ΕΦΜ 4 ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΓΙΑ ΜΔΕ, ΕΑΡ. ΕΞ. 2017-18

1ο Φυλλάδιο Ασκήσεων.

1. Άσκηση σελ. 4 Σημειώσεων. (5)
2. Ένας κλειστός, πυκνός υπόχωρος ενός χώρου Hilbert H συμπίπτει με τον H. (5)
3. Άσκηση σελ. 9 Σημειώσεων. (5)
4. Απόδειξε τον κανόνα του παραλληλογράμμου:

$$(*) \quad \|a+b\|^2 + \|a-b\|^2 = 2\left(\|a\|^2 + \|b\|^2\right),$$

$\forall a, b \in V$, όπου $\{V, (\cdot,\cdot), \|\cdot\|\}$ ένας μιγαδικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο. (5)

5. Έστω $V, \|\cdot\|$ ένας πραγματικός χώρος με νόρμα, στον οποίο ισχύει ο κανόνας του παραλληλογράμμου (βλ. Ασκ. 4 (*)) για κάθε $a, b \in V$. Ορίζουμε την ποσότητα (a,b) ως

$$(a,b) = \frac{1}{2}\left(\|a+b\|^2 - \|a\|^2 - \|b\|^2\right), \quad \forall a, b \in V.$$

Δείξτε ότι το $(\cdot,\cdot)$ είναι εσωτερικό γινόμενο στον V.

[Υπόδειξη:

(i) Δείξτε πρώτα ότι $(a,b) = (b,a)$, $(-a,b) = -(a,b)$, $(a,2b) = 2(a,b)$, $\forall a, b \in V$.

(ii) Δείξτε ότι $(a+b, c) = (a,c) + (b,c)$, $\forall a, b, c \in V$.

[Υπόδειξη: χρησιμοποιήστε τον κανόνα του παραλληλογράμμου για τα ζεύγη $\{a, b\}$, $\{a+c, b+c\}$, $\{a+b+c, c\}$.]

(iii) Αποδείξτε ότι $(\lambda a, b) = \lambda (a,b)$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $a, b \in V$.

[Υπόδειξη: Εξετάστε τις περιπτώσεις $\lambda \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{Q}$, και συμπεράνετε $\lambda \in \mathbb{R}$.]].

[Παρατήρηση: Υπάρχει αντίστοιχο αποτέλεσμα και σε μιγαδικούς χώρους αλλά εδώ περιοριζόμαστε σε χώρους επί του $\mathbb{R}$ για απλοποίηση.] (15)

6. Αποδείξτε ότι ο $L^1(0,1)$ δεν είναι χώρος Hilbert.

[Υπόδειξη: Βρείτε ένα ζευγάρι συναρτήσεων του $L^1(0,1)$ για τις οποίες δεν ισχύει ο κανόνας του παραλληλογράμμου για τη νόρμα του $L^1(0,1)$. (Χρησιμοποιήστε συναρτήσεις με φορείς ξένους μεταξύ τους.)] (10)

7. Έστω V μιγαδικός χώρος μέ εσωτερικό γινόμενο $(\cdot,\cdot)$ καί αντίστοιχη νόρμα $\|\cdot\|$. Δείξτε ότι $\|x+y\| = \|x\|+\|y\|$ γιά $x, y \in V$ αν και μόνο αν υπάρχει $\lambda \geq 0$ τέτοιο ώστε $x = \lambda y$ ή $y = \lambda x$. (10)

8. Αποδείξτε τό Πυθαγόρειο Θεώρημα. (Σημ. σελ. 13.) (5)

9. Αποδείξτε ότι αν ένας υπόχωρος G ενός χώρου Hilbert είναι πεπερασμένης διάστασης, τότε είναι κλειστός. (10)

10. Άσκηση περί προβολών (ii)–(v), σελ. 19 Σημειώσεων.) (15)

11. Γιά $f \in L^2(0,1)$, θεωρείστε τή λύση ϕ του προβλήματος αρχικών τιμών

$$\begin{cases} \phi' + a\phi = f, & 0 \leq t \leq 1, \\ \phi(0) = 0. \end{cases}$$

(Θεωρείστε τή λύση ϕ με την ολοκληρωτική της μορφή $\phi(t) = e^{-at}\int_0^t e^{as} f(s)\,ds$, ώστε να έχει νόημα ως "λύση" για $f \in L^2(0,1)$).

α) Δείξτε ότι $\phi \in L^1(0,1)$.

β) Θεωρείστε τήν απεικόνιση $l : L^2(0,1) \to \mathbb{R}$ που ορίζεται ως

$$l(f) = \int_0^1 \phi(t)\,dt, \quad f \in L^2(0,1).$$

Δείξτε ότι το l είναι γραμμικό, φραγμένο συναρτησιακό καί $L^2(0,1)$.

γ) Βρείτε τό $g \in L^2(0,1)$ πού παριστάνει τό l από τό θεώρημα του Riesz, Δηλ. βρείτε $g \in L^2(0,1)$ τέτοιο ώστε

$$l(f) = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt, \quad \forall f \in L^2(0,1).$$ (15)

(Η βαθμολογία κάθε άσκησης σε παρένθεση. Άθροισμα = 100.)