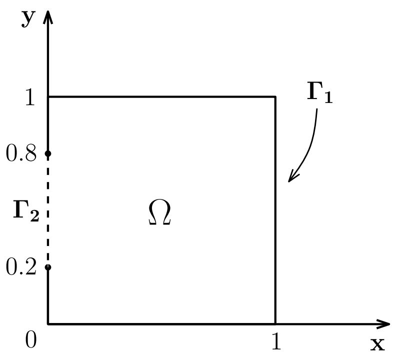
(δηλ. $\mathbf{\Omega}$ τύπου "Γ") είναι γνωστό ότι δεν έχει ομαλή λύση (στο $(0,0)$ έχει εσωτερική γωνία $3\pi/2$). Λύστε το πρόβλημα για αρκετά μικρό h και κάντε τις εξής γραφικές παραστάσεις της λύσης:

α) $u(x,x),\ 0 \le x \le 1,$ β) $u(0,y),\ 0 < y \le 1,$
γ) $u_y(0,y),\ 0 < y < 1,$ δ) ισοϋψείς της u στο $\mathbf{\Omega}$.

4) Λύστε το πρόβλημα

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 1 \quad \text{στο } \Omega \\ u &= 0 \quad \text{στο } \Gamma_1 \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= 0 \quad \text{στο } \Gamma_2 \end{aligned}$$

όπου $\Omega,\ \Gamma_1,\ \Gamma_2$ όπως στο σχήμα:



(δηλ. $\Gamma_2 = \{\ (0,y),\ 0.2 \le y \le 0.8\ \}$).

Αναμένεται ότι η λύση θα έχει ιδιομορφία στα σημεία $(0,0.2)$ και $(0,0.8)$ όπου ο τύπος της συνοριακής συνθήκης αλλάζει.
Λύστε το πρόβλημα με αρκετά μικρό h, κάντε τις γραφικές παραστάσεις

α) της $u(0,y),\ 0 \le y \le 1$

β) ισοϋψεις της u στο Ω

και εκτιμήστε την αριθμητική τιμή $u_y^+(0,0.2)$ (δηλ. το $\lim\limits_{y \downarrow 0.2} u_y(0,y)$).