ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΓΙΑ ΜΔΕ, ΕΑΡ. ΕΞ. 2017-18.

3ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

Θεωρείστε το πρόβλημα δύο σημείων

$$(*)\quad \begin{cases} -(pu')' + qu = f, & 0 \le x \le 1, \quad I = (0,1), \\ u(0) = 0, \quad u'(1) = 0, \end{cases}$$

όπου $p \in C^1(\bar{I})$ με $p(x) \geq p_0 > 0$, $x \in \bar{I}$, $q \in C(\bar{I})$ με $q(x) \geq 0$, $x \in \bar{I}$ και $f \in C(\bar{I})$ (ή $f \in L^2(I)$). Όπως στη 2η άσκηση, αν θεωρήσαμε τον χώρο $\overset{\circ}{H} := \{ v \in H^1(I), v(0) = 0 \}$ (κλειστός υπόχωρος του $H^1(I)$), το πρόβλημα (*) έχει μοναδική ασθενή λύση $u \in \overset{\circ}{H}$, τέτοια ώστε ($f \in L^2$)

$$(**)\qquad B(u, v) = (f, v), \quad \forall v \in \overset{\circ}{H},$$

όπου $B(u, v) = \int_0^1 (pu'v' + quv)dx$, και $(f, v) = \int_0^1 fv\,dx$.

(Γνωρίζουμε επίσης ότι η λύση της (**) είναι τέτοια ώστε $u \in H^2 \cap \overset{\circ}{H}$ με $\|u\|_2 \leq C\|f\|$. Επιπλέον, αν $f \in C(\bar{I})$, η u είναι κλασσική λύση της (*). Υπενθυμίζεται ότι στον $\overset{\circ}{H}$ ισχύει η ανισότητα Poincaré: $\|v\| \leq \|v'\| \quad \forall v \in \overset{\circ}{H}$.)

α) Έστω ένας διαμερισμός $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{N+1} = 1$ του $\bar{I}$ και $h = \max_i (x_{i+1} - x_i)$ και $S_h := \{ \varphi \in C(\bar{I}), \varphi(0) = 0, \varphi|_{[x_i, x_{i+1}]} \in \mathbb{P}_1, \forall i \}$.

Δείξτε ότι ο S_h είναι υπόχωρος πεπερασμένης διάστασης του $\overset{\circ}{H}$ και βρείτε κατάλληλη βάση του με στοιχεία με όσο το δυνατόν μικρότερο φορέα. (5)

β) Θεωρείστε την παρεμβάλλουσα $I_h v \in S_h$ μιας συνάρτησης $v \in \overset{\circ}{H}$ (δηλ. $(I_h v)(x_i) = v(x_i)$, $0 \leq i \leq N+1$). Δείξτε ότι

$$((I_h v)' - v', \varphi') = 0, \quad \forall \varphi \in S_h, \quad \text{και}$$

$$\|v - I_h v\| \leq C h \|(v - I_h v)'\|, \text{ όπου } C \text{ ανεξάρτητη των } h, v.$$

(5)

γ) Δείξτε ότι υπάρχει σταθερά C ανεξάρτητη του h, τ.ω.

$$\|v - I_h v\| + h\|v' - (I_h v)'\| \le C h^2 \|v''\|, \quad \forall v \in H^2 \cap \overset{\circ}{H}.$$

(5)

δ) Θεωρείστε την συνάρτηση v, $v(x) := x(2-x)$, $0 \le x \le 1$. Υπολογίστε ακριβώς το σφάλμα $\|v' - (I_h v)'\|$ ως συνάρτηση του h για ομοιόμορφο διαμερισμό $x_i = ih$, $0 \le i \le N+1$, και δείξτε ότι είναι πρώτης τάξης ως προς h. (10)

ε) Αν $v \in C^2[0,1]$ και $v(0) = 0$ δείξτε ότι για κάποια σταθερά C, ανεξάρτητη των h και v, ισχύει ότι

$$\max_{0 \le x \le 1} |v(x) - (I_h v)(x)| \le C h^2 \max_{0 \le x \le 1} |v''(x)|. \qquad (10)$$

στ) Θεωρείστε την προσέγγιση $u_h \in S_h$ της λύσης u της (**) που παράγει η μέθοδος Galerkin δηλ. την λύση του προβλήματος

$$(+) \quad B(u_h, \phi) = (f, \phi), \quad \forall \phi \in S_h.$$

Δείξτε ότι η u_h υπάρχει μοναδική στο S_h και ότι οι συντελεστές της ως προς την βάση που διαλέξατε στο (α) πληρούν ένα σύστημα της μορφής $Ac = b$ όπου $A_{ij} = B(\varphi_j, \varphi_i)$ είναι συμμετρικός, θετικά ορισμένος, τριδιαγώνιος πίνακας. (5)

ζ) Δείξτε ότι $\|u - u_h\|_1 \le C_1 h \|u''\|$, $\|u - u_h\| \le C_0 h^2 \|u''\|$, όπου u η λύση της (**) και όπου οι σταθερές C_0, C_1 είναι ανεξάρτητες των h και u. (5)

η) Αν $p \equiv 1$, $q \equiv 0$, δείξτε ότι η λύση u_h της (+) είναι ακριβής στους κόμβους x_i, δηλ. ότι ισχύουν οι ισότητες $u_h(x_i) = u(x_i)$, $0 \le i \le N+1$, όπου u η λύση της (**). (Υπόδειξη: δείξτε ότι $u_h = I_h u$). (10)

θ) Δείξτε την εκτίμηση $|u(1) - u_h(1)| \le C h^2 \|u''\|$, όπου u η λύση της (**). (Υπόδειξη: χρησιμοποιήστε στην (+) την συνάρτηση δοκιμής φ, $\varphi(x) := x$, $x \in \bar{I}$.) (12)

Υποθέστε ότι $p = 1$ και $q(x) > 0$, $x \in [0,1]$.

ι) Θεωρείστε τις εξισώσεις Galerkin (†) για $\varphi = \varphi_i$, $1 \le i \le N+1$, όπου $\{\varphi_i\}_{i=1}^{N+1}$ η βάση που βρήκατε στο (α). Δείξτε ότι, για οποιοδήποτε διαμερισμό $x_i = ih$, $0 \le i \le N+1$, ισχύει

$$-\frac{1}{h}\Big(u_h(x_{i-1}) - 2u_h(x_i) + u_h(x_{i+1})\Big) + \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} q\, u_h \varphi_i = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f \varphi_i, \quad 1 \le i \le N,$$

και $$\frac{1}{h}\Big(u_h(x_{N+1}) - u_h(x_N)\Big) + \int_{x_N}^{x_{N+1}} q\, u_h \varphi_{N+1} = \int_{x_N}^{x_{N+1}} f \varphi_{N+1}. \quad (\text{Εδώ } f \in C(\bar{I}))$$

Προσεγγίστε τα ολοκληρώματα στις παραπάνω ισότητες με τον κανόνα του τραπεζίου: $\int_{x_i}^{x_{i+1}} g(x)\,dx \cong \frac{h}{2}\big(g(x_i) + g(x_{i+1})\big)$, και

έστω $\{U_i\}_{i=1}^{N+1}$ οι προσεγγίσεις που προκύπτουν για τις τιμές $u_h(x_i)$. Δείξτε ότι το διάνυσμα $\{U_i\}_{i=1}^{N+1}$ πληροί το γραμμικό σύστημα (μέθοδο πεπερασμένων διαφορών):

$$-U_{i-1} + (2 + h^2 q(x_i))\, U_i - U_{i+1} = h^2 f(x_i), \quad 1 \le i \le N,$$
$$-2U_N + (2 + h^2 q(x_{N+1}))\, U_{N+1} = h^2 f(x_{N+1}).$$

Δείξτε ότι το γραμμικό αυτό σύστημα έχει μοναδική λύση. (Θεώρημα Gerschgorin). (11)

ια) Για το σύστημα $Ac = b$ του ερωτήματος (ζ), δώστε τον αλγόριθμο του Cholesky για την επίλυσή του, και μετρείστε τον αριθμό πράξεων και θέσεων μνήμης που απαιτεί, συναρτήσει του N. (10)

ιβ) Ίδιο ερώτημα όπως στο (ια) για τον αλγόριθμο της μεθόδου των συζυγών κλίσεων. (12)

(Η βαθμολογική αξία κάθε ερωτήματος στην παρένθεση. Μέγιστο σύνολο = 100.)