ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΓΙΑ ΜΔΕ, ΕΑΡ. ΕΞ. 2017-18

2ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

1. Θεωρείστε το πρόβλημα $-(pu')'+qu=f$, $a<x<b$, $u'(a)=0$, $u(b)=0$, όπου p, q πληρούν τις συνθήκες που είδαμε για το πρόβλημα με σ.σ. $u(a)=u(b)=0$. Αναπτύξτε πλήρη θεωρία ύπαρξης-μοναδικότητας για την κλασσική και την ασθενή λύση του προβλήματος. (Η ασθενής λύση ανήκει στον χώρο $\mathring{H}_b=\{v\in H^1(a,b),\ v(b)=0\}$. Δείξτε ότι ο $\mathring{H}_b$ είναι κλειστός υπόχωρος του H^1, και άρα χώρος Hilbert με την νόρμα $\|\cdot\|_1$. Δείξτε ότι στο $\mathring{H}_b$ ισχύει η ανισότητα Poincaré-Friedrichs. (25)

2. Παρόμοιο ερώτημα για το πρόβλημα $-(pu')'+qu=f$, $a<x<b$, $u(a)=0$, $u'(b)+ku(b)=0$, όπου $k\geq 0$ σταθερά. (Χρησιμοποιείστε κατάλληλη ασθενή μορφή και τον χώρο Hilbert $\mathring{H}_a$. Οι υποθέσεις για τα p, q, όπως στην Ασκ.1.) Τι μπορεί να συμβεί αν $k<0$; (25)

3. Θεωρείστε το πρόβλημα Neumann με <u>μη</u> ομογενείς συνθήκες στο $I=(0,1)$: $-u''+u=f$, $0<x<1$, $u'(0)=\alpha$, $u'(1)=\beta$. Αναπτύξτε πλήρη θεωρία ύπαρξης-μοναδικότητας για την κλασσική και ασθενή λύση του. (Ορίστε την ασθενή λύση $u\in H^1(I)$ τ.ω.
$\int_0^1(u'v'+uv)=\int_0^1 fv-\alpha v(0)+\beta v(1)$, $\forall v\in H^1(I)$, δείχνοντας ότι το δεξιό μέλος είναι γραμμικό, φραγμένο συναρτησιακό στο $H^1(I)$.)
(25)

4. Θεωρείστε το πρόβλημα δύο σημείων με <u>περιοδικές</u> σ.σ.:

$$\begin{cases} -u''+u=f, & 0<x<1, \quad I=(0,1), \\ u(0)=u(1), \\ u'(0)=u'(1). \end{cases}$$

Αν $f\in L^2(I)$, δείξτε ότι το πρόβλημα έχει μοναδική ασθενή λύση στον χώρο $H^1_{\pi\varepsilon\rho}(I)=\{v\in H^1(I),\ v(0)=v(1)\}$. (Δείξτε ότι ο $H^1_{\pi\varepsilon\rho}$ είναι χώρος Hilbert, κλειστός υπόχωρος του H^1.) Διερευνήστε την περαιτέρω ομαλότητα της ασθενούς λύσης, και αν f συνεχής, διερευνήστε την ύπαρξη-μοναδικότητα κλασσικής λύσης. (25)